Б.Є. ГРИНЮК

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
*(Вул. Метрологічна, 14b, Київ 03143; e-mail: bgrinyuk@bitp.kiev.ua)*

УДК 539

# РІВНЯННЯ ДЛЯ ЧАСТИНОК ЗІ СПІНОМ $S = 0$ І $S = 1$ У СПІНОРНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ

*Рівняння для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$ представлено у формі системи двох рівнянь Дірака із додатковими умовами (в'язями), які накладаються на компоненти хвильових функцій. У випадку тотожних мас (або в границі високих енергій, коли різницею мас можна нехтувати), сформульовано об'єднану систему рівнянь, частинні розв'язки якої співпадають із тими, що випливають з рівнянь для спіну $S = 0$ і $S = 1$, і одночасно є двома рівняннями Дірака для двох незалежних частинок зі спіном $S = 1/2$. Запропоновано принцип побудови рівнянь для частинок із довільним спіном у спінорному представленні.*

*Ключові слова*: рівняння Дірака, рівняння першого порядку відносно похідних для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$.

## 1. Вступ

Рівняння першого порядку відносно похідних для елементарних частинок можуть бути записані в різних формах. В даній роботі ми формулюємо рівняння для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$ у формі системи двох рівнянь Дірака із додатковими умовами (в'язями) на компоненти хвильових функцій. Попередня версія даної роботи опублікована у вигляді препринту [1].

Ми виходимо із загальновідомих рівнянь [2–4] для частинок із нульовим та одиничним спіном і виконуємо тотожні перетворення цих рівнянь для отримання системи рівнянь Дірака. Додаткові умови виникають при цьому без спеціальних припущень.

Наступний розділ ми розпочинаємо з розгляду рівнянь для частинок зі спіном $S = 0$. Потім у розділі 3 ми розглядаємо випадки $S = 0$ і $S = 1$ і формулюємо для цих випадків системи двох рівнянь Дірака з додатковими умовами на компоненти хвильових функцій. В кінці розділу запропоновано принцип побудови рівнянь для довільного спіну у вигляді систем рівнянь Дірака з додатковими умовами (в'язями). В четвертому розділі ми розглядаємо випадок рівних мас частинок зі спінами $S = 0$ і $S = 1$ і формулюємо для них об'єднану систему рівнянь, в рамках якої виникають ступені вільності частинок зі спіном $S = 1/2$. У п'ятому розділі дається короткий підсумок.

*Цитування*: Гринюк Б.Є. Рівняння для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$ у спінорному представленні. *Укр. фіз. журн.* **69**, №11, 895 (2024).



## 2. Попередні перетворення рівнянь Дафіна–Кемера–Петьйо для частинок зі спіном $S = 0$

Нагадаємо, що відомі рівняння Дафіна–Кемера–Петьйо [2–4] першого порядку відносно похідних для частинки зі спіном $S = 0$ можна отримати з рівняння Кляйна–Ґордона–Фока (тут і надалі $\hbar = 1$ і $c = 1$):

$$\left(\Box - m^2\right) \varphi = 0 \tag{1}$$

завдяки введенню нових полів $A_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$,

$$A_\mu \equiv \partial_\mu \varphi. \tag{2}$$

Тоді замість (1) отримаємо рівняння Дафіна–Кемера–Петьйо

$$\begin{cases} \partial_t \varphi = A_0, \\ -\partial_t A_0 = (\nabla \cdot \mathbf{A}) + m^2 \varphi, \\ \mathbf{A} = -\nabla \varphi, \end{cases} \tag{3}$$

для п'ятикомпонентної хвильової функції $(\varphi, A_0, \mathbf{A})$. Систему рівнянь (3) часто записують у матричній формі [2, 3] (зокрема, ми наводимо нижче відповідні співвідношення з [3], де використано інші позначення для просторово-часових індексів: $1, 2, 3, 4$ замість $0, 1, 2, 3$; зокрема, замість $A_4$ тут буде $iA_0$ із (2)),

$$\left(\hat{\beta}^\mu \partial_\mu + m\right) \hat{\Psi} = 0, \qquad (4)$$

де $\hat{\Psi}$ – п'ятикомпонентний стовпчик хвильових функцій

$$\Psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}} A_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad \Psi_5 = \sqrt{m}\, \varphi, \qquad (5)$$

