О.Н. ГОЛУБЕВА,[1] С.В. СИДОРОВ,[1] В.Г. БАРЬЯХТАР[2]

[1] Российский университет дружбы народов
(Москва, Россия; e-mail: ogol2013@gmail.com)
[2] Институт магнетизма НАН Украины
(Бульв. Академика Вернадского, 36, Киев 03142; e-mail: baryakhtar@gmail.com)

УДК 539

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕЛАКСАЦИИ КВАНТОВО-ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Предлагается обобщение уравнений квантовой механики в гидродинамической форме путем введения в плотность лагранжиана членов, учитывающих диффузионную скорость при нулевой и конечных температурах, а также энергию диффузионного давления теплого вакуума. На этой основе для модели одномерной гидродинамики строится система уравнений, аналогичных уравнениям Эйлера, но с учетом квантовых и тепловых эффектов. Они представляют собой обобщение уравнений стохастической механики Нельсона. Численный анализ поведения решений данной системы позволяет сделать вывод о ее пригодности для описания процесса релаксации квантово-тепловых флуктуаций.

Ключевые слова: $(\hbar, k)$-динамика, кванто-термостат, холодный и теплый вакуумы, эффективное воздействие, самодиффузия, плотность энергии диффузионного давления, дрейфовая и диффузионная скорости, численный анализ.

1. Введение

Тепловые флуктуации в гидродинамике принимаются во внимание уже полстолетия, однако последовательной квантовой статистической теории, в которой учитывались бы совместно квантовые и тепловые эффекты, не существует до сих пор [1]. В данной работе мы излагаем вариант подхода к построению такой теории, исходя из гидродинамической формы квантовой механики. С этой целью мы предлагаем обобщить ее, приняв во внимание квантово-тепловую диффузию, которая отражает стохастический характер воздействия окружения, и плотность энергии диффузионного давления, которое имеет место при нулевой и конечной кельвиновых температурах. При этом потребуется опираться на обобщение понятия теплового равновесия на случай одновременного учета стохастического воздействия как квантового, так и теплового типов. В итоге для одномерной модели будет получена система уравнений гидродинамики, аналогичная системе уравнений Эйлера, но отличающаяся от нее тем, что в ней учтены квантовые и тепловые эффекты.

Традиционно уравнения гидродинамики выводятся либо из статистической механики, либо из кинетики, в которых используются конкретные представления о структуре среды и взаимодействий составляющих ее частей. Соответственно, учет гидродинамических флуктуаций производится путем включения в уравнения гидродинамики случайного тензора напряжений (наряду с регулярным), для которого на основе флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) задается только коррелятор.

Между тем, гидродинамика имеет концептуальное сходство с равновесной термодинамикой, ибо она также является принципиально безмодельной теорией. Поэтому мы предлагаем рассматривать теорию процесса рассасывания квантово-тепловых флуктуаций плотности и дрейфовой скорости при равновесии по температуре как стохастическую гидродинамику. В этом случае вывод соответствующих уравнений можно начать с обобщения гидродинамической формы квантовой механики при нулевой температуре как безмодельной теории на случай явного учета самодиффузии в холодном и теплом вакуумах. Это позволяет впервые распространить гидродинамическую форму квантовой механики на конечные температуры и учесть не только самодиффузию, но и диффузионное давление теплого вакуума.

В итоге для одномерной модели нами получена система уравнений стохастической гидродинамики, справедливая при любых температурах. Ее отличие состоит в том, что в ней неаддитивно учитываются квантовые и тепловые флуктуации. Более того, этим уравнениям удается придать форму уравнений двухскоростной гидродинамики, представляющей собой обобщение стохастической механики Нельсона.

В своем исследовании мы опираемся на результаты, полученные нами ранее в работе [2]. В ней была развита теория $(\hbar, k)$-динамики, позволяющая ввести последовательное квантово-тепловое описание состояния теплового равновесия, отличное от стандартной равновесной термодинамики и квантовой статистической механики (КСМ).

В основе $(\hbar, k)$-динамики лежит идея замены классической модели термостата с модулем распределения $\theta_{\rm cl} = k_{\rm B}T$ на адекватную квантовую модель (кванто-термостат, или "теплый" вакуум, представляющий собой совокупность нормальных мод всех частот ω) с модулем распределения $\theta_{\rm qu} = k_{\rm B}\mathbb{T}$. Здесь величина

$$\mathbb{T} \equiv \frac{\hbar\omega}{2k_{\rm B}} \coth \frac{\hbar\omega}{2k_{\rm B}T} = \varkappa \coth\left(\varkappa\frac{\omega}{T}\right) \qquad (1)$$

называется эффективной температурой и для сокращения записи использовано обозначение

$$\varkappa = \hbar/2k_{\rm B}.$$

Преимущество характеристики $\mathbb{T}$ по сравнению с кельвиновой температурой T состоит в том, что она принципиально не обращается в нуль. Этот факт позволяет с общих позиций рассматривать контакт с окружением при $T \geqslant 0$, что существенно в тех ситуациях, когда одновременно имеют место флуктуации квантового и теплового происхождения. Данная величина принимается в качестве обобщенной "метки" теплового равновесия объекта, находящегося в контакте с кванто-термостатом.

Главное отличие $(\hbar, k)$-динамики от КСМ состоит в том, что в ней в условиях равновесия с кванто-термостатом состояние объекта описывается не матрицей плотности, а комплексной волновой функцией $\psi(q, \omega)$, амплитуда и фаза которой зависят от температуры. В координатном представлении она имеет вид

$$\psi(q,\omega) = \left[2\pi(\Delta q)^2\right]^{-1/4} \exp\left\{-\frac{q^2}{4(\Delta q)^2}(1 - i\alpha)\right\}, \qquad (2)$$

где $(\Delta q)^2$ – дисперсия координаты, α – коэффициент, определющий фазу.

Одновременно в рамках $(\hbar, k)$-динамики нами был также введен новый макропараметр – эффективное воздействие на систему со стороны кванто-термостата как среднее от оператора квантово-теплового воздействия $\mathbb{J} = \overline{\hat{j}}$:

$$\mathbb{J} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\alpha^2 + 1} = \mathbb{J}^0\sqrt{\alpha^2 + 1}. \qquad (3)$$

Здесь $\mathbb{J}^0 = \hbar/2$ – предельное значение $\mathbb{J}$ при кельвиновой температуре $T \to 0$, соответствующее чисто квантовому воздействию. В этом случае фазовый множитель α обращается в нуль, что соответствует частному случаю действительной волновой функции ψ. В общем случае температурная зависимость эффективного действия заключена в подкоренном выражении (3). С учетом $\varkappa = \hbar/2k_{\rm B}$ и значения фазового множителя в формуле (3):

$$\alpha^2 \equiv \sinh^{-2}\left(\varkappa\frac{\omega}{T}\right),$$

эффективное воздействие $\mathbb{J}$ (3) приобретает вид

$$\mathbb{J} = \frac{\hbar}{2}\coth \varkappa\frac{\omega}{T} = \frac{\hbar}{2}\coth\frac{\hbar\omega}{2k_{\rm B}T}. \qquad (4)$$

2. Эффективное воздействие как универсальная характеристика процессов переноса. Коэффициент самодиффузии

