Ю.П. СТЕПАНОВСЬКИЙ
Національний науковий центр "ХФТІ" НАН України
(Вул. Академічна, 1, Харків 61108; e-mail: yustep@kipt.kharkov.ua)

УДК 539

КВАДРАТНІ КОРЕНІ ІЗ ЕЛІПСІВ КЕПЛЕРА, ЕЛЕКТРОНИ ТА РІДБЕРҐІВСЬКІ АТОМИ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Сміливі ідеї юного Кеплера щодо будови Сонячної системи застосовуються до аналізу планетних відстаней в екзопланетній системі HD 10180. За допомогою перетворень Жуковського роз'яснюється суть спінорної регуляризації задачі Кеплера, як добування квадратного кореня з еліпса і використання кеплеровської ексцентричної аномалії замість звичайного часу. Розглядаються досягнення харківських радіоастрономів у пошуках рекомбінаційних радіоліній рідберґівських атомів вуглецю на радіотелескопі УТР-2. Узагальнення спінорної регуляризації задачі Кеплера на нееліптичні орбіти використовується для аналізу енергетичних спектрів рідберґівських атомів водню в магнітному полі.

Ключові слова: планети, задача Кеплера, рідберґівські атоми, магнітне поле.

Le nez de Cléopâtre: s'il eût été plus court, tout la face de la terre aurait changé.
Blaise PASCAL, 1669

Ніс Клеопатри: якби він був трохи коротший, змінилося б все обличчя землі!
Блез ПАСКАЛЬ, 1669 р.

1. Вступ

Наука та освіта в Україні переживають нині не найкращі часи. Збулося пророцтво німецького фізика та філософа Георга Крістофа Ліхтенберга (1742–1799): *"Зараз всюди прагнуть поширювати знання, але хто знає, чи не з'являться через два-три століття університети для того, щоб відновити колишнє невігластво."* [1] Звичайно, Г.К. Ліхтенберг писав про європейські університети. Але ось що пише, наприклад, про реформування сучасних польських університетів професор філософії Білостокського університету Піотр Новак у книжці з виразною назвою "Вигодовування троглодитів" [2]: *"Є, як мінімум, дві неявні мети університетських реформ. Перша полягає в тім, щоб відвернути молодих, талановитих людей від інтелектуальної роботи, від читання та писання книг, викладання, на користь квазібізнес-діяльності, яка зводиться до збору грошей для підприємства, раніше відомого, як Університет. Друга мета, більш демонічна, що узгоджується з напрямком глобальних змін, – це послідовне ослаблення інстинкту свободи, що полягає у створенні відповідних умов для обміну академічної свободи (і свободи взагалі) на матеріальні блага*". У вересні 2000 р. на конференції в Дубні видатний математик В.І. Арнольд проявив великий оптимізм, коли сказав: *"Ми"*[1], *"як завжди, відстаємо від передового людства. Знищення науки, знищення культури відбувається всюди, але у нас повільніше, ніж в інших місцях, а це означає, що ще є деяка надія, що ми збережемо свій традиційний рівень культури довше, ніж так звані більш передові країни*" [3] Але не надовго нас вистачило. Схоже, що ми вже успішно наздогнали *"передове людство"*, а в деяких нововведеннях навіть і випереджаємо. Трохи тішить те, що ми тим

[1] Зрозуміло, що під словом "ми" В.І. Арнольд мав на увазі не тільки Россію, а весь пострадянский простір.

самим долучились до *“передового людства”*, про що так довго мріяли.

Можна ще більше тішитись, якщо звернутись до історії науки і взагалі до історії, яка примирює нас “*з недосконалістю видимого порядку речей, як зі звичайним явищем у всіх сторіччях*” [4].

У січні 1610 р. Ґалілео Ґалілей, націливши в небо самотужки зроблений оптичний телескоп, побачив багато нового та надзвичайно цікавого, в тім числі чотири супутники Юпітера (Ґалілей називав їх планетами, пізніше супутниками їх назвав друг Ґалілея Йоганн Кеплер). У листі до Йоганна Кеплера (in una lettera a ***Giovanni*** (!) Keplero) від 19 серпня 1610 р. [5] Ґалілей скаржиться на найзнаменитіших падуанських професорів, які, “*незважаючи на тисячократні запрошення, не хотіли навіть поглянути ні на планети, ні на Місяць, ні на телескоп*”. Ґалілей питає Кеплера: “*Що ж робити? Чий бік прийняти, Демокріта, чи Геракліта?*” (Quid igitur agendum? cum Democrito aut cum Heraclito standum?). І сам вирішує стати на бік Демокріта [2]: *“Посміємося ж, мій любий Кеплере, над великою дурістю людською!”* (Volo, mi Keplere, ut rideamus insignem vulgi stultitiam!)

Ґалілей ще довго сміявся над “*дурістю людською*”. Так, в 1623 р. він писав [6]: *“Що стосується Коперникової гіпотези, то ми, Католики, маємо щастя вищою мудрістю бути врятовані від омани і зцілені від сліпоти”.* Всі знають, до чого Ґалілей досміявся, до найганебнішого в історії католицької церкви інквізиційного процесу 1633 р., який надовго загальмував розвиток науки в Італії. Але і тут є чим тішитися: з часом наука в Італії відродилась, що є переконливим свідченням того, що ***руйнівні можливості людської дурості все ж не безмежні.***

Про подальший зміст даної статті. У розділі 2 ми ще “втішимось” історією життя Тихо Браге та Кеплера, де нам неминуче доведеться стати на бік Геракліта. У розділі 3 застосуємо майже божевільні ідеї 25-річного Кеплера щодо устрою Сонячної системи до екзопланетної системи, відкритої у 2010 р. на відстані 127 світових років від Сонячної системи. У розділі 4 добудемо корінь квадратний із еліпса та з’ясуємо, що це теж еліпс. Це називається “спінорною регуляризацією задачі Кеплера” і дуже спрощує цю задачу. У розділі 5 розглянемо досягнення харківських радіоастрономів у пошуках радіоліній рідберґівських атомів вуглецю на радіотелескопі УТР-2. У останньому, 6-му розділі, розглянемо властивості руху електронів у сталому і однорідному магнітному полі, у квантових точках Фока–Дарвіна та при квантовому ефекті Холла. Проаналізуємо енергетичні спектри рідберґівських атомів водню у магнітному полі, застосовуючи при цьому узагальнення спінорної регуляризації задачі Кеплера, коли корінь квадратний добувається не із орбіт планет, а із класичних орбіт високозбуджених електронів. У додатку до статті, в зв’язку з недавньою (2019 р.) радикальною реформою системи СІ, ми обговоримо деякі питання, пов’язані з нововведеннями.

2. Тихо Браге та Йоганн Кеплер

На відміну від Клеопатри, у якої був ніс, спроможний змінювати обличчя землі, у славетного датського астронома Тихо Браге носа взагалі не було [3]. Точніше, до 22 років ніс у Тихо був, але у 1567 р., у Ростоку, студент Тихо Браге назавжди позбавився його, посварившись зі своїм другом через розбіжність поглядів на якусь математичну проблему. Після дуелі на шпагах Тихо Браге був змушений все життя користуватися штучним носом з воску (або сплаву золота і срібла), що було не дуже зручно. Проте втрата носа надала йому щасливу можливість назавжди відмовитися від всіляких аристократичних умовностей і повністю віддатися астрономії, що вважалось на той час справою, майже ганебною для поважної людини шляхетського роду.