а матриці $\hat{\beta}_\mu$ із (4) мають вигляд [3]:

$$\hat{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta}_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-i \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ i&0&0&0&0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Наведені вище рівняння Дафіна–Кемера–Петьйо (3) містять квадрат маси частинки, що не є природним для диференційних рівнянь першого порядку. Серед компонент хвильової функції є "зайві", оскільки число незалежних (вільних) компонент повинно бути $2\,(2S+1)$ [4], тобто дві компоненти для випадку $S = 0$. Більше того, в границі $m \to 0$ система рівнянь (3) (після диференціювання останнього рівняння відносно часу) розпадається на систему чотирьох замкнених рівнянь

$$\begin{cases} -\partial_t A_0 = (\nabla \cdot \mathbf{A}), \\ \partial_t \mathbf{A} \;=\; -\nabla A_0, \end{cases} \qquad (7)$$

з додатковою умовою

$$[\nabla \times \mathbf{A}] = 0, \qquad (8)$$

яка випливає з останнього рівняння системи (3) завдяки тотожності $[\nabla \times \nabla\varphi] \equiv 0$, а також окреме рівняння $\partial_t \varphi = A_0$, яке виглядає скоріше як визначення додаткового поля $\varphi$.

Отже, в границі $m \to 0$ структура системи рівнянь Дафіна–Кемера–Петьйо суттєво змінюється: п'ятикомпонентне поле стає чотирикомпонентним, і система рівнянь (3) зводиться до системи (7) з додатковою умовою (8). Могло б здатися на перший погляд, що рівняння у формі (4) з масою у першій степені не містить цієї проблеми. Але границя $m \to 0$ для системи (4) навіть менш регулярна. Дійсно, в цій границі система рівнянь (4) зводиться лише до одного рівняння

$$\partial_t \Psi_4 + (\nabla \cdot \mathbf{\Psi}) = 0 \qquad (9)$$

і тривіального результату для $\Psi_5$, а саме $\Psi_5 = \mathrm{Const}$. Одного рівняння (9) не достатньо, щоб знайти розв'язки для всіх компонент $\hat{\Psi}$.

Зараз ми запишемо іншу систему рівнянь, яка має регулярну границю при $m \to 0$. Введемо замість $(A_0, \mathbf{A})$ (2) такі чотири компоненти $(B_0, \mathbf{B})$:

$$\begin{cases} B_0 \equiv (-\partial_t + im)\, \varphi, \\ \mathbf{B} \;\equiv\; -\nabla\varphi, \end{cases} \qquad (10)$$

де $\varphi$ задовольняє рівнянню (1). Тоді отримуємо

$$(\partial_t + im)\, B_0 = -\, (\partial_t + im)\, (\partial_t - im)\, \varphi =$$
$$= -\left(\partial_t^2 + m^2\right) \varphi. \qquad (11)$$

Завдяки основному рівнянню (1), останній вираз дорівнює $-\left(\partial_t^2 + m^2\right) \varphi = -\triangle\varphi$. Враховуючи тотожність $\triangle\varphi \equiv (\nabla \cdot \nabla\varphi)$ і визначення $\mathbf{B}$ із (10), отримуємо замість (11):

$$(\partial_t + im)\, B_0 = (\nabla \cdot \mathbf{B}). \qquad (12)$$

Якщо взяти похідну $\partial_t$ від другої рівності з (10) і використати перше визначення з (10) для того, щоб виключити з розгляду поле $\varphi$, ми отримаємо:

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \partial_t \varphi = \nabla B_0 - im \nabla\varphi =$$
$$= \nabla B_0 + im\mathbf{B}. \qquad (13)$$

Таким чином, отримані рівняння (12) і (13) можуть слугувати замкненою системою рівнянь для $(B_0, \mathbf{B})$:

$$\begin{cases} \partial_t B_0 = (\nabla \cdot \mathbf{B}) - imB_0, \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla B_0 + im\mathbf{B}, \end{cases} \qquad (14)$$

з додатковою умовою

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = 0. \qquad (15)$$

Остання випливає з визначення $\mathbf{B}$ (друга рівність із (10)) і відомої тотожності $[\nabla \times \nabla\varphi] \equiv 0$.


*ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2024. Т. 69, № 11*

Важливо зауважити, що рівняння Кляйна–Ґордона–Фока для $B_0$ безпосередньо випливає із системи рівнянь (14). Але для отримання рівняння Кляйна–Ґордона–Фока для $\mathbf{B}$, необхідно використати додаткову умову (15) разом із системою рівнянь (14). Отже, додаткова умова (15) є невід'ємною частиною отриманої системи рівнянь. Слід відзначити, що маса $m$ входить в (14) у першому степені нарівні з похідними. Границя $m \to 0$ для системи рівнянь тривіальна і не змінює кількості рівнянь чи компонент поля.

Зв'язок рівнянь (14), (15) із рівняннями Дафіна–Кемера–Петьйо (3) стає очевидним, якщо врахувати співвідношення $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$ і $B_0 \equiv -A_0 + im\varphi$.

Запишемо отримані рівняння в матричній формі. Введемо позначення:

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

які дозволять переписати рівняння (14) у вигляді

$$i\partial_t \hat{\Phi} = i\left(\hat{\mathbf{a}} \cdot \nabla\right)\hat{\Phi} + m\hat{b}\hat{\Phi}. \tag{19}$$

Додаткову умову (15) можна переписати у вигляді:

$$\left(\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla\right)\hat{\Phi} = 0, \tag{20}$$

де тривимірний вектор $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ має такі компоненти:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1 &\equiv -i\left(\hat{a}_2\hat{a}_3 - \hat{a}_3\hat{a}_2\right), \\ \hat{\omega}_2 &\equiv -i\left(\hat{a}_3\hat{a}_1 - \hat{a}_1\hat{a}_3\right), \\ \hat{\omega}_3 &\equiv -i\left(\hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_2\hat{a}_1\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Якщо матриці $\hat{a}_k$ мають вигляд (17), то для матриць $\hat{\omega}_k$ отримаємо

$$\hat{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-i \\ 0&0&i&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&i \\ 0&0&0&0 \\ 0&-i&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&-i&0 \\ 0&i&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Матриці (17) можна замінити на невироджені. Для цього можна додати вираз із лівої частини (20) (яка рівна нулю), домножений на $i$, до правої частини рівняння (19). Тоді замість (19) отримаємо еквівалентне рівняння

$$i\partial_t \hat{\Phi} = i\left(\hat{\hat{\mathbf{a}}} \cdot \nabla\right)\hat{\Phi} + m\hat{b}\hat{\Phi}, \tag{23}$$

де

$$\hat{\hat{\mathbf{a}}} \equiv \hat{\mathbf{a}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}. \tag{24}$$

Явний вигляд матриць $\hat{\hat{a}}_k$ такий:

$$\hat{\hat{a}}_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&-i \\ 0&0&i&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\hat{a}}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&i \\ 1&0&0&0 \\ 0&-i&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\hat{a}}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&-i&0 \\ 0&i&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Можна безпосередньо переконатись в тому, що ці матриці із детермінантом $\det \hat{\hat{a}}_k = 1$ для $k = 1, 2, 3$ задовольняють співвідношення:

$$\begin{aligned} &\hat{\hat{a}}_k^{\dagger} = \hat{\hat{a}}_k, \quad \hat{\hat{a}}_k^2 = \hat{I}, \\ &\hat{\hat{a}}_k\hat{\hat{a}}_n + \hat{\hat{a}}_n\hat{\hat{a}}_k = 2\delta_{kn}\hat{I}, \\ &\hat{\hat{a}}_k\hat{\hat{a}}_n = i\hat{\hat{a}}_m, \end{aligned} \tag{26}$$

де $\hat{I}$ – одинична матриця, а індекси в останньому співвідношенні приймають значення $(k, n, m) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$.

Співвідношення (26), як відомо, є визначальними для матриць Паулі. Отже, в іншому представленні матриці $\hat{\hat{a}}_k$ можна звести до $\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_k & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_k \end{pmatrix}$, де $\hat{\sigma}_k$ – загальновідомі матриці Паулі.