Прежде всего отметим, что через величину эффективного воздействия $\mathbb{J}$ в равновесном случае в соответствии с [2] выражаются наиболее важные термодинамические макропараметры – эффективная температура $\mathbb{T}$, эффективная внутренняя энергия $\mathbb{U}$ и эффективная энтропия $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{T} = \frac{\omega}{k_\mathrm{B}}\mathbb{J}; \tag{5}$$

$$\mathbb{U} = \omega\mathbb{J}; \tag{6}$$

$$\mathbb{S} = -k_\mathrm{B}\left(1 + \ln 2\frac{\mathbb{J}}{\hbar}\right).$$

Введя при $T \to 0$ предельные значения $\mathbb{S}$ и $\mathbb{J}$ в виде $\mathbb{S}^0 = k_\mathrm{B}$ и $\mathbb{J}^0 = \dfrac{\hbar}{2}$, что соответствует чисто квантовому воздействию, можно установить связь между эффективным действием и эффективной энтропией:

$$\mathbb{J} = \mathbb{S}^0\left\{1 + \ln\frac{\mathbb{J}}{\mathbb{J}^0}\right\}. \tag{7}$$

В связи с этим за физическое определение универсальной константы $\varkappa$ естественно было бы принять предельное значение отношения двух фундаментальных макроскопических величин – эффективного воздействия $\mathbb{J}$ и эффективной энтропии $\mathbb{S}$

$$\varkappa = \frac{\hbar}{2k_\mathrm{B}} \equiv \lim_{T\to 0}\frac{\mathbb{J}}{\mathbb{S}} = \frac{\mathbb{J}^0}{\mathbb{S}^0}. \tag{8}$$

Однако этим все не исчерпывается. Через эффективное действие $\mathbb{J}$, как было показано в [7], можно выразить и эффективные транспортные коэффициенты, характерные для неравновесной термодинамики. Тем самым, демонстрируется их стохастическая природа. Последнее наглядно видно на примере процесса самодиффузии, имеющего место в среде с неоднородной плотностью после установления равновесия по температуре.

Действительно, еще в теории броуновского движения при достаточно высоких температурах было показано [3], что в этом случае (при $t \gg \tau$) справедливо соотношение неопределенностей вида

$$(\Delta p)\,(\Delta q) = mD_T. \tag{9}$$

Здесь D_T – коэффициент чисто тепловой диффузии, причем для свободной микрочастицы $D_T = k_\mathrm{B}T\tau/m$, где τ – время релаксации, а для броуновского осциллятора $D_T = k_\mathrm{B}T/m\omega$ [4].

Как было показано в [5], соотношение неопределенностей Шредингера “импульс-координата” для квантового осциллятора в состоянии равновесия с теплым вакуумом имеет вид

$$(\Delta p)\,(\Delta q) = \mathbb{J} = \frac{\hbar}{2}\coth\left(\varkappa\frac{\omega}{T}\right). \tag{10}$$

Сопоставляя (9) и (10), этому соотношению придадим вид

$$(\Delta p)\,(\Delta q) = m\mathbb{D}. \tag{11}$$

Тогда величину

$$\mathbb{D} = \frac{\hbar}{2m}\coth\left(\varkappa\frac{\omega}{T}\right) \equiv \frac{\mathbb{J}}{m} \tag{12}$$

естественно назвать эффективным коэффициентом самодиффузии. Отметим, что величину $\hbar/2m$ ранее Нельсон [6] назвал квантовым коэффициентом диффузии $\hbar/2m = D_\mathrm{qu}$, т.е. в ситуации контакта с холодным вакуумом, или, иными словами, в отсутствие теплового воздействия окружения.

Из (12) следует, что коэффициент $\mathbb{D}$ приобретает физический смысл эффективного воздействия, отнесенного к единице массы. Предельные значения $\mathbb{D}$ при высоких и низких кельвиновых температурах соответственно равны

$$\begin{aligned} &\mathbb{D} \to D_T = k_\mathrm{B}T/m\omega; \\ &\text{высокие температуры}\quad k_\mathrm{B}T \gg \hbar\omega/2 \\ &\mathbb{D} \to D_\mathrm{qu} \equiv \frac{\hbar}{2m}; \\ &\text{низкие температуры}\quad k_\mathrm{B}T \ll \hbar\omega/2. \end{aligned} \tag{13}$$

Как было показано в [7], исходя из соотношения (12), через $\mathbb{J}$ можно ввести и все остальные эффективные транспортные коэффициенты, такие как коэффициенты теплопроводности, сдвиговой вязкости и др., имеющие значение для неравновесных процессов. Таким образом, большинство транспортных коэффициентов может быть выражено через эффективный коэффициент самодиффузии $\mathbb{D}$, в принципе измеримый на опыте.

Что касается константы $\varkappa$, то при анализе конкретных экспериментов ее можно выражать через наблюдаемые транспортные коэффициенты соотношениями типа

$$\varkappa = \left(\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{S}/m}\right)_\mathrm{min} = \left(\frac{\eta_\mathrm{ef}}{\mathbb{S}/V}\right)_\mathrm{min} = ..., \tag{14}$$

где $\mathbb{S}/m$ – эффективная энтропия единицы массы, $\mathbb{S}/V$ – эффективная энтропия единицы объема, $\eta_{\rm ef}$ – эффективный коэффициент сдвиговой вязкости.

3. Стандартная квантовая механика в гидродинамической форме

В нерелятивистской полевой форме стандартная квантовая механика (при $T = 0$) может быть получена из обращения в нуль вариации функционала действия [8]:

$$\mathcal{S} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int dq\, \mathcal{L}_0[\psi^*; \psi]. \tag{15}$$

Здесь $\mathcal{L}_0[\psi^*; \psi]$ – плотность лагранжиана для одной бесспиновой частицы при $T = 0$, а $\psi(q,t)$ и $\psi^*(q,t)$ – волновая функция и комплексно сопряженная с ней функция, имеющие смысл независимых нерелятивистских полей. (Мы ограничиваемся одномерным случаем).

Очевидно, что функционал $\mathcal{L}_0[\psi^*; \psi]$ в общем случае следует выбрать в виде

$$\mathcal{L}_0[\psi^*; \psi] = \psi^*(q,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)\psi(q,t) - \\ - \psi^*(q,t)U(q)\psi(q,t), \tag{16}$$

где в круглых скобках справа стоит нерелятивистский предел оператора Клейна–Гордона, а оператор потенциальной энергии $U(q)$ характеризует энергию регулярного воздействия.

Независимое варьирование действия вида (16) по полю ψ^* приводит к условию

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int dq \frac{\delta\mathcal{L}_0[\psi^*; \psi]}{\delta\psi} = \\ = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int dq \left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} - U(q)\psi\right) = 0 \tag{17}$$

ведущему к уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} + U(q)\psi. \tag{18}$$

Соответственно, комплексно сопряженное ему уравнение получается при варьировании действия вида (16) по ψ и отличается от формулы (18) заменой i на $-i$ и ψ на ψ^*. Подчеркнем, что уравнения Шредингера для комплексных волновых функций ψ и ψ^* имеют смысл уравнений Лагранжа–Эйлера, причем в полномасштабной квантовой механике волновые функции всегда комплексны.