Тогочасний король Данії Фредерік II не без підстав прихильно ставився до шляхетного сімейства Браге. У червні 1565 р. король, проїжджаючи мостом, який зв’язував Копенгаген з королівською резиденцією, зненацька впав з коня у холодну воду. Король плавати не вмів, і почав тонути. Адмірал Йорген Браге кинувся з мосту в воду, врятував короля, але сам помер за кілька днів від запалення легенів. Тихо Браге вважався сином адмірала. Насправді ж він був племінником Йоргена Браге, але коли Тихо було близько року, бездітний, але ду-

[2] На відміну від Демокріта Геракліт вважав, що на над людською дурістю треба плакати.

[3] Багато чого сумного про Тихо Браге та Йоганна Кеплера можна знайти у книгах [7–10].

же заможний, дядько викрав дитину у свого брата Отто і усиновив Тихо. Після смерті дядька Тихо Браге успадкував великий статок і продовжив своє навчання в університетах Європи. У 1571 р. помер і рідний батько Тихо і багатство Тихо збільшилося. Все це слід відзначити, бо майже всі свої статки Тихо Браге витратив на важливі астрономічні дослідження. (У тому ж 1571 р. народився Йоганн Кеплер, через 29 років доля – згадаймо "ніс Клеопатри"! – на деякий час звела Тихо Браге і Кеплера у Празі, що докорінно змінило обличчя астрономії, бо саме Кеплеру було призначено долею у своїх працях обезсмертити безцінну наукову спадщину Тихо Браге.)

В 1576 р. король Данії Фредерік II, який поважав науки і мистецтва, дізнався, що Тихо Браге збирається назавжди влаштуватися в Німеччині і побудувати там обсерваторію. Король терміново викликав Тихо Браге з Німеччини до себе і не без зусиль умовив залишитися в Данії. Фредерік II подарував Тихо острів Вен та допоміг побудувати на острові на той час найкращу у світі обсерваторію Ураніборг, де Тихо за 20 років напруженої праці зробив багато астрономічних спостережень, які відрізнялися дивовижною, небувалою до винаходу оптичного телескопа, точністю. Фредерік II витратив на побудову Ураніборга 100000 талярів, майже стільки ж власних коштів витратив і Тихо Браге. (100000 талярів – це дуже багато, наприклад, наприкінці XVI сторіччя вчителю протестантської школи у Ґраці Йоганну Кеплеру платили 200 гульденів (≃171 таляр) на рік, а професору університета в Падуї Ґалілео Ґалілею 180 флоринів (≃180 талярів) [4].)

По смерті Фредеріка II королем Данії став його син Крістіан IV, який просидів на троні 59 років. Крістіан IV вирізнявся хоробрістю і дотепністю, він воював, розвивав торгівлю, будував міста і кораблі, але вщент не розумів, навіщо йому, і взагалі Данії, потрібні астрономія і гордий, незалежний і зарозумілий Тихо Браге. Король заборонив Тихо Браге продовжувати спостереження і досліди. Він відібрав у Тихо Браге острів Вен, обсерваторію, маєтки, подаровані Фредеріком II. Ображений Тихо Браге продав усе, що у нього не встигли відібрати, і 29 квітня 1597 р. назавжди покинув Ураніборг і острів Вен. Навесні 1599 р. Тихо Браге після довгих поневірянь дістався столиці Священної Римської імперії – Праги, де був прийнятий з королівськими почестями імператором Рудольфом II.

На жаль, у Празі він прожив недовго. 13 жовтня 1601 р. у Тихо Браге, внаслідок занадто довгої та щедрої вечері у шляхетній компанії та "віддання переваги ввічливості потребам здоров'я" (як занотував Й. Кеплер у "Щоденнику спостережень", який вів Тихо Браге), виникла тяжка ішурія [5] і пов'язана з нею жахлива гарячка. *"24 жовтня його гарячка на кілька годин відступила, природа перемогла, і він мирно упокоївся серед співчуттів, молитов і плачу своїх домашніх. Таким чином, починаючи з цієї дати, серії небесних спостережень були перервані, його ж власні спостереження за тридцять вісім років добігли кінця"*, – так завершив Кеплер свій запис у "Щоденнику спостережень" Тихо Браге [12].

Після смерті Тихо Браге безцінні для науки скарби – результати всіх його спостережень – потрапили у руки Йоганна Кеплера, якого Тихо Браге запросив до Праги своїм помічником (у 1697 р. Кеплер надіслав свою книгу ***Mysterium cosmographicum*** (Таємниця світу) [13] Тихо Браге і Ґалілео Ґалілею і тим самим заочно познайомився з ними). Й. Кеплер виконав гігантську роботу, аналізуючи багаторічні спостереження планети Марс, проведені Тихо Браге. Аналіз спостережень Марса привів Кеплера до відкриття трьох законів планетного руху.

У 1609 р. у Гайдельберзі вийшла ***Astronomia nova*** (Нова астрономія) [14] Кеплера, в якій були сформульовані два закони планетного руху:

I. Планета описує еліпс, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.

II. Пряма лінія, що з'єднує планету з Сонцем, описує рівні площі в рівні часи.

У 1619 р. була опублікована ***Harmonices Mundi*** (Гармонія світу) [15] Кеплера. У ній було сформульовано третій закон Кеплера:

[4] У 1599 р., за рік до спалення у Римі Джордано Бруно, у Венеціанський сенат надійшов донос про аморальність професора Ґалілея, який жив разом з невінчаною венеціанкою. Вердикт Венеціанського сенату ошелешив донощика: враховуючи нововиявлені обставини, платити віднині професору Ґалілею не 180 флоринів, а вдвічі більше – 360 [11].

[5] Ішурія, від давньогрецького $\iota\sigma\chi\omega\ o\upsilon\rho o\nu$, – затримка сечі.

III. Квадрати періодів обертання планет відносяться один до одного, як куби великих осей еліпсів, по яких рухаються планети.

Неймовірна працездатність і умови, у яких працював Кеплер, вражають. Обчислення, які привели Кеплера до відкриття III закону, займають сім товстих томів. Кожне обчислення, що займає, в середньому, 10 сторінок, Кеплер повторював по 70 разів [16]. І цю каторжну роботу виконувала людина зі слабким здоров'ям, з хворими очима, змушена безперервно складати календарі і гороскопи, щоб прогодувати сім'ю. По смерті Тихо Браге Й. Кеплера було призначено імператорським математиком при дворі імператора Рудольфа II з річним окладом 500 гульденів. За життя Кеплера змінилося три імператори. Всі вони незмінно поважали Кеплера. Не змінювалось лише те, що імператорська казна була завжди порожня. Імператорський борг Кеплеру за 30 років складав 12694 гульдени. До того ж, кілька років життя Й. Кеплер витратив на те, щоб домогтися виправдання своєї матері, яку звинуватили в тім, що вона відьма і чаклунка. Останні два роки Кеплер прожив у місті Саган як придворний астролог герцога Валленштайна. Восени 1630 р. він верхи на старій заїждженій шкапі попрямував із Сагана (зараз Жагань, Польща) через Нюрнберг до міста Регенсбург, щоб знайти там імператора Фердинанда II і нагадати йому в черговий раз про багаторічний борг. Імператора Кеплер не знайшов, але, проїхавши верхи понад 600 км, застудився по дорозі і 15 листопада 1630 р. помер, залишивши дружину і чотирьох маленьких дітей у цілковитій убогості. Нещасну стару шкапу Кеплер продав за 2 флорини [10].