Рівняння (23) виглядає дуже подібно до рівняння Дірака, записаного у формі Гайзенберґа

$$i\partial_t \hat{\Phi} = \hat{H}\hat{\Phi}, \tag{27}$$

але із додатковою умовою (20). На відміну від справжнього рівняння Дірака для частинки зі спіном $S = 1/2$, рівняння (23) можна звести до рівняння Кляйна–Ґордона–Фока для кожної компоненти хвильової функції $\hat{\Phi}$ лише враховуючи додаткову умову (20). Дуже схожа ситуація має місце у випадку рівнянь [5, 6] для частинок зі спіном $S = 1$. І це виглядає як майже загальна ситуація [4] для диференційних рівнянь першого порядка для частинок із заданим спіном.

В наступному розділі ми показуємо, що диференційні рівняння першого порядка для частинки зі спіном $S = 0$, а також рівняння для частинки зі спіном $S = 1$, можуть бути записані у формі двох рівнянь Дірака, але з додатковими умовами (різними для випадків $S = 0$ і $S = 1$).

## 3. Система двох рівнянь Дірака для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$

Нагадаємо, що кватерніони, або гіперкомплексні числа виду

$$\mathbf{q} = \mu_0 + \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + \mu_3\mathbf{e}_3, \tag{28}$$

із дійсними числами $\mu_k$, є елементами чотиривимірного лінійного простору із певним правилом множення, яке зручно визначити табличкою множення для $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1,\\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2.\end{gathered} \tag{29}$$

Для кожного кватерніона $\mathbf{q}$ можна розглядати спряжену величину $\bar{\mathbf{q}}$:

$$\bar{\mathbf{q}} = \mu_0 - \mu_1\mathbf{e}_1 - \mu_2\mathbf{e}_2 - \mu_3\mathbf{e}_3. \tag{30}$$

Тоді квадрат модуля кватерніона (28) визначається як

$$|\mathbf{q}|^2 = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^3. \tag{31}$$

Кватерніони (28) можна представити матрицями $2 \times 2$. Зокрема, представимо кватерніони $\hat{\mathbf{q}}$ за допомогою матриць Паулі $\hat{\sigma}_k$ таким чином:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mu_0\hat{I} - i\mu_1\hat{\sigma}_1 - i\mu_2\hat{\sigma}_2 - i\mu_3\hat{\sigma}_3, \tag{32}$$

де матриці Паулі зазвичай використовують у вигляді

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{33}$$

У представленні (32), формально задані правила множення (29) для кватерніонів (28) справджуються завдяки звичайним загальним властивостям матриць і добре відомим співвідношенням для матриць Паулі. У матричному представленні кватерніонів квадрат модуля (31) знаходиться як

$$|\hat{\mathbf{q}}|^2 = \frac{1}{2}tr\left(\bar{\hat{\mathbf{q}}}\hat{\mathbf{q}}\right) = \mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^3, \tag{34}$$

де $\bar{\hat{\mathbf{q}}}$ – спряжена матриця до $\hat{\mathbf{q}}$ (порівняйте з (32)):

$$\bar{\hat{\mathbf{q}}} = \mu_0\hat{I} + i\mu_1\hat{\sigma}_1 + i\mu_2\hat{\sigma}_2 + i\mu_3\hat{\sigma}_3. \tag{35}$$

Оскільки $\mu_k$ – дійсні числа, величина $\bar{\hat{\mathbf{q}}}$ (35) співпадає з ермітоспряженою матрицею, $\bar{\hat{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{q}}^\dagger$.

Узагальнимо тепер (32) і вважатимемо $\mu_k$ комплексними числами. Тобто замість кватерніонів із дійсними $\mu_k$, ми розглянемо комплексні матриці загального виду $\hat{\mathbf{q}}$ розмірності $2 \times 2$, які параметризуємо комплексними числами $\mu_k$ згідно з (32) з використанням розкладання по матрицях Паулі. Квадратом модуля для нових "чисел" слугуватиме $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{q}}^\dagger\hat{\mathbf{q}}\right) = |\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + |\mu_3|^2$, де

$$\hat{\mathbf{q}}^\dagger = \mu_0^*\hat{I} + i\mu_1^*\hat{\sigma}_1 + i\mu_2^*\hat{\sigma}_2 + i\mu_3^*\hat{\sigma}_3. \tag{36}$$