Представим теперь волновую функцию в виде

$$\psi(q,t) = \sqrt{\rho(q,t)}\exp\{i\theta(q,t)\}, \tag{19}$$

где $\rho(q,t) = |\psi(q,t)|^2$. Это выражение наряду с комплексно сопряженным ему выражением можно было бы подставить непосредственно в уравнения Шредингера для ψ и ψ^* и получить систему уравнений для функций $\rho(q,t)$ и $\theta(q,t)$, давно известную в литературе под названием квантовой механики в гидродинамической форме [8, 9].

Поскольку мы ставим целью построение модифицированной гидродинамики на основе микроописания, мы предлагаем иной подход к проблеме. Он диктует требование развивать теорию изначально в лагранжевой формулировке. Поэтому начнем его с преобразования плотности лагранжиана $\mathcal{L}_0$ к переменным, наиболее приспособленным к гидродинамическому описанию. В качестве функциональных аргументов плотности лагранжиана вместо комплексных волновых функций ψ и ψ^* выберем две независимые вещественные функции – плотность вероятности ρ и фазу θ. По существу они близки к функциям плотности массы ρ_m и дрейфовой скорости $v \sim \frac{\partial\theta}{\partial q}$, характерным для стандартной гидродинамики.

Для этого в плотности лагранжиана (16) совершим замену аргументов, подставив в нее выражение (19) и соответствующее выражение для ψ^*. После подстановок получим

$$\mathcal{L}_0[\psi; \psi^*] = \mathcal{L}_0[\rho; \theta] = \\ = -\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)^2\rho - \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)^2\frac{1}{\rho} - \\ - U(q)\rho + i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial q} + i\rho\frac{\partial\theta}{\partial q}\right). \tag{20}$$

Здесь член, содержащий $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, можно не учитывать, поскольку в дальнейшем при варьировании действия $\mathcal{S}$ вида (15) и по θ и по ρ он даст нулевой вклад. Последний член в (20) представляет собой полную производную по q, так что из определения $\mathcal{L}_0[\rho; \theta]$ его также можно исключить. Поэтому окончательно в качестве выражения для плотности лагранжиана $\mathcal{L}_0[\rho;\theta]$ примем

$$\mathcal{L}_0[\rho;\theta] = -\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)^2\rho - \\ - \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)^2\frac{1}{\rho} - U(q)\rho. \tag{21}$$

Варьируя последовательно по переменным θ и ρ действие $\mathbb{S}$ вида (15), в котором теперь $\mathcal{L}_0[\rho;\theta]$ имеет вид (21), получим уравнения для вещественных функций $\rho(q,t)$ и $\theta(q,t)$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\rho\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = 0, \tag{22}$$

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)^2 + U(q) - \\ - \frac{\hbar^2}{8m}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)^2 + 2\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)\right] = 0. \tag{23}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями, которые могли бы быть получены для функций ρ и θ непосредственно из уравнений Шредингера. Однако теперь понятно, что они имеют смысл уравнений Лагранжа–Эйлера для действия $\mathbb{S}$ вида (15) в переменных ρ и θ.

Традиционно считается, что уравнение (22) – это уравнение непрерывности для $\rho(q,t)$. В свою очередь, уравнение (23) с учетом того, что величина $\hbar\theta(q,t)$ имеет размерность действия, представляет собой аналог уравнения Гамильтона–Якоби. При этом член в квадратных скобках в формуле (23) иногда трактуют как некую дополнительную энергию квантовой природы $U_{\mathrm{qu}}(q)$, исчезающую в квазиклассическом пределе при $\hbar \to 0$.

Разумеется, уравнения (22) и (23) для ρ и θ и уравнения Шредингера для ψ и ψ^* формально эквивалентны. Однако вывод уравнений квантовой механики в гидродинамической форме (22) и (23) непосредственно из принципа наименьшего действия является физически более предпочтительным для построения стохастической гидродинамики. Вместе с тем, для получения искомого результата остается открытым вопрос о форме плотности лагранжиана, в которой, по нашему мнению, должно быть последовательно учтено стохастическое воздействие окружения (кванто-термостата).

4. Квантовая самодиффузия в “холодном” вакууме

Чтобы выявить возможности для нужного нам обобщения $\mathcal{L}_0[\rho;\theta]$, рассмотрим сначала ситуацию холодного вакуума. Для этого придадим физический смысл второму и третьему членам справа в выражении (21). В соответствии с терминологией, введенной еще Колмогоровым [10] для марковских процессов в общей теории стохастических процессов и использованной Нельсоном [6] в его стохастической механике, величину

$$v \equiv \frac{\hbar}{m}\,\frac{\partial\theta}{\partial q} \tag{24}$$

будем называть дрейфовой скоростью. Соответственно, величину

$$u \equiv -D_{\mathrm{qu}}\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial q} = -\frac{\hbar}{2m}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial q} \tag{25}$$

назовем диффузионной скоростью в холодном вакууме и подчеркнем ее стохастическую квантовую природу.

При использовании скоростей v и u формулам (21)–(23) можно придать вид

$$\mathcal{L}_0[\rho,\theta] = -\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}\rho - \frac{m}{2}(v^2+u^2)\rho - U\rho, \tag{21a}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho v) = 0, \tag{22a}$$

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{m}{2}v^2 + U - \frac{m}{2}\left[u^2 - \frac{\hbar}{m}\frac{\partial u}{\partial q}\right] = 0, \tag{23a}$$

открывающий возможности для обобщения.

Из формулы (22а) следует, что стандартное уравнение непрерывности (22) носит квазиклассический характер, ибо в нем плотность потока вероятности зависит только от дрейфовой скорости v, в то время как диффузионная скорость u, порождаемая стохастическим воздействием холодного вакуума, в нем не учитывается.

Напомним в связи с этим, что уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho V) = 0, \tag{26}$$

в которое входит полная скорость плотности потока вероятности

$$V = v + u, \tag{27}$$

представляет собой, согласно Колмогорову [10], наиболее общее уравнение непрерывности. Мы покажем, что оно позволяет описать приближение к состоянию теплового равновесия за счет самодиффузии, в том числе и в холодном вакууме.

Обращаем внимание, что входящая в выражение (21a) для $\mathcal{L}_0[\rho,\theta]$ комбинация $\frac{m}{2}(v^2+u^2)$ представляет собой сумму независимых вкладов кинетических энергий дрейфового и диффузионного движений. В то же время поток вероятности зависит от полной скорости вида (27). В связи с этим для получения уравнения Фоккера–Планка в выражении (21a) напрашивается естественная замена (v^2+u^2) на V^2, что позволит принять во внимание полное выражение для кинетической энергии, связанной с потоком вероятности. Таким образом, даже стандартная квантовая механика (при $T=0$) допускает возможность обобщения.