У 1930 р. в статті, присв'яченій 300-річчю смерті Йоганна Кеплера, Альберт Айштайн писав про відкриття Кеплером трьох його законів планетного руху [17]:

"До захоплення цією чудовою людиною додається ще почуття захоплення і благоговіння, яке стосується вже не людини, а загадкової гармонії природи, яка нас породила. Ще в давнину люди придумали криві, які відповідають найпростішим законам. Поряд з прямою і колом серед них були еліпс і гіпербола. Останні ми бачимо реалізованими в орбітах небесних тіл, у всякому разі з добрим наближенням.

Здавалось би, людський розум має довільно конструювати форми, перш ніж підтвердиться їх матеріальне існування. Чудовий твір усього життя Кеплера особливо яскраво показує, що пізнання не може розквітнути з голої емпірії. Такий розквіт можливий лише ***з порівняння того, що придумано, з тим, що спостережено".***

3. Mysterium cosmographicum Й. Кеплера та экзопланетна система HD 10180

Вольфганг Паулі (1900–1958 рр.) познайомився с Карлом Густавом Юнгом (1875–1961 рр.) у 1930 р. Їх багаторічні дружні стосунки та листування продовжувались до смерті Паулі [19]. Ця дружба значно збагатила світогляд обох: Юнг став писати про фотони та доповняльність хвиля-частинка, а Паулі, в свою чергу, зацікавився теорією архетипів Юнга та психологією наукової творчості. Завдяки цьому Паулі дуже зацікавила особистість Й. Кеплера. У 1950 р. в Прінстоні для невеликої аудиторії він прочитав лекцію *"Вплив архетипічних уявлень на виникнення наукових теорій Кеплера". "Я був присутній на лекції Паулі про Кеплера, яку він читав в березні 1950 року ..."*, – згадував про це Абрагам Пайс [19], – *"Єдине, що я пам'ятаю про цю подію, це присутність там Айнштайна, який заснув під акомпанемент слів Паулі"* [6]. Паулі роз'яснював в своїй лекції [7], що "*три відомих кеплерівські закони руху планет, на яких Ньютон ґрунтував свою теорію тяжіння (1687 р.), були не тим, до чого Кеплер спочатку прагнув. Справжній духовний нащадок піфагорійців, він був захоплений старовинними уявленнями про музику сфер і завжди намагався знайти гармонійні пропорції, в яких для нього лежала вся краса. Він надавав найважливішого значення зазіханням геометрії на те, що її теореми "були у дусі Божому споконвіку". Основним його прин-*

[6] Важко було не заснути під час цієї лекції, або запам'ятати, про що вона була. Слухачі опинилися у скрутному становищі собаки Павлова, якого навчили крутити хвостом, або підібравши його, втікати, в залежності від того, який еліпс він бачив: стиснутий з боків, чи згори і знизу. А от побачивши коло, собака відразу ж засинав.

[7] Таку ж лекцію Паулі прочитав ще двічі, у лютні та березні 1948 року, у товаристві психологів у Цюриху (див [18]). Лекція грунтувалася на його досить великому, пізніше опублікованому есе [20].

ципом було ***"Geometria est archetypus pulchritudinis mundi"*** *(Геометрія – це архетип краси світу)".* Паулі розповідав про те, що, згідно з Кеплером, *"образ триединого Бога є сферична поверхня, людський же дух відноситься до духу Божого так само, як коло до сфери ... Така картина відносин людського духу до духу Божого знаходиться в повній відповідності з точкою зору на пізнання, як на збіг зовнішніх вражень з* ***доіснуючими внутрішніми образами****",* тобто **архетипами**.

Як підтвердження, Паулі цитував Кеплера: *"Пізнавати – означає* ***порівнювати сприйняте ззовні з внутрішніми ідеями (externum sensile cum ideis internis conferre)*** *і виносити судження про те, наскільки те й інше збігається".* Усвідомлення внутрішніх ідей щодо устрою Сонячної системи, взагалі Світу, вкладених в нього Богом, було основним прагненням життя Кеплера. І він вважав, що це йому певною мірі вдалось.

Як новий вчитель математики та астрономії 23-річний Йоганн Кеплер з'явився у протестантській школі в Граці у 1594 р. Глибоко впевнений в існуванні прихованої гармонії світу, Кеплер пристрасно захопився поки що не забороненим вченням Коперника. Кеплер намагався розгадати геометричну структуру Сонячної системи. Осяяння, яке зійшло на нього 19 липня 1595 р., було приголомшуючим: планет у Сонячній системі – ***шість*** (про інші планети тоді ще не було відомо), проміжків між ними – ***п'ять***, правильних багатогранників, чудових платонових тіл, – теж ***тільки п'ять***! Великий геометр, Бог, створюючи Сонячну систему, не міг не скористатися цим збігом! Кеплер приступив до довгої та кропіткої роботи, яка й завершилася виходом у 1596 р. у Тюбінгені книги Кеплера ***Mysterium cosmographicum***. У книзі Кеплер докладно виклав свою теорію, суть якої він висловив словами:

"Земля є мірою всіх орбіт. Навколо неї опишемо додекаедр. Описана навколо додекаедру сфера є сфера Марса. Навколо сфери Марса опишемо тетраедр. Описана навколо тетраедра сфера є сфера Юпітера. Навколо сфери Юпітера опишемо куб. Описана навколо куба сфера є сфера Сатурна. У сферу Землі вкладемо ікосаедр. Вписана в нього сфера є сфера Венери. У сферу Венери вкладемо октаедр. Вписана в нього сфера є сфера Меркурія".

Згідно з обчисленнями Кеплера,

$$R\,\text{Землі}/R\,\text{Венери} = R\,\text{Марса}/R\,\text{Землі} =$$
$$= \sqrt{3} \times \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = 1{,}258409,$$
$$R\,\text{Венери}/R\,\text{Меркурія} = R\,\text{Сатурна}/R\,\text{Юпітера} =$$
$$= \sqrt{3} = 1{,}732051,$$
$$R\,\text{Юпітера}/R\,\text{Марса} = 3.$$

Кеплеру пощастило. Відразу ж було видно деяке узгодження з параметрами орбіт планет, які Кеплер знайшов у книзі Миколи Коперника *"Про обертання небесних сфер"* (1543 р.). Щоб поліпшити узгодження, Кеплеру довелося приписати деяку "товщину" геометричним сферам, в які він вписував правильні багатогранники. Модель Кеплера була дуже недосконалою, а природа натякала на те, що планети обертаються не по кругових орбітах, а Сонце перебуває не в центрах планетних орбіт. Почався тяжкий шлях Кеплера до відкриття найважливіших для розвитку небесної механіки трьох законів, названих його ім'ям.