Замість $\hat{\Phi}$ у формі (16) ми тепер розглянемо хвильову функцію частинки у вигляді:

$$\hat{\Phi} = B_0\hat{I} - iB_1\hat{\sigma}_1 - iB_2\hat{\sigma}_2 - iB_3\hat{\sigma}_3 \equiv B_0\hat{I} - i\left(\mathbf{B}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right), \tag{37}$$

де $B_0$ і $B_k$ $(k = 1, 2, 3)$ є тими самими величинами, що і в (10) або (16). У цих позначеннях систему рівнянь (14) можна записати у вигляді:

$$i\partial_t\hat{\Phi} = \left(i\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}\right) + m\right)\hat{\Phi}^\dagger, \tag{38}$$

де $\mathbf{p} \equiv -i\nabla$ – оператор імпульса, а $\hat{\Phi}^\dagger$ – ермітоспряжена матриця до $\hat{\Phi}$. Доповнимо (38) рівнянням для $\hat{\Phi}^\dagger$:

$$i\partial_t\hat{\Phi}^\dagger = \left(-i\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}\right) + m\right)\hat{\Phi}. \tag{39}$$

Кожне з двох рівнянь (38), (39) еквівалентне системі рівнянь (14). Тепер об'єднаємо функції $\hat{\Phi}$ та $\hat{\Phi}^\dagger$ в одну матрицю $\hat{\psi}$ (яка має чотири рядки і два стовпчики)

$$\hat{\psi} \equiv \begin{pmatrix}\hat{\Phi}^\dagger\\ \hat{\Phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0\hat{I} + i\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B}\right)\\ B_0\hat{I} - i\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + iB_3 & iB_1 + B_2\\ iB_1 - B_2 & B_0 - iB_3\\ B_0 - iB_3 & -iB_1 - B_2\\ -iB_1 + B_2 & B_0 + iB_3\end{pmatrix} \tag{40}$$

із квадратом модуля

$$|B_0|^2 + |B_1|^2 + |B_2|^2 + |B_3|^2 = \frac{1}{4}\,tr\left(\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\right). \tag{41}$$

Очевидно, що рівняння для $\hat{\psi}$ має вигляд:

$$i\partial_t\hat{\psi} = \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\psi} + m\hat{\beta}\hat{\psi}, \tag{42}$$

де $\hat{\alpha}_k$ і $\hat{\beta}$ – матриці Дірака у представленні:

$$\hat{\alpha}_k \equiv \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_k, \quad \hat{\beta} \equiv \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{I}. \tag{43}$$



ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2024. Т. 69, № 11

Отже, маємо рівняння Дірака (42) для двох чотирикомпонентних стовпчиків, або (якщо записати рівняння для кожного стовпчика окремо) маємо систему двох рівнянь Дірака для звичайних чотирикомпонентних функцій. Але суттєво враховувати додаткову умову (15) або (20). Також важливо мати на увазі, що обидві чотирикомпонентні хвильові функції пов'язані між собою (див. (40)), оскільки ми маємо лише чотири компоненти поля $B_\mu$, де $\mu = 0, 1, 2, 3$. А завдяки додатковим умовам ((15) або (20)) залишається лише дві незалежні компоненти хвильової функції у розглянутому випадку $S = 0$.

Тепер розглянемо випадок частинки зі спіном $S = 1$. Ми опускаємо детальне обговорення необхідності переформулювання рівнянь Прока–Дафіна–Кемера–Петьйо для частинки зі спіном $S = 1$ у систему рівнянь [5, 6], яка має регулярну границю $m \to 0$ (якою є не що інше як система рівнянь Максвела для безмасових фотонів). Подібне обговорення і відповідні перетворення зроблені вище для частинки зі спіном $S=0$, і тут ми просто використаємо результати роботи [5, 6] та сформулюємо систему двох рівнянь Дірака для частинки зі спіном $S = 1$.