Итак, обобщим плотность лагранжиана $\mathcal{L}_0[\rho,\theta]$ вида (21a), произведя соответствующую замену. Тогда получим

$$\tilde{\mathcal{L}}_0[\rho,\theta] = -\hbar\,\frac{\partial\theta}{\partial t}\,\rho - \frac{m}{2}V^2\rho - U\rho =$$
$$= \mathcal{L}_0[\rho;\theta] - mvu\rho = \mathcal{L}_0[\rho;\theta] + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\theta}{\partial q}\frac{\partial\rho}{\partial q}. \qquad (28)$$

Варьирование по θ функционала действия $\mathcal{S}$ вида (15) с $\tilde{\mathcal{L}}_0[\rho,\theta]$ автоматически приводит к уравнению Фоккера–Планка, с квантовым коэффициентом диффузии $D_{\rm qu}$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho V) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\rho\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) - D_{\rm qu}\frac{\partial^2\rho}{\partial q^2} = 0. \qquad (29)$$

В то же время варьирование S по ρ практически не меняет уравнения Гамильтона–Якоби, в котором по сравнению с (23a) появляется еще одно несущественное слагаемое $\frac{\hbar}{2}\,\frac{\partial v}{\partial q}$. В итоге аналог формулы (23a) имеет вид

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{m}{2}v^2 + U - \frac{m}{2}\left(u^2 - \frac{\hbar}{m}\frac{\partial u}{\partial q}\right) + \frac{\hbar}{2}\frac{\partial v}{\partial q} = 0. \quad (30)$$

Полученные уравнения (29) и (30) обобщают уравнения (22a) и (23a), позволяя последовательно учесть квантовое стохастическое воздействие холодного вакуума.

5. Самодиффузия в кванто-термостате при $T \neq 0$

Применим теперь развитый выше подход к описанию самодиффузии при совместном учете квантовых и тепловых эффектов. С этой целью введем плотность лагранжиана $\tilde{\mathcal{L}}_T[\rho,\theta]$, зависящую от температуры, потребовав, чтобы при $T\to 0$ она переходила бы в выражение $\tilde{\mathcal{L}}_0[\rho,\theta]$ вида (28). Для этого достаточно в выражении (28) для диффузионной скорости заменить коэффициент диффузии $D_{\rm qu}$ на $\mathbb{D}$ вида (8) и ввести в выражение для плотности лагранжиана дополнительный член $U_T(q)\rho$, учитывающий плотность энергии диффузионного давления за счет теплового стохастического воздействия окружения.

По нашим соображениям, выражение для U_T должно иметь вид, аналогичный множителю $-mu^2/2$ в холодном вакууме (21a). Однако оно должно быть модифицировано таким образом, чтобы $U_T\to 0$ при $T\to 0$. Мы вводим его следующим образом:

$$U_T(q) = -\frac{m}{2}\left[\frac{\alpha}{\Upsilon}\right]^2 u_{\rm ef}^2 = -\frac{\hbar^2}{8m}\,\alpha^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)^2, \qquad (31)$$

где использованы обозначения

$$\alpha^2 \equiv \sinh^{-2}\varkappa\frac{\omega}{T}, \quad \Upsilon = \coth\left(\varkappa\frac{\omega}{T}\right),$$

а также

$$u_{\rm ef} \equiv -\mathbb{D}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}$$

– эффективная диффузионная скорость в теплом вакууме. Эта величина определяется аналогично скорости u в (25), но выражется теперь через эффективный коэффициент диффузии $\mathbb{D}$ вида (12).

Таким образом, в качестве плотности лагранжиана при $T\neq 0$ выберем выражение

$$\tilde{\mathcal{L}}_T(\rho,\theta) = -\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}\,\rho - \frac{m}{2}(v+u_{\rm ef})^2\rho - U\rho - U_T\rho. \quad (32)$$

Для удобства дальнейшего варьирования перепишем выражение (32) в явном виде через случайные функции θ и ρ:

$$\tilde{\mathcal{L}}_T(\rho,\theta) = -\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}\rho -$$
$$-\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)^2\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\Upsilon\frac{\partial\theta}{\partial q}\frac{\partial\rho}{\partial q} + \frac{\hbar^2}{8m}\Upsilon^2\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)^2\right\} -$$

$$-U\rho - \frac{\hbar^2}{8m}\alpha^2\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)^2. \qquad (33)$$

Варьирование действия $\mathcal{S}$ с $\widetilde{\mathcal{L}}_T$ вида (33) по θ вновь приводит к уравнению Фоккера–Планка, аналогичному (29), но с заменой в нем $D_{\rm qu}$ на эффективный коэффициент диффузии $\mathbb{D}_{\rm ef}$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\rho\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) - \mathbb{D}\frac{\partial^2\rho}{\partial q^2} = 0. \qquad (34)$$

Соответственно, варьирование $\mathcal{S}$ по ρ приводит к уравнению Гамильтона–Якоби, обобщенному на случай стохастического воздействия теплого вакуума:

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\Upsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} + U(q) -$$
$$- \frac{\hbar^2}{8m}\Xi_T\left[\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)^2 + 2\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)\right] = 0, \qquad (35)$$

где для удобства введены обозначения

$$\Xi_T = 2\Upsilon^2 - 1 = 2\coth^2\left(\varkappa\frac{\omega}{T}\right) - 1;$$

при этом

$$\Xi_T\Big|_{T=0} \equiv \Xi_0 = 1. \qquad (36)$$

Полученные уравнения (34) и (35) обобщают, в свою очередь, уравнения (29) и (30), позволяя последовательно учесть стохастическое воздействие теплого вакуума. Оно косвенно представлено в величинах $\mathbb{D}$, Ξ_T и Υ, входящих в эти уравнения и зависящих от мировых постоянных $\hbar$ и $k_{\rm B}$. Физически это означает, что одновременно принимаются во внимание оба типа стохастического воздействия окружения: квантовое, характеризуемое постоянной Планка $\hbar$, и тепловое, характеризуемое постоянной Больцмана $k_{\rm B}$.

Совокупность уравнений Фоккера–Планка (34) и Гамильтона–Якоби (35), разумеется, является нетривиальным обобщением уравнения Шредингера. Их дальнейшее использование возможно двумя путями. Можно непосредственно решать эту систему для неизвестных разнородных функций ρ и θ. Как нами было недавно показано [12], это позволяет получить неравновесные волновые функции, амплитуды и фазы которых зависят от температуры, и с их помощью вычислять макропараметры в неравновесных состояниях.

Но эти уравнения также можно модифицировать, придав им форму уравнений двухскоростной стохастической гидродинамики для характерных скоростей v и u.

6. Одномерная модель двухскоростной стохастической гидродинамики

Для модификации уравнений (34) и (35) придадим им форму уравнений для однородных переменных – скоростей v и $u_{\rm ef}$, характерных для любых марковских процессов. В этом случае получим систему уравнений двухскоростной стохастической гидродинамики, обобщающую уравнения стохастической механики Нельсона на случай квантово-теплового воздействия окружения.