Приблизне узгодження моделі Кеплера з дійсністю пояснюється тим, що відстані планет від Сонця і періоди обертання планет, ***приблизно*** підкорюються, як відомо [21], закону геометричної прогресії з ***певними*** показниками. До того ж успіх моделі Кеплера пов'язаний з тим, що вона спрацювала саме в Сонячній системі і саме в той час, коли жив Кеплер. Ми побачимо далі, що в іншій екзапланетній системі, де нема життя і не було Кеплера, закон геометричної прогресії діє, а модель Кеплера ні, бо показники геометричної прогресії там ***інші.***

Кеплер з'ясував, що відношення радіусів описаної і вписаної сфери однакові для ікосаедра і додекаедра (1,258), для куба і октаедра (1,732), а для тетраедра це відношення найбільше (3). Відношення відстаней між орбітами планет – це п'ять чисел. Одне, найбільше, є близьким до 3, два є майже вдвічі меншими від 3, і два – іще меншими. Стало ясно, в який проміжок який багатогранник вставити і які "товщини" приписати нематеріальним сферам (в 1596 р. Кеплер ще не знав, що у планетних орбіт є "афелії" і "перигелії"). Якби Кеплер знав про існування інших планет, він би легко побачив математичний устрій всієї Сонячної системи. Для цього йому знадобилося б два ікосаедра і сім кубів:

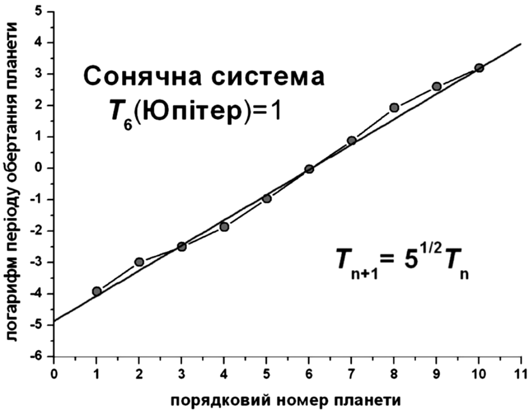

Рис. 1. Відхилення періодів обертання планет Сонячної системи від геометричної прогресії

Меркурій – *КУБ* – ***Венера*** – *ІКОСАЕДР* – ***Земля*** – *ІКОСАЕДР* – ***Марс*** – *КУБ* – ***Церера*** – *КУБ* – ***Юпітер*** – *КУБ* – ***Сатурн*** – *КУБ* – ***Уран*** – *КУБ* – ***Нептун*** – *КУБ* – ***Ультіма Тулі***.

В ролі представника астероїдного пояса між Марсом і Юпітером ми взяли карликову планету Цереру. А транснептуновий пояс Койпера, у нас представляє не карликова планета Плутон, а транснептуновий об'єкт (486958) 2014 MU69, який отримав назву ***Ultima Thule*** (Край світу)[8]. Це більш природно, бо Ультіма Тулі – це представник так званих *"класичних об'єктів поясу Койпера"*, транснептунових об'єктів, які обертаються по майже круговим орбітам і не перебувають у орбітальному резонансі з Нептуном, на відміну від Плутона, представника *"резонансних об'єктів поясу Койпера"*.

Згідно з наведеною вище схемою "... ***планета*** – *КУБ*– ***планета*** – *КУБ*– ...", міжпланетні відстані приблизно підкоряються геометричній прогресії з показником $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Вслід за Кеплером уявімо собі, що великий геометр Бог не міг пройти повз таку перлину математики як "золотий перетин". Його логіка при створенні Сонячної системи могла би бути такою: відношення періодів обертання сусідніх планет слід задавати "найкращим" ірраціональним числом, щоб близькі планети не заважали одна одній обертатися через резонанси. "Найкраще" ірраціональне число – це, як відомо, "золотий перетин", оскільки ланцюговий дріб

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}} \approx 1{,}618,$$

містить лише одиниці. Але таким планетам було б занадто тісно, бо відношення їх відстаней дорівнювало б всього 1,378. А втім $\sqrt{5} = 2\Phi - 1 \approx 2{,}236$ теж "непогане" ірраціональне число. Воно цілком підійде при створенні планетної системи. До того ж $(\sqrt{5})^{2/3} \approx 1{,}710 \approx \sqrt{3}$, що теж добре, бо тоді відстані між планетами узгоджуються з геометричною прогресією з показником, визначеним схемою "– ***планета*** – *КУБ* – ***планета*** – *КУБ*". Всевідаючий Бог знав, що дуже точно все це розраховувати не варто, бо з часом вся ця краса зруйнується, внаслідок різноманітних, непередбачуваних фізичних ефектів та неймовірно складної математичної теорії руху планет.

Погляньмо тепер, як відхиляється реальна Сонячна система від приписів найпростішої схеми (пряма лінія відповідає геометричній прогресії) (рис. 1).

Аналогічний графік має вигляд для логарифмів відстаней [21]. Реальні міжпланетні відстані добре наближає геометрична прогресія з показником $\sqrt{3} = 1{,}732 \approx (\sqrt{5})^{2/3} = 1{,}710$. Це з'ясувала ще в 1913 р. англійський астроном Блегг [22].

Є підстави згадати цю історію кеплерової моделі Сонячної системи саме зараз через те, що в нашій галактиці відкрито вже понад 4 тисяч екзопланет[9].

У 2010 р. у сузір'ї Південної Гідри, на відстані 127 світлових років від нас, було відкрито 7 екзопланет, які обертаються довкола жовтого карлика HD 10180, маса якого майже така, як у Сонця ($1{,}06 M_\odot$). Період обертання першої екзопланети з масою 1,5 $M_\oplus$ – 1,18 днів, останньої, сьомої, з масою 67 $M_\oplus$ – 2150 днів (рис. 2). Вік цієї екзопланетної системи – 7,3 млрд років.

Погляньмо, як відхиляються періоди обертання екзопланет HD 10180 від геометричної прогресії с показником $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ (рис. 2):

Бачимо, що відхилення періодів обертання екзопланет від геометричної прогресії дуже схожі з відповідними відхиленнями для Сонячної системи.

[8] 1 січня 2019 року космічний апарат New Horizons (Нові обрії) пролетів повз Ультіма Тулі на відстані 3500 км, що було заздалегідь заплановано.

[9] За відкриття першої екзопланети у 1995 р. Мішель Майор та Дідьє Кело одержали у 2019 р. Нобелівську премію.

Звичайно, $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ – доволі гарне ірраціональне число, тому показник геометричної прогресії кеплерівський Бог вибрав непоганий. З показником для відношення відстаней планет $(\frac{3}{2}\sqrt{5})^{2/3} \approx 2{,}241 \approx \approx \sqrt{5} = 2{,}236$, Він явно пожартував: прогресії для відстаней така гарна ірраціональність, як $\sqrt{5}$, зовсім непотрібна. Але Божий жарт підкинути Кеплеру ідею щодо *п'яти* багатогранників був куди дотепнішим. До речі, Кеплер так тепло ставився до свого Бога, що вважав цілком природним бажання Бога інколи повтішатися. Паулі у своєму есе [20] цитує такі слова Кеплера: ***"Творець за власною примхою створив природу за своїми образом і подобою, щоб навчити її грати, і, разом з тим, як іграшку для своєї забави..."***.