Диференціальні рівняння першого порядку для частинки зі спіном $S = 1$ можна записати у вигляді [5, 6]:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} = -[\nabla \times \mathbf{v}] + im\mathbf{u}, \\ \partial_t \mathbf{v} = [\nabla \times \mathbf{u}] - im\mathbf{v}, \end{cases} \tag{44}$$

з додатковими умовами

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \tag{45}$$

Введемо хвильову функцію $\hat{\varphi}$ у формі матриці (яка має два чотирикомпонентні стовпчики):

$$\hat{\varphi} \equiv \begin{pmatrix} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) \\ (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & -u_3 \\ v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & -v_3 \end{pmatrix} \tag{46}$$

із квадратом модуля

$$\sum_{k=1}^{3} \left( |v|_k^2 + |u|_k^2 \right) = \frac{1}{2} tr \left( \hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi} \right). \tag{47}$$

У таких позначеннях система рівнянь (44) приймає форму рівняння Дірака для хвильової функції (46):

$$i\partial_t \hat{\varphi} = (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\, \hat{\varphi} + m\tilde{\hat{\beta}}\hat{\varphi}. \tag{48}$$

(або системи двох рівнянь Дірака для кожного стовпчика хвильової функції $\hat{\varphi}$). У рівнянні (48) матриці $\hat{\alpha}_k$ тотожно співпадають із матрицями Дірака у представленні (43), тоді як $\tilde{\hat{\beta}}$ має інше представлення:

$$\tilde{\hat{\beta}} = -\hat{\sigma}_3 \otimes \hat{I}. \tag{49}$$

Очевидно, що можна виконати перетворення подібності для матриць і отримати рівняння (48) в тому ж представленні, що і (42). Важливо мати на увазі, що компоненти хвильової функції (45) задовольняють умови (45).

Отже, маємо важливий висновок: хвильові функції як для частинки зі спіном $S = 0$, так і для $S = 1$, формально задовольняють ту саму систему двох рівнянь Дірака, але з різними накладеними додатковими умовами: (15) для $S = 0$ і (45) для $S = 1$. По суті, додаткові умови "формують" частинки з цілим спіном ($S = 0$ або $S = 1$) із двох частинок зі спіном $S = \frac{1}{2}$.

Ми опускаємо тут детальне обговорення питання про систему рівнянь для частинки зі спіном $S = \frac{3}{2}$, для якої добре відомо [3, 4, 7], що ця система може бути записана у вигляді декількох рівнянь Дірака з додатковими умовами на компоненти хвильових функцій. Цей випадок спіну $S = \frac{3}{2}$ і розглянуті вище приклади рівнянь для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$ приводять до важливого узагальнення – припущення про те, що диференційні рівняння першого порядку для частинки із заданим спіном $S$ можна формулювати у вигляді системи декількох рівнянь Дірака з деякими додатковими умовами (в'язями), накладеними на компоненти хвильових функцій для фіксації загального спіну $S$.

## 4. Границя високих енергій

Розглянемо тепер випадок, коли в рівняннях для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$ маси співпадають. Такий випадок може мати місце в границі високих енергій, коли можна нехтувати різницею між експериментальними значеннями мас частинок. Отже, нехай обидві частинки (зі спіном $S = 0$ і $S = 1$) мають ту саму масу $m$. Якщо ми введемо хвильову функцію

$$\hat{F} \equiv \begin{pmatrix} \hat{I} \cdot f + i\,(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) \\ \hat{I} \cdot g + i\,(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + iu_3 & iu_1 + u_2 \\ iu_1 - u_2 & f - iu_3 \\ g + iv_3 & iv_1 + v_2 \\ iv_1 - v_2 & g - iv_3 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

тоді рівняння Дірака

$$i\partial_t \hat{F} = (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\, \hat{F} + m\tilde{\tilde{\hat{\beta}}}\hat{F} \tag{51}$$

об'єднує обидві системи рівнянь для випадку $S = 0$ (див. (14), (15)) і для випадку $S = 1$ (див. (44), (45)). Щоб цей факт став очевидним, перепишемо систему (51) в явному вигляді (без використання матриць):

$$\begin{cases} \partial_t f \;= -\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) + imf, \\ \partial_t \mathbf{v} \;= -\,\nabla f + [\nabla\times\mathbf{u}] - im\mathbf{v}, \\ \partial_t g \;= (\nabla\cdot\mathbf{u}) - img, \\ \partial_t \mathbf{u} \;= \nabla g - [\nabla\times\mathbf{v}] + im\mathbf{u}. \end{cases} \tag{52}$$

Можна зразу побачити, що при $f = 0$ і $g = 0$ ми отримуємо з (52) систему рівнянь (44), (45) для частинки зі спіном $S = 1$, тоді як при $f = 0$ і $\mathbf{v} = 0$ (або при $g = 0$ і $\mathbf{u} = 0$) ми отримуємо систему рівнянь (14), (15) для частинки зі спіном $S = 0$ (в інших позначеннях компонент поля). Отже, хвильові функції для частинок зі спіном $S = 0$ або $S = 1$ є частинними розв'язками системи (52).