Покажем теперь, что уравнения (34) и (35) действительно позволяют получить уравнения стохастической гидродинамики в наиболее удобной форме. С учетом изложенного выше, пока речь идет только об одномерной модели. Чтобы осуществить соответствующее преобразование, прежде всего, придадим уравнению непрерывности (34) форму уравнения для диффузионной скорости, которую, согласно (25), можно записать в виде

$$u_{\rm ef} = -\mathbb{D}\frac{\partial\ln\rho}{\partial q}.$$

С этой целью преобразуем сначала уравнение (34), введя в него явно v и $u_{\rm ef}$, а затем домножим его на $(-\mathbb{D}/\rho)$:

$$-\frac{\mathbb{D}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\mathbb{D}}{\rho}\left[\rho\frac{\partial(v+u_{\rm ef})}{\partial q} + \frac{\partial\rho}{\partial q}(v+u_{\rm ef})\right] = 0. \qquad (37)$$

Далее продифференцируем результат по q, изменим порядок дифференцирования в первом члене, учтем, что $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial\rho}\ln\rho$, и введем всюду $u_{\rm ef}$. В результате получим

$$\frac{\partial u_{\rm ef}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(vu_{\rm ef}) + \frac{\partial}{\partial q}u_{\rm ef}^2 - \mathbb{D}\frac{\partial^2}{\partial q^2}(v+u_{\rm ef}) = 0. \qquad (38)$$

Ему можно придать наиболее элегантный вид, образовав типичную для гидродинамики субстанциональную производную от диффузионной скорости $u_{\rm ef}$:

$$\frac{du_{\rm ef}}{dt} \equiv \frac{\partial u_{\rm ef}}{\partial t} + u_{\rm ef}\frac{\partial u_{\rm ef}}{\partial q} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial q}(vu_{\rm ef}) - \frac{\partial}{\partial q}\frac{u_{\rm ef}^2}{2} + \mathbb{D}_{\rm ef}\frac{\partial^2}{\partial q^2}(v+u_{\rm ef}). \qquad (39)$$

Чтобы придать явную гидродинамическую форму уравнению (35), перепишем его также в переменных v и $u_{\rm ef}$:

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{m}{2}v^2+\frac{\hbar}{2}\Upsilon\frac{\partial v}{\partial q}+U(q)-\\ -\frac{m}{2}\Xi_T\left(u_{\rm ef}^2-\frac{\hbar}{m}\frac{\partial u_{\rm ef}}{\partial q}\right)=0. \tag{40}$$

Для исключения функции θ продифференцируем уравнение (40) по q, изменим в первом члене порядок дифференцирования и введем в нем явно функцию v согласно (24). В итоге, образовав в нем также субстанциональную производную от дрейфовой скорости v, получим:

$$\frac{dv}{dt}\equiv\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial q}\right)=-\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial q}+\\ +\Xi_T\frac{\partial}{\partial q}\frac{u_{\rm ef}^2}{2}-\frac{\hbar}{2m}\left(\Xi_T\frac{\partial^2 u_{\rm ef}}{\partial q^2}+\Upsilon\frac{\partial v^2}{\partial q^2}\right). \tag{41}$$

Напомним, что в качестве скорости v в эти уравнения входит только величина Δv, порождаемая стохастическим воздействием. В рассматриваемом нами случае, как и при $T=0$, выражения для ρ и θ относятся к волновым функциям тепловых коррелированнокогерентных состояний, в которых показатель экспоненты зависит от q^2 [2, 13]. Отсюда следует, что последние члены в уравнениях (39), (41) и (42), содержащие вторые производные от $v\equiv\Delta v$ и $u_{\rm ef}$ по q, обращаются в нуль.

В результате система уравнений для одномерной модели двухскоростной стохастической гидродинамики в общем случае принимает вид

$$\begin{cases}\dfrac{du_{\rm ef}}{dt}\equiv\dfrac{\partial u_{\rm ef}}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial q}\dfrac{u_{\rm ef}^2}{2}=-\dfrac{\partial}{\partial q}(vu_{\rm ef})-\dfrac{\partial}{\partial q}\dfrac{u_{\rm ef}^2}{2};\\ \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial q}+\Xi_T\dfrac{\partial}{\partial q}\dfrac{u_{\rm ef}^2}{2}.\end{cases} \tag{42}$$

Отметим, что общем случае предложенные нами уравнения (42) справедливы при любой температуре.

В обоих уравнениях данной системы учитывается самодиффузия в теплом вакууме, характеризуемая коэффициентом $D_{\rm ef}$, входящим в $u_{\rm ef}$. Кроме того, в правую часть нижнего уравнения системы, помимо градиента классического потенциала $U(q)$, входит градиент плотности энергии диффузионного давления, отражающий стохастическое воздействие кванто-термостата, в том числе и при $T=0$. Аналогичный вклад энергии диффузионного давления кванто-термостата входит и в правую часть верхнего уравнения (42), причем он не исчезает даже при $v=0$.

Для сопоставления с уравнениями стохастической механики Нельсона:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial}{\partial q}(vu);\\ \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial q}+\dfrac{\partial}{\partial q}\dfrac{u^2}{2},\end{cases} \tag{43}$$

которые справедливы при $T=0$, рассмотрим систему уравнений (42) в случае холодного вакуума ($T=0$).

В этом случае $u_{\rm ef}$ переходит в u. Кроме того, для удобства сравнения в верхнем уравнении этой системы мы возвращаемся к частной производной по времени, для чего в формуле (42) мы объединяем подобные члены. В результате имеем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial}{\partial q}(vu)-\dfrac{\partial}{\partial q}u^2;\\ \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial U}{\partial q}+\dfrac{\partial}{\partial q}\dfrac{u^2}{2}.\end{cases} \tag{44}$$

Как видно, нижние уравнения систем (43) и (44) полностью идентичны. Однако между данными системами уравнений в целом имеется существенное отличие, заметное при сопоставлении верхних уравнений. Как и ожидалось, оно связано с тем, что в нашей теории принимается во внимание самодиффузия, имеющая место даже в холодном вакууме. Вследствие этого в уравнение для диффузионной скорости входит градиент плотности энергии диффузионного давления.

Ниже будет проведено сопоставление решений систем уравнений (43) и (44) в целях установления важных физических различий ними, имеющих место при $T=0$. Фактически, представляет интерес выяснить, как влияет учет самодиффузии в холодном вакууме ($T=0$) в уравнениях (44) на вид получаемых решений по сравнению с решениями системы (43).

7. Исследование решений уравнений (43) и (44)

Отметим, что как было показано в п. 6, система (42) получена с учетом самодиффузии при произвольных температурах, в то время как (44) справедлива только при $T = 0$. Поэтому корректному сопоставлению можно подвергнуть лишь системы уравнений (43), представляющей собой частный случай (42) для $T = 0$, и (44).

7.1. Аппарат для определения класса уравнений

Отметим, что полная производная

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = v\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{45}$$

и перепишем уравнения (43) и (44) полностью в частных производных, обозначив для удобства $\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial q} = \alpha(q)$. Тогда системы уравнений (43) и (44) примут вид соответственно

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial q} + u\frac{\partial v}{\partial q} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial q} - u\frac{\partial u}{\partial q} = \alpha(q), \end{aligned} \tag{46}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + (v + 2u)\frac{\partial u}{\partial q} + u\frac{\partial v}{\partial q} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial q} - u\frac{\partial u}{\partial q} = \alpha(q), \end{aligned} \tag{47}$$

где u – диффузионная скорость, v – дрейфовая скорость. Отметим, что основное отличие системы (46) от системы (47) состоит в том, что при выводе последней использовалось предположение о самодиффузии.

В данной работе мы остановимся только на исследовании однородных системы (46) и (47) и положим $\alpha(q) = 0$. Важнейшим обстоятельством, определяющим решение данных уравнений, является установление типа – эллиптического, гиперболического или параболического, к которому относится уравнение. Для решения гиперболических уравнений, как известно, используется понятие характеристики – интеграла некоторого характеристического уравнения. Эллиптический оператор не имеет характеристик в вещественной области и эллиптическим дифференциальным уравнениям в физике, вообще говоря, соответствуют стационарные равновесные состояния. Таким образом, установление класса, к которому относится соответствующая система, позволяет сделать заключение о характере решений уравнения и сопоставить им определенную физическую интерпретацию.