4. Корінь квадратний із еліпса, або спінорна регуляризація задачі Кеплера

Перш ніж добути корінь квадратний із еліпса, обговоримо деякі властивості еліпсів, піднесених до квадрата.

З нагоди 300-річчя ньютонівських ***Principia,*** Арнольд довів таку теорему [23]:

***Кожний еліпс з фокусом* 0 *є квадратом (єдиного) еліпса з центром* 0.**

Ця теорема пов'язана з двома проблемами, розв'язаними Ньютоном [24]:

Propositum X. Problema V

Тіло обертається по еліпсу; треба знайти закон доцентрової сили, спрямованої до центра еліпса.

Відповідь: *сила пропорційна відстані від тіла до центра еліпса.*

Propositum XI. Problema VI

Тіло обертається по еліпсу; треба знайти закон доцентрової сили, спрямованої до фокуса еліпса.

Відповідь: *сила обернено пропорційна квадрату відстані від тіла до фокуса еліпса.*

Згідно з Арнольдом другий еліпс є квадратом першого, або *еліпс Ньютона є квадратом еліпса Гука*[10]. Так, на рис. 3 менший еліпс є квадратом більшого. Велика піввісь більшого еліпса на рисунку дорівнює 1.

[10] Арнольд називає перший еліпс еліпсом Гука, а другий еліпсом Ньютона, бо Гук був першим, хто припустив, що в випадку сили, пропорційної відстані, тіло обертається по еліпсу. Ми будемо називати другий еліпс еліпсом Кеплера, або еліпсом Кеплера–Ньютона.

Рис. 2. Відхилення відстаней екзопланет від зірки HD 10180 від геометричної прогресії

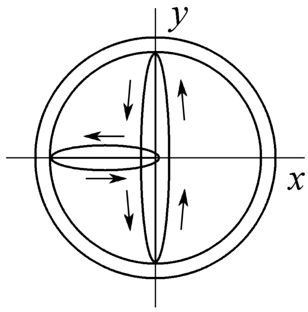

Рис. 3. Менший еліпс є квадратом більшого

Піднести до квадрата можна не тільки еліпс. Довільну сукупність точок, довільний контур на площині можна піднести до довільного, додатного, або від'ємного, степеня, якщо вважати цю площину площиною комплексної змінної $z = x + iy$.

У простішому випадку, коли ексцентриситети обох еліпсів на рис. 3 дорівнюють одиниці, обидва ньютонівських тіла рухаються туди-сюди вздовж відрізка прямої лінії. Нехай першим тілом у нас буде Аліса з країни чарів Льюїса Керрола, яка падає крізь колодязь, проритий через усю Землю, і через $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84$ хвилини повертається назад (колодязь – це жирний вертикальний діаметр кола на рис. 3, R – радіус Землі, g – прискорення земного тяжіння). Зауважимо, що за цей же час "квадрат Аліси" (жирний горизонтальний радіус) двічі долетить до центра Землі та повернеться назад.

Знаючи час, через який повертається Аліса, легко можна знайти, наприклад, період обертання космічного корабля "Восток" (89 хвилин), на якому 12 квітня 1962 р. облетів Землю Юрій Гагарін. На рис. 3 радіус меншого кола дорівнює 1, більшого – 1,134. Перигей "Востока" був 1,027, апогей – 1,051. Тобто велика піввісь еліпса польоту була 1,039. Згідно з третім законом Кеплера, політ Гагаріна по еліптичній орбіті тривав $84 \times \sqrt{1{,}039^3} = 89$ хвилин. (Ми скористалися тим, що "яблуко Ньютона", запущене з першою космічною швидкістю навколо Землі без атмосфери по колу з радіусом 1, повернулось би саме за той же час, за який повертається Аліса. Сплющеністю Землі можна знехтувати, бо відношення екваторіального радіуса Землі до полярного дорівнює 1,0034.

На рис. 3 більший еліпс – це коло, сплющене у 8 разів. Оскільки за теоремою Арнольда центр кола – це фокус меншого еліпса, то перигелій цього еліпса дорівнює $1/64$, тобто афелій цього еліпса більше перигелія у 64 рази.

Зауважимо, що сплющеність меншого еліпса майже така, як у комети Галлея, у якої відношення афелій(1948)/перигелій(1986) дорівнює 60 [25]. Поява комети Галлея у 1682 р. була доленосною для розвитку небесної механіки і взагалі науки. Загальновизнано, що Ньютон ніколи б не написав свої ***Principia,*** якби Галлей, зацікавившись рухом комети, не змусив Ньютона це зробити. На початку 1684 р. Едмонд Галлей поїхав з Лондона до Кембріджа спитати у Ньютона, чи не ***буде*** сила, обернено пропорційна квадрату відстані до Сонця, змушувати комету рухатися по еліпсу. Що було далі, добре відомо [26]. Ньютон відповів, що ***буде***, бо він це обчислив років зо 20 тому. Ньютон не зміг показати враженому Галлею своїх обчислень, бо не знайшов їх. Але, розпрощавшись з Галлеєм, він знайшов ті обчислення і, виявивши в них невелику помилку, за деякий час відтворив їх. У листопаді 1684 р. Ньютон відіслав Галлею невеликий дев'ятисторінковий трактат ***De Motu Corporum in Gyrum*** *(Про рух тіла по орбіті).* Як пізніше висловився Галлей про Ньютона, він ***"став Уліссом, що породив Ахілла"***[11]***.*** Відкинувши усі свої алхімічні, хронологічні та теологічні пошуки, Ньютон засів за ***Principia.*** Він забув про сон, їжу та про все на світі. За 18 місяців моторошної праці, яка майже не згубила Ньютона, ***Principia*** були завершені, ньютонова Троя впала. Друкування ***Principia*** довелось оплатити Галлею, бо, як виявилось, у Королівського товариства не було на те грошей.

Спираючись на ***Principia*** Ньютона, Галлей обчислив елементи орбіт 24 комет (з 1337 р. по 1698 р.) і помітив надзвичайну схожість трьох комет, 1531, 1607 (яку спостерігав і про яку писав Кеплер) та 1682 р. У всіх трьох комет були однакові перигелії (0,58 а.о.) та нахили орбіт (1620°) [27]. Галлей слушно припустив, що всі три комети – це одна і та ж комета, та передбачив, що комета повернеться у 1758 р., що вона і зробила. З того часу вона носить славне ім'я Галлея.

Властивість двох еліпсів, які лежать в одній площині, одному бути квадратом другого (теорема Арнольда), була відкрита Леві–Чивітою [28] у 1903 р. Але нахил орбіти комети Галлея (1620) до площини екліптики (яку для всіх планет у доброму наближенні можна вважати нашою площиною комплексної змінної) суттєво відмінний від нуля, чи можна в цьому випадку добути корінь квадратний із її еліпса, та взагалі із довільного еліпса у тривимірному просторі? Це є можливим, як з'ясувалось у 1964 р. [29]. Щоб добути корінь квадратний в загальному випадку, астрономи були змушені перевідкрити спінори. Оскільки перехід від звичайних координат до спінорів зводить доволі складну задачу Кеплера про рух у ***сингулярному*** потенціалі $U = -1/r$ до ***значно простішої*** задачі про рух у потенціалі $U = r^2$, то цей перехід називається спінорною ***регуляризацією*** задачі Кеплера.