В той самий час, якщо ми перейдемо від восьми незалежних компонент $f$, $g$, $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ хвильової функції $\hat{F}$ (50) до восьми компонент $\xi_\varkappa$ і $\eta_\varkappa$ ($\varkappa = 1$, 2, 3, 4) відповідно до

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} f+iu_3 & iu_1+u_2 \\ iu_1-u_2 & f-iu_3 \\ g+iv_3 & iv_1+v_2 \\ iv_1-v_2 & g-iv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 \end{pmatrix}, \tag{53}$$

ми побачимо, що система рівнянь (51) є нічим іншим як сукупністю двох рівнянь Дірака для двох незалежних частинок зі спіном $S = \frac{1}{2}$.

Таким чином, при високих енергіях виникають нові ступені вільності (зі спіном $S = \frac{1}{2}$) замість початкових (зі спіном $S = 0$ і спіном $S = 1$). Але при низьких енергіях, коли різницею мас реальних частинок не можна нехтувати, ці два нових ступені вільності (зі спіном $S = \frac{1}{2}$) зникають разом з рівнянням (51). Це виглядає дуже подібним до кваркових ступенів вільності, явно присутніх при високих енергіях, але таких, що "зникають" при низьких енергіях.

## 5. Висновки

На завершення підведемо короткий підсумок і зробимо деяке узагальнення.

Рівняння для частинки зі спіном $S$ можна сформулювати у формі системи рівнянь Дірака з додатковими умовами (в'язями), накладеними на компоненти хвильової функції. Це, зокрема, продемонстровано на прикладі рівнянь для частинок зі спінами $S = 0$ та $S = 1$.

Рівняння для частинок зі спіном $S = 0$ і $S = 1$ в границі високих енергій можна об'єднати в систему, в якій проявляються нові ступені вільності, а саме з'являються частинки зі спіном $S = \frac{1}{2}$, причому без будь-яких апріорних припущень щодо їхнього існування.

*Дана робота виконана в рамках теми 0122U000886 НАН України. Автор висловлює подяку за підтримку Simons Foundation (США).*

1. B.E. Grinyuk. Equations of motion for particles with spin $S = 0$ and $S = 1$ in the limit of high energies. Preprint BITP: ИТФ-95-11P, Kyiv, 1995, 13 p.
2. Н.Н. Боголюбов, Ж.В. Ширков. *Введение в теорию квантованных полей* (Наука, 1973).
3. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. *Квантовая электродинамика* (Наука, 1969).
4. В.И. Фущич, А.Г. Никитин. *Симметрия уравнений квантовой механики.* Наука, 1990.
5. B.E. Grinyuk. First-order differential equations for a particle with spin $S = 1$. *Ukr. J. Phys.* **38** (10), 1447 (1993). (In Russian).
6. B.E. Grinyuk. First-order differential equations for a particle with spin $S = 1$. Preprint arXiv: 1801.08414v1 [quant-ph] 25 Jan 2018.
7. О.С. Давидов. *Квантова механіка* (Академперіодика, 2013) [ISBN: 978-966-360-211-0].

Одержано 20.10.2024

*B.E. Grinyuk*

EQUATIONS FOR PARTICLES WITH SPIN $S = 0$ AND $S = 1$ IN SPINOR REPRESENTATION

Equations for particles with spin $S = 0$ and $S = 1$ are presented in the form of a system of two Dirac equations with additional conditions (constraints) imposed on the components of the wave functions. In case of identical masses (or at the high-energy limit, where the difference in mass is negligible), the joint system of equations is formulated having particular solutions coinciding with those for spin $S = 0$ and $S = 1$ cases, and simultaneously being the two Dirac equations for two independent particles with spin $S = 1/2$. A principle of constructing the equations for a particle with an arbitrary spin in the spinor representation is proposed.

*Keywords*: Dirac equation, first-order differential equations for particles with spin $S = 0$ and $S = 1$.