Исходя из изложенного выше, приступим к исследованию. Уравнения (46) и (47) представляют собой системы квазилинейных уравнений первого порядка в частных производных относительно двух неизвестных функций $u(t, q)$ и $v(t, q)$. Поэтому, следуя [14], представим каждое из уравнений в системах (46) и (47) в виде

$$\begin{aligned} L_1 &= A_1u_t + B_1u_q + C_1v_t + D_1v_q, \\ L_2 &= A_2u_t + B_2u_q + C_2v_t + D_2v_q, \end{aligned} \tag{48}$$

где $A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i$ – известные функции переменных $t, q, u, v,\ i = 1, 2$. Положим, что все рассматриваемые функции непрерывны и имеют непрерывные производные необходимого порядка. Известно, что линейная комбинация $af_x + bf_y$ частных производных функции двух переменных $f(x, y)$ есть производная в данном направлении, заданном отношением $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$. Если $x(l),\ y(l)$ представляют кривую с $\frac{x_l}{y_l} = \frac{a}{b}$, то $af_x + bf_y$ есть производная функции f вдоль этой кривой. Данное обстоятельство позволяет нам элегантно перейти от систем (46) и (47) в частных производных к исследованию алгебраических уравнений.

Рассмотрим такие функции $u(t, x),\ v(t, x)$, для которых коэффициенты в дифференциальных уравнениях (48) зависят только от t и x. Найдем такую линейную комбинацию

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2, \tag{49}$$

чтобы в дифференциальном выражении L были производные только по одному направлению. Такое направление, зависящее как от точки (t, x), так и от значений функций $u(t, x)$ и $v(t, x)$ в этой точке, называется характеристическим. Пусть это направление задается отношением $t_l : x_l$. Тогда, как отмечено выше, условие того, что в дифференциальном выражении L функции $u(t, x),\ v(t, x)$ дифференцируются в этом же направлении, выглядит следующим образом

$$\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2} = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2} = \frac{t_l}{x_l}, \tag{50}$$

так как коэффициенты при производных $u_t,\ u_x$ и $v_t,\ v_x$ в выражении L определяются соответствующими членами в пропорциях (50). Умножив выражение (49) на t_l получим

$$Lt_l = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)u_t t_l + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)u_q t_l +$$
$$+ (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)v_t t_l + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2)v_q t_l =$$
$$= (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(u_l - u_q q_l) + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)u_q t_l +$$
$$+ (\lambda_1 C_1 + \lambda_1 C_2)(v_l - v_q q_l) + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2)v_q t_l =$$
$$= (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)u_l + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)v_l -$$
$$- [(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)q_l - (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)t_l]u_q -$$
$$- [(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)q_l - (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2)t_l]v_q =$$
$$= (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)u_l + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)v_l, \qquad (51)$$

так как в силу (48)

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)q_l - (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)t_l =$$
$$= (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)q_l - (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2)t_l = 0. \qquad (52)$$

Аналогично при умножении L на q_l получим

$$Lq_l = (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)u_l + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2)v_l. \qquad (53)$$

Если функции $u(t, q)$, $v(t, q)$ являются решениями системы (48) и выражение L имеет производную в направлении l, заданном отношением $t_l : q_l$, то из (50) легко получить систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно λ_1 и λ_2

$$\begin{aligned} &\lambda_1(A_1 q_l - B_1 t_l) + \lambda_2(A_2 q_l - B_2 t_l) = 0,\\ &\lambda_1(C_1 q_l - D_1 t_l) + \lambda_2(C_2 q_l - D_2 t_l) = 0. \end{aligned} \qquad (54)$$

Система (54) имеет нетривиальное решение, если она имеет определитель, равный нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} A_1 q_l - B_1 t_l & A_2 q_l - B_2 t_l \\ C_1 q_l - D_1 t_l & C_2 q_l - D_2 t_l \end{vmatrix} = 0, \qquad (55)$$

что удобно записать в виде квадратичной формы

$$a t_l^2 - 2b t_l q_l + c q_l^2 = 0, \qquad (56)$$

где

$$a = [BD],\ 2b = [AD] + [BC],$$
$$c = [AC],\ [XY] = X_1 Y_2 - X_2 Y_1.$$

В зависимости от знака детерминанта формы (56) можно классифицировать уранения следующим образом:

1. Если $b^2 - ac < 0$, то квадратичная форма (56) не равна нулю ни при каких вещественных t_l, q_l и, следовательно, не существует никакого действительного характеристического направления, и система дифференциальных уравнений является эллиптической.
2. Если $b^2 - ac > 0$, то в каждой точке имеются два характеристических направления, заданных отношением $t_l : q_l$, которые соответствуют двум различным корням λ_1 и λ_2 квадратичной формы (56). В этом случае система дифференциальных уравнений является гиперболической.
3. В том случае, когда $b^2 - ac = 0$, выражение (56) имеет один корень кратности два и имеет место одно вырожденное направление, соответствующее этому корню, и система дифференциальных уравнений является параболической.

7.2. Исследование уравнений (46) и (47)

Исходя из изложенного, проанализируем класс системы уравнений Нельсона (46). Для данной системы значения коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned} &A_1 = 1,\ B_1 = v,\ C_1 = 0,\ D_1 = u,\\ &A_2 = 0,\ B_2 = -u,\ C_2 = 1,\ D_2 = v, \end{aligned} \qquad (57)$$

откуда следует, что

$$b^2 - ac = -u^2 < 0.$$

Таким образом, гидродинамическая система уравнений Нельсона является эллиптической и непригодна для исследования эволюции флуктуаций при квантово-механическом описании системы.

Для системы (47) коэффициенты имеют несколько иной вид:

$$\begin{aligned} &A_1 = 1,\ B_1 = 2u + v,\ C_1 = 0,\ D_1 = u,\\ &A_2 = 0,\ B_2 = -u,\ C_2 = 1,\ D_2 = v, \end{aligned} \qquad (58)$$

что приводит к

$$b^2 - ac = 0.$$

Последнее свидетельствует о том, что система уравнений (47) является параболической, т.е. системой эволюционного типа и может, следовательно, использоваться для описания эволюции возмущений, возникающих при флуктуациях.

Найдем характеристическое направление для системы (47). Согласно изложенному выше, образуем линейную комбинацию из двух уравнений этой системы и потребуем, чтобы она содержала производные только в одном направлении u_l, v_l от функций $u(q,t)$ и $v(q,t)$, заданном посредством (t_l, q_l):

$$L = u_t + (2u + v - \lambda u)u_q + \lambda v_t(u + \lambda v)v_q = 0. \quad (59)$$

Тогда согласно (50), условия, определяющие направление (t_l, q_l), выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} q_l &= (2u + v - \lambda u)t_l, \\ \lambda q_l &= (u + \lambda v)t_l, \end{aligned} \quad (60)$$

откуда

$$(\lambda - 1)^2 = 0. \quad (61)$$

Следовательно, в задаче (47) существует одно характеристическое направление, определяемое условием

$$q_l = (u + v)t_l. \quad (62)$$

Из (60) – (62) получаем характеристическое уравнение для u и v

$$u_l + v_l = 0. \quad (63)$$

Смысл уравнения (62) заключается в том, что характеристика в плоскости (q,t) представляет движение возможных возмущений, скорость которых

$$\frac{dq}{dt} = u + v \quad (64)$$

складывается из дрейфовой и диффузионной скорости.