Повернемось до еліпсів Ньютона–Арнольда. Обчислимо, як змінюється сплющеність еліпса при піднесенні його до квадрата. Якщо вертикальний еліпс на рис. 3 сплющений в A разів, то афелій меншого еліпса дорівнює $1/A^2$, тобто перигелій меншого еліпса більше афелія в A^2 разів. Це відношення однозначно визначає, у скільки разів B сплющений цей еліпс, $B = \frac{1}{2}(A + \frac{1}{A})$. У нашому випадку, рис. 3, $A = 8$, $B = 4\frac{1}{16}$. Конформне перетворення комплексного змінного $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ носить ім'я Жуковського, бо в 1910 р. Н.Є. Жуковський ефективно використав це перетворення для обчислення під'ємної сили різноманітних крилоподібних профілів, які виникають при дії перетворення Жуковського на коло, якщо центр кола не співпадає з

[11] Так само як Улісс (Одіссей) спонукав Ахілла (Ахіллеса) воювати з Троєю, бо знав, що це єдина людина в світі, яка може здолати троянців, так і Галлей змусив Ньютона написати Principia. Ахілл загинув напередодні падіння Трої, написання Principia довело Ньютона до повного фізичного та психічного виснаження.

комплексним числом $z = 0$ [30]. Якщо центр кола співпадає з $z = 0$, то, як неважко впевнитися, довільне коло з радіусом, відмінним від одиниці, перейде при перетворенні Жуковського $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ в еліпс з центром в центрі кола, а при подвійному перетворенні Жуковського $z' = \left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right)^2$ перейде в еліпс з фокусом в центрі кола [23]. Нехай довільна точка на колі з радіусом $r \neq 0$, відповідає комплексному числу $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Кут φ – це надзвичайно важлива змінна (ексцентрична аномалія E) в теорії Кеплера. На рис. 3 зображене коло з радіусом $R = \sqrt{\frac{9}{7}} = 1{,}134$, бо саме воно (або коло з радіусом $R = \sqrt{\frac{7}{9}} = 0{,}882$) при перетворенні Жуковського $z' = \frac{i}{\sqrt{\frac{9}{7}+\frac{7}{9}}}(z + \frac{1}{z})$ сплющується в 8 разів та перетворюється в більший еліпс с великою піввіссю 1, зображений на рис. 3. Подвійне перетворення Жуковського дасть нам менший еліпс на рис. 3.

Розглянувши зображений на рис. 4 еліпс Кеплера, ми побачимо, що майже все потрібне для добуття корня квадратного з еліпса було зроблене Кеплером.

На рис. 4, a та b – велика та мала півосі еліпса, ε – ексцентриситет, x та y – осі ортогональної системи координат, центр якої співпадає з фокусом еліпса. E – ексцентрична аномалія. Враховуючи, що еліпс – це коло, сплюснуте у $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ разів, легко знайти координати планети,

$$x = a(\cos E - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin E. \tag{1}$$

За теоремою Піфагора з (1) маємо,

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2(\cos E - \varepsilon)^2 +$$
$$+ a^2(\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin E)^2 = a^2(1 - \varepsilon\cos E)^2,$$

тобто

$$r = a(1 - \varepsilon\cos E). \tag{2}$$

Неважко впевнитися в тому, що

$$x + iy = a\left(\sqrt{1-\varepsilon}\cos\frac{E}{2} + i\sqrt{1+\varepsilon}\sin\frac{E}{2}\right)^2, \tag{3}$$

тобто еліпс Кеплера є квадратом еліпса з центром у центрі еліпса, що і було виявлено Леві–Чівітою у 1903 р. [28].

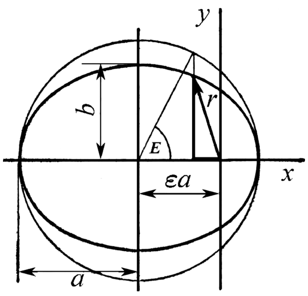

Рис. 4. Еліпс Кеплера

Введемо тепер двокомпонентну величину

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{a}{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{1-\varepsilon}\cos\frac{E}{2} - i\sqrt{1+\varepsilon}\sin\frac{E}{2}\\ \sqrt{1-\varepsilon}\cos\frac{E}{2} + i\sqrt{1+\varepsilon}\sin\frac{E}{2}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Будемо вважати величину ψ спінором. Це означає, що при обертанні тривимірної системи координат (x, y, z) навколо осі з напрямком $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}^2 = 1$, на кут φ, $\mathbf{e}\varphi \equiv \boldsymbol{\varphi}$,

$$\psi \to \psi' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\varphi\sigma}}{2}\right)\psi,$$
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – стандартні матриці Паулі.

Спінор (4) відповідає кеплерівському еліпсу, розташованому у площині (x, y), точніше по кеплерівському еліпсу пробігає кінцева точка вектора $\mathbf{r} = \psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi$, $0 \leq E \leq 2\pi$. Відзначимо, що

$$\frac{d\psi^*}{dE}\psi - \psi^*\frac{d\psi}{dE} = 0. \tag{6}$$

Тепер маємо з'ясувати, як ексцентрична аномалія E пов'язана з часом, у якому відбувається рух планети по еліпсу. У цьому нам допоможе другий закон Кеплера. Згідно з цим законом $\frac{dS}{S} = \frac{dt}{T}$, де $S = \pi ab$ – площа еліпса, T – період обертання планети навколо Сонця. Обчислюючи

$$dS = \frac{1}{2}\left|[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]\right| = \frac{1}{2}\left|xdy - ydx\right| =$$
$$= \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}(1 - \varepsilon\cos E)dE, \tag{7}$$

знайдемо, що

$$dt = \frac{T}{2\pi}(1 - \varepsilon\cos E)dE = \frac{T}{2\pi a}rdE, \tag{8}$$

тобто

$$t = \frac{T}{2\pi}(E - \varepsilon \sin E), \qquad (9)$$

(вважаємо, що при $t = 0$ планета знаходиться в перигелії). *Рівняння Кеплера* (9) – це найважливіше рівняння в теорії руху планет, а також у теорії спінорної регуляризації задачи Кеплера. (Докладніше про спінорну регуляризацію задачі Кеплера можна прочитати у книжках [31, 32]).

5. Надтонка структура атома водню, рідберґівські атоми та УТР-2

У 1947 р. видатний астрофізик XX сторіччя Й.С. Шкловський випадково прочитав у англійському журналі *Observatory* про сміливу ідею 23-річного голландського студента Г. Ван де Гулста, який у 1944 р. припустив існування у радіоспектрі Галактики лінії випромінювання атомарного водню с довжиною хвилі 21 см. Жодних деталей не повідомлялось. Шкловський був зачарований цією ідеєю. *"Сама можливість буквально перерахувати всі водневі атоми міжзоряного середовища, знайти температуру її хмар, їх кінематику і динаміку діяла заворожуюче"*, – писав він у своїх спогадах [33]. У 1948 р. Шкловський обчислив час життя збудженого рівня надтонкої структури (11,5 млн років) та прийшов до висновку, що радіолінія водню з довжиною хвилі 21 см може спостерігатися! Щоб "спіймати" цю хвилю, Шкловський знайшов талановитого радіоастронома В.В. Віткевича, який завзято взявся за експериментальну реалізацію "проекту 21 см". Але несподівано і без будь-яких пояснень на початку 1950 р. він припинив роботу по "проекту 21 см".

Тільки через 20 років Віткевич розповів Шкловському, що ж сталося [33]: у "проект 21 см" втрутився *ніс Клеопатри*! Виявилося, що інколи Віктор Віткевич бував вдома у Льва Ландау (їх дружини були у родинних стосунках), де зазвичай скромно мовчав. Але одного разу він необережно і легковажно розповів Ландау про "проект 21 см". Ландау зреагував на розповідь Віткевича так: *"Подумаєш – обчислити імовірність магніто-дипольного випромінювання! Відповідні формули є в моїй книзі, і такі обчислення може виконати будь-який студент. Але звідки Шкловський взяв густину водню в міжзоряному середовищі? Це ж чиста* ***патологія****"*. На жаль, Віткевич вчасно не одержав відповідних інструкцій від І.Є. Тамма, які той давав всім, хто мав щось розповісти Ландау [34]: *"Коли він буде лаятися, – казати, що це* ***"філологія", "патологія", "балаган"****, –* ***пропускайте повз вуха,*** *але як тільки почне говорити по суті – вушка на маківці і все мотайте на вуса"*. Тобто нічого особливого Ландау не сказав, а до суті розмова не дійшла. Втім, неадекватна реакція Віткевича на його слова дала змогу американським вченим Х. Ювену та Е. Перселлу першими спіймати хвилю 21 см навесні 1951 р.

Щодо книги, Ландау був правий, дійсно, на стор. 547–548 "Квантової механіки" 1948 р. видання [35] була виведена формула Фермі [36]:

$$\Delta E = \frac{8\pi\beta_0\beta}{3i}\,(2i+1)|\psi(0)|^2 = \frac{8\beta_0\beta}{3}\,\frac{(2i+1)}{a^3n^3i} \qquad (10)$$

для розщеплення енергії ΔE між двома рівнями надтонкої структури ns-станів атомів лужних елементів [12]. У Ландау–Ліфшиця магнітний момент електрона дорівнює магнетону Бора, $\beta_0 \equiv \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_ec}$, але ***може бути довільним***, β – магнітний момент ядра, i – спін ядра, $\psi(0)$ – хвильова функція ns-електрона у початку координат, $a = \frac{\hbar^2}{m_ee^2}$ – радіус Бора. Що таке $\psi(0)$, потребує пояснення: хвильова функція електрона $\Psi_\alpha(\mathbf{r})$ у рівнянні Шрьодінгера–Паулі – це спінор, $\alpha = 1{,}2$. Для ns-електрона $\Psi_\alpha(\mathbf{r}) = \psi(r)u_\alpha$, $u^*u = 1$. $\psi(r)$ – звичайна шрьодінгеровська хвильова функція за відсутності магнітного поля (магнітне поле ядра розглядається як мале збурення). За допомогою формули (10) частота та довжина хвилі випромінювання лужних атомів водню, або дейтерію, дійсно, можуть бути розраховані будь-яким студентом. Але ж треба було бути Фермі, щоб одержати цю формулу!

На відміну від Ландау і Ліфшиця, Фермі розглядав не рівняння Шрьодінгера–Паулі, а рівняння Дірака, тобто магнітний момент електрона у Фермі ***принципово*** дорівнював ***магнетону Бо-***

[12] Коли Шкловський займався розрахунками надтонкого розщеплення водню влітку 1948 р., він не міг скористатися формулою (10) з книги Ландау–Ліфшиця, бо її ще не було, підручник [35] лише 9 липня 1948 р. був підписаний до друку.

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2020. Т. 65, № 10

ра, як то ***випливало із рівняння Дірака*** [13]. У Фермі спінор $\Psi_\alpha(\mathbf{r}) = \psi(r)u_\alpha$ – це третя та четверта ("великі") компоненти хвильової функції Дірака, дві інші компоненти, перша та друга ("малі") виражаються через дві "великі", результат можна виразити лише через дві "великі" компоненти, що Фермі і зробив. Фермі слушно вважав, що, оскільки у нерелятивістському наближенні "великі" компоненти задовольняють рівняння Шрьодінгера, то можна забути про рівняння Дірака та "малі компоненти" і вважати, що $\psi(r)$ – це шрьодінгеровська хвильова функція. Для Фермі це було ***очевидно*** і звичайно воно само так і є, але це ***зовсім не так для атома водню***! У 1928 р. Дарвін з'ясував [38], що для атома водню $\psi(0) = \infty$! Фермі посилався на статтю Дарвіна у своїй статті 1930 р., але про нескінченність $\psi(0)$ він забув і згадав про неї через три роки у статті 1933 р. [39], написавши про формулу (10): "*Втім,* ***очевидно****, що ця формула у релятивістському випадку не може бути застосована*". Стаття [39] написана з Еміліо Сегре, але розібратися з нескінченністю $\psi(0)$ Фермі допомагав Етторе Майорана.

Нескінченність $\psi(0)$ пов'язана з тим, що сингулярність задачі Кеплера в кулонівському полі стає ще більшою у релятивістському випадку (до сингулярності $1/r$ додається сингулярність $1/r^2$). Але в дійсності (у природі) ніякої сингулярності та пов'язаної з нею нескінченності немає. Дарвін та Фермі розглядали точковий електрон у полі точкового протону. Але ж протон зовсім не точковий. Вихідом з цього становища є врахувати неточковість протону. Це було вперше зроблено в 1945 р. Померанчуком і Смородинським [40], вони розглянули протон як рівномірно заряджену сферу з радіусом 1,2 фм (1 фм = 10^{-15} м – фермі, фемтометр). Значення діраковської хвильової функції $\psi(0)$ виявилось скінченним та дуже близьким до значень шрьодінгеровської хвильової функції. Інтуїція Фермі не підвела [14].

[13] *"Я скористався теорією електрона Дірака, бо більш проста* ***теорія Паулі дає неправильний результат****"* – писав Фермі у короткому повідомленні про свої дослідження у Nature [37]. Ландау та Ліфшиць ***одержали правильну (???) формулу Фермі саме з теорії Паулі***.

[14] Інколи інтуїція підводила навіть великого Енріко Фермі. Лаура Фермі, яка не без успіху боролася зі звичкою Енріко зловживати словом "***очевидно***", згадувала [41], що зима 1929 р. в Італії була надзвичайно лютою, температура в кімнатах, у яких мешкало молоде подружжя, не піднімалась вище +8 °С. Теоретичні вказівки Енріко, як топити грубу, не допомагали. Коли у Лаури виникла ідея купити зимові рами для вікон, Енріко засів за тривалі обчислення і з'ясував, що проникнення холодного повітря крізь рами ззовні настільки незначне, що зимові рами, ***очевидно***, не потрібні. Через кілька місяців "Його превосходительство" Енріко (Муссоліні щойно призначив Фермі академіком Королівської академії Італії) виявив помилку в своїх обчисленнях – не туди поставив кому у десятичний дріб – і дав згоду на купівлю рам.