В контексте использования данной системы имеется в виду следующее обстоятельство. Флуктуации макропараметров, например, температуры, плотности, давления, непременно вызывают возмущения переменных u и v в уравнениях гидродинамики. Эволюцию этих возмущений можно описывать и исследовать с помощью системы уравнений (47).

7.3. Численное моделирование решений уравнений (46) и (47)

Приведенные соображения нами проиллюстрированы с помощью численного моделирования решений систем (46) и (47). Модельным уравнением для этих систем является записанное в векторной форме уравнение переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(y)\frac{\partial y}{\partial q} = f, \quad (65)$$

где $y = (u,v)^{\mathrm{T}}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ – матрица системы, $f \in \mathbb{R}^2$. Для систем (46) и (47) рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} &y(q,0) = y_0(q), \\ &q \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

на вещественной прямой. Для решения задачи на плоскости (q,t) использовалась сетка

$$\begin{aligned} &\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau, \\ &\omega_h = \{q_k = kh,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}, \\ &\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, 2, ...\} \end{aligned}$$

с шагом h по q и с шагом τ по t. Решение задачи исследовалось с помощью неявной трехслойной схемы

$$\frac{3y_k^{n+1} - 4y_k^n + y_k^{n-1}}{2\tau} = A(y)\frac{y_{k+1}^{n+1} - y_{k-1}^{n+1}}{2h} + \varphi, \quad (66)$$

имеющей порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. Задача (65) решалась итерационным методом. Покажем, что схема (66) абсолютно устойчива. Для однородного скалярного уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a(y)\frac{\partial y}{\partial q} = 0,$$

ищем решение задачи (66) в виде

$$y_k^n = \eta^n e^{ikh\theta}, \quad (67)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Подставляя (67) в уравнение

$$\frac{3y_k^{n+1} - 4y_k^n + y_k^{n-1}}{2\tau} = a(y)\frac{y_{k+1}^{n+1} - y_{k-1}^{n+1}}{2h},$$

получаем после несложных преобразований уравнение относительно η

$$\mu\eta^2 - 4\eta + 1 = 0, \quad (68)$$

где $\mu = 3 + 2a\gamma i \sin\theta,\ \gamma = \dfrac{\tau}{h}$.

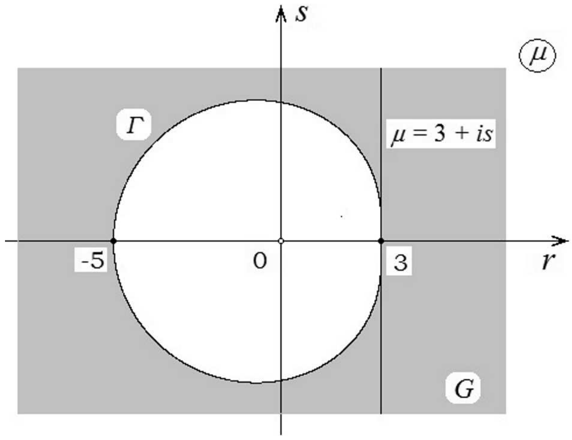

Рис. 1. Граница устойчивости схемы (66)

Найдем множество точек G комплексной плоскости $\mu = r + is$, для которых корни уравнения (68) не превосходят по модулю единицу. Границей области G является множество таких точек μ, для которых $|\eta| < 1$. Выразим из уравнения (68) параметр μ через переменную η:

$$\mu = \frac{4}{\eta} - \frac{1}{\eta^2}.$$

Очевидно, что если $|\eta| = 1$, то положив $\eta = e^{-i\varphi}$, получим

$$\mu = 4e^{i\varphi} - e^{2i\varphi}.$$

При изменении аргумента φ от 0 до 2π точки μ описывают замкнутую кривую Γ, уравнение которой на плоскости $\mu = r + is$ удобно представить в параметрическом виде

$$\begin{aligned} r &= 4\cos\varphi - \cos 2\varphi, \\ s &= 4\sin\varphi - \sin 2\varphi. \end{aligned} \tag{69}$$

Из (69) видно, что кривая Γ симметрична относительно вещественной оси r. Она пересекает ось r в точках $\mu(0) = 3$, $\mu(\pi) = -5$. В этих точках производные

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\varphi}{2\sin\varphi - \sin 2\varphi}, \quad \frac{d^2 s}{dr^2} = \frac{6\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)^3}$$

не определены. Причем вторая производная кривой Γ отрицательна при $0 < \varphi < \pi$ и положительна при $\pi < \varphi < 2\pi$. Это свидетельствует о том, что замкнутая кривая Γ выпукла вверх в верхней полуплоскости μ и выпукла вниз в нижней полуплоскости. Следовательно, область, заключенная внутри замкнутой кривой Γ, является выпуклой. При этом прямая $\mu = 3 + is$ касается кривой Γ в точке $\mu = 3$. Остальные точки этой прямой лежат в области, расположенной снаружи этой кривой Γ. Покажем, что в этой области выполняется условие $|\eta| < 1$ и множество точек, лежащих снаружи кривой Γ является областью устойчивости схемы (66).

Действительно, рассмотрим решение уравнения

$$(3 + is)\eta^2 - 4\eta + 1 = 0,$$

при $0 < s < 1$. Тогда один из корней

$$\eta = \frac{2 + \sqrt{1 - is}}{3 + is},$$

соответствующий максимальному значению модуля $|\eta|$, можно записать в виде

$$\eta = \frac{\left(3 - \frac{is}{2}\right)(3 - is)}{9 + s^2} + O(s).$$

Модуль этого значения

$$|\eta| = \frac{\sqrt{81 + \dfrac{45s^2 + s^4}{4}}}{9 + s^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{27s^2 + s^4}{4(9 + s^2)}} = 1 - O(s^2) < 1.$$

Таким образом, множество точек $\mu = 3 + 2a\gamma i \times \sin\theta$ полностью лежит в области устойчивости, где $|\eta| \leq 1$. Следовательно схема (66) является абсолютно устойчивой и не зависит от величины $\gamma = \frac{\tau}{h}$. Вид области устойчивости G показан на рис. 1.

При численном моделировании исследовалось решение при некотором возмущении, задаваемом в начальном условии в окрестности точки $q = 0$, одной из переменных исходного однородного начального условия. Это возмущение в начальном условии моделирует результат флуктуации макропараметра физической системы. Вычисления, выполненные численно по предложенной неявной схеме, показали следующий результат. Любое, даже сколь угодно малое возмущение в системе уравнений Нельсона приводит к неограниченному росту переменных u и v. Это есть следствие того, что уравнения Нельсона имеют эллиптический тип и предназначены для описания стационарных процессов, таких как обтекание тел потоком, задач электростатики, стационарных задач теории гравитации и др.

При решении системы уравнений (47) получено решение вида бегущей волны возмущения по пространственной координате. При этом наряду с перемещением возмущения наблюдается эволюция самого возмущения. На рисунке показаны численные решения системы (47) для различных моментов времени: *а* – $t = 0$, *б* – $t = \tau$, *в* – $t = 20\tau$, *г* – $t = 50\tau$, где τ – шаг интегрирования по времени.

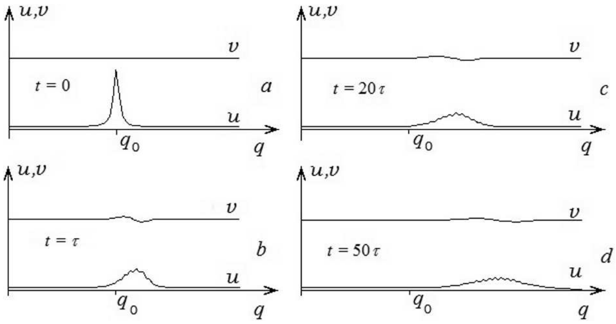

Рис. 2. Результаты численного исследования системы (47)

8. Заключение и обсуждение результатов

Впервые идея использования в квантовой теории плотности лагранжиана $\mathcal{L}[\rho;\theta]$ была, повидимому, высказана Феньешем [11]. Из предложенного им выражения следовало уравнение Фоккера–Планка, содержащее полную скорость потока вероятности V с коэффициентом диффузии либо $D_{\rm qu}$, либо D_T. Однако обобщенный коэффициент диффузии $D_{\rm ef}$ им не вводился. Заметим, что в этой работе было получено иное равнение движения типа Гамильтона–Якоби. Более того, в этой работе утверждалось, что полученная система уравнений для функций ρ θ полностью эквивалентна уравнениям Шредингера для функций ψ и ψ^*, несмотря на то, что уравнение Фоккера–Планка в отличие от уравнения Шредингера приводит к необратимости.

В нашем подходе в отличие от [11] были последовательно учтены квантово-тепловые флуктуации и плотность энергии диффузионного давления, связанные со стохастическим воздействием окружения (кванто-термостата) при $T \geqslant 0$. В конечном итоге уравнениям Фоккера–Планка и Гамильтона–Якоби нами была придана форма системы уравнений (42) для одномерной модели двускоростной стохастической гидродинамики. В них коэффициент самодиффузии определяется эффективным воздействием окружения, зависящим от фундаментальной константы $\varkappa = \frac{\hbar}{2k_{\rm B}}$.

По нашему мнению, на этом пути в дальнейшем можно построить полномасштабную стохастическую гидродинамику с учетом не только самодиффузии как таковой, но и сдвиговой вязкости, и затем применить ее к описанию таких интересных сред, как nearly perfect fluids (NPF). Для этого, фактически, нужно перейти от нижнего уравнения из (42) для дрейфовой скорости к уравнению, представляющему собой обобщение уравнения Навье–Стокса на случай учета самодиффузии.

Из проведенного анализа следует, что эффективный коэффициент самодиффузии $\mathbb{D}_{\rm ef} = \mathbb{J}/m$, по-видимому, является наиболее адекватной характеристикой явлений переноса, существенной для описания диссипативных процессов в NPF. Сегодня появилась возможность его экспериментального определения путем изучения диффузии массивных кварков в кварк-глюонной плазме, получаемой при столкновении тяжелых ионов.

Численный анализ поведения решений частного случая системы (42) в виде (44), справедливой при $T = 0$, показал, что данные уравнения иллюстрируют релаксацию возмущений. Таким образом, самодиффузия может рассматриваться как гидродинамический механизм релаксации квантово-тепловых флуктуаций. Исследование поведения решений системы (42) в общем случае предполагается выполнить позже.

Таким образом, мы полагаем, что гидродинамический подход к квантовой теории, предложенный в данной работе, принципиально позволяет исследовать квантово-тепловые флуктуации на основе использования полученных гидродинамических уравнений.

Благодарим Н.Ф. Шульгу, И.М. Мрыглода, А.Г. Загороднего, И.В. Воловича, Н.М. Плакиду и Ю.П. Рыбакова, а также участников руководимых ими научных семинаров в Киеве, Харькове, Самаре и Москве за плодотворное обсуждение изложенных выше результатов.

Считаем своим долгом отметить, что исходный замысел, постановка задачи и ключевые идеи данной работы были предложены нашим соавтором А.Д. Сухановым, светлой памяти которого посвящена данная статья.

1. D. Forster, *Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions* (Perseus, Cambridge, MA, 1990).
2. A.D. Sukhanov and O.N. Golubjeva, Teor. Mat. Fiz. **160**, 369 (2009).
3. R. Fürth, Z. Phys. **81**, 143 (1933).
4. A.D. Sukhanov, Teor. Mat. Fiz. **139**, 129 (2004).
5. A.D. Sukhanov, Teor. Mat. Fiz., **148**, 295 (2006).
6. E. Nelson, *Dynamical Theory of Brownian Motion* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1967).
7. *Thermodynamics*, edited by M. Tadashi (InTech, 2011).
8. R. Feynman, P. Leiton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3: Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1964).
9. D.I. Blokhintsev, *Quantum Mechanics* (Reidel, Dordrecht, 1964).
10. A.N. Kolmogoroff, Math. Ann. **104**, 415 (1931); **108**, 149 (1933).
11. I. Fenyes, Zs. Math. **132**, 81 (1952).
12. O.N. Golubjeva and A.D. Sukhanov, Part. Nucl. Lett. **8**, 1 (2011).
13. O.N. Golubjeva and A.D. Sukhanov, Canad. J. Phys. **92**, 259 (2014).
14. R. Courant and K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Intrscience Publishers, New York, 1948).

Одержано 07.12.14

О.Н. Голубева, С.В. Сідоров, В.Г. Бар'яхтар

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РЕЛАКСАЦІЇ КВАНТОВО-ТЕПЛОВИХ ФЛУКТУАЦІЙ

Р е з ю м е

Пропонується узагальнення рівнянь квантової механіки в гідродинамічній формі шляхом введення в густину лагранжиана членів, що враховують дифузійну швидкість при нульовій і кінцевих температурах, а також енергію дифузійного тиску теплого вакууму. На цій основі для моделі одновимірної гідродинаміки будується система рівнянь, аналогічних рівнянням Ейлера, але з урахуванням квантових і теплових ефектів. Вони являють собою узагальнення рівнянь стохастичної механіки Нельсона. Чисельний аналіз поведінки рішень даної системи дозволяє зробити висновок про її придатність для опису процесу релаксації квантово-теплових флуктуацій.

O.N. Golubjeva, S.V. Sidorov, V.G. Bar'yakhtar

NUMERICAL SIMULATION OF RELAXATION OF QUANTUM THERMAL FLUCTUATIONS

S u m m a r y

A generalization of quantum-mechanical equations expressed in the hydrodynamic form by introducing terms that involve the diffusion velocity at zero and finite temperatures, as well as the diffusion pressure energy in a warm vacuum, into the Lagrangian density has been proposed. It is used as a basis for constructing a system of equations similar to the Euler equations, but making allowance for quantum-mechanical and thermal effects, for the model of one-dimensional hydrodynamics. The equations obtained generalize the equations of the Nelson stochastic mechanics. A numerical analysis of the solutions of this system allowed a conclusion to be drawn about its validity for the description of the relaxation of quantum thermal fluctuations.