Якщо для магнітних моментів електрона, протону та дейтрону взяти екпериментальні дані 1947 р., то, згідно з формулою Фермі, (10),

$$\begin{aligned} &\nu_H = 1416,90(54)\ \text{МГц}, \quad \lambda_H = 21{,}1583(81)\ \text{см}, \\ &\nu_D = 326,53(16)\ \text{МГц}, \quad \lambda_D = 91{,}812(44)\ \text{см}. \end{aligned} \tag{11}$$

В 1947 р. виявилось, що формули (11) суперечать експериментам, бо згідно з вімірюваннями групи Рабі [42]:

$$\begin{aligned} &\nu_H = 1421{,}3(2)\ \text{МГц}, \quad \lambda_H = 21{,}090(3)\ \text{см}, \\ &\nu_D = 327{,}37(3)\ \text{МГц}, \quad \lambda_D = 91{,}576(8)\ \text{см}. \end{aligned} \tag{12}$$

Розбіжності між формулами (11) та (12) пояснюються тим, що *магнітний момент електрона не дорівнює магнетону Бора,* як то випливало з теорії Дірака. Це було важливе відкриття, яке по значимості можна порівняти з відкриттям Кеплером еліптичності планетних орбіт. З цього відкриття почався новітній розвиток квантової електродинаміки, квантової теорії поля, теорії елементарних частинок.

Незабаром, у тому ж 1947 р. Фолі та Каш [43] виявили у своїх експериментах, що магнітний момент електрона дорівнює

$$\mu_{e\,\exp\,\text{er.}} = \mu_B \times 1{,}0012(1), \tag{13}$$

а Швінгер [44] теоретично розрахував, що

$$\begin{aligned} &\mu_{e\ \text{theor.}} = \mu_B \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) = \mu_B \times 1{,}001162, \\ &\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \end{aligned} \tag{14}$$

Вимірювання магнітного моменту електрона 2008 р. [45]:

$$\mu_{e\,\exp} = \mu_B \times 1{,}001\ 15965218073\ (28) \tag{15}$$

добре узгоджуються з теоретичними обчисленнями [46],

$$\mu_{e\,\text{theor.}} = \mu_B \times 1{,}00115965218067(81). \tag{16}$$

Оскільки в теоретичні розрахунки входить стала тонкої структури α, то доречно навести і її сучасне експериментальне значення [47]

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}035999084(21)}. \tag{17}$$

Надтонке розщеплення в атомах водню і дейтерію також виміряно з великою точністю [48]:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_H &= 1420{,}4057517667(9)\ \text{МГц}, \\ \Delta\nu_D &= 327{,}384352522(2)\ \text{МГц}. \end{aligned} \tag{18}$$

Формула Фермі (10), з урахуванням правильного значення магнітного моменту електрона та скінченності мас протона і дейтрона, дає змогу обчислити лише перші п'ять цифр у цих числах. Щоб обчислити шосту та сьому значущі цифри, необхідно враховувати розподіл електричного заряду та магнітного моменту усередині протона і дейтрона, які визначаються кварковою структурою протона та протонно-нейтронною структурою дейтрона [50].

Повернемось до радіоастрономічних досліджень Шкловського. Раптовий крах "проекту 21 см" – це не остання пригода Шкловського, пов'язана с надтонкими переходами. Шкловський самотужки [15] обчислив довжини хвиль випромінювання переходів надтонкої структури $1s$-терма не тільки водню (21,1 см), а також і дейтерію (91,6 см), але знайти цю хвилю у радіовипромінюванні Галактики за життя Шкловського не вдалося. Обчисливши у 1956 р. [51] відповідні частоти переходів, Шкловський припустив можливе існування в радіоспектрі Галактики двох ліній випромінювання атомарного азоту ^{14}N, у якого основний стан $^4S_{3/2}$ розщеплюється на три рівні надтонкої структури зі спінами 5/2, 3/2 та 1/2. У 1958 р. частоти переходів ($5/2 \to 3/2$) та ($3/2 \to 1/2$), обчислені Шкловським, були виміряні у земних умовах [52],

$$\begin{aligned} \nu_{5/2\to 3/2} &= 26{,}1275 \pm 0{,}0005\ \text{МГц}, \\ \nu_{3/2\to 1/2} &= 15{,}6772 \pm 0{,}0005\ \text{МГц}. \end{aligned} \tag{19}$$

Шкловський знайшов надійних людей, які з ентузіазмом взялися за те, щоб знайти хвилі з частотами (19) у радіовипромінюванні Галактики. Це була група харківських радіоастрономів з ІРЕ АН УССР, очолювана С.Я. Брауде. Для того, щоб знайти лінію радіовипромінювання азоту ^{14}N, під Харковом, біля села Граково, побудували радіотелескоп УТР-2 (**У**країнський **Т**-подібний **Р**адіотелескоп **2**-ї модифікації), до цього часу найбільший та найкращий у світі радіотелескоп в декаметровому діапазоні радіохвиль, який працює з 1970 р. 17 червня 1978 р. УТР-2 зафіксував сигнал з частотою 26,13 МГц від залишку наднової *Кассіопея A (Кас A)* у сузір'ї Кассіопея [16]. Харків'яни Шкловського не підвели, знайшли те, що шукали.

24 січня 1980 р. у *Nature* була опублікована стаття Коноваленко та Содіна *"Нейтральний ^{14}N у міжзоряному середовищі"* [54], у якій автори повідомляли про спостереження ***поглинання*** радіохвиль від *Кас A* на частоті $26{,}13 \pm \pm\, 0{,}20$ МГц. Як реакція на цю публікацію 23 жовтня 1980 р., у *Nature* з'явилась стаття Блейка, Кратчера та Ватсона [55], у якій автори піддали сумніву інтерпретацію походження спостереженого на УТР-2 сигналу і виразили припущення, що на УТР-2 спостерігали рекомбінаційну лінію випромінювання високозбудженого (рідберґівського) атому вуглецю C631α [17]. 12 листопада 1981 р. Коноваленко та Содін повідомили в *Nature* про спостереження на УТР-2 рекомбінаційних ліній випромінювання C630α та C640α [56]. Пізніше на УТР-2 були також спостережені радіолінії C603α, C611α, C621α, C628α–C638α, C640α, C686α, C732α, C790β–C802β [57].

---

[15] Невідома Шкловському формула Фермі на той час вже була не тільки у підручнику Ландау та Ліфшиця [35], у 1949 р. вийшла книга [49], у якій була наведена формула Фермі, і обговорювались есперименти групи Рабі 1947 р. [42].

[16] Потужне джерело радіовипромінювання на відстані 11000 світових років від Землі, залишок наднової типу II, Кассіопея A, було виявлено радіоастрономами у 1948 р. [53].

[17] Рідберґівські атоми з $n \approx 100$–1000 у міжзоряному просторі утворюються внаслідок рекомбінації, тобто спочатку іонізації атому, а потім захоплення втраченого електрона. Звідси назва рекомбінаційні лінії.

Пояснимо вищенаведені позначення Cnα. Скористаємося формулою Рідберґа для обчислення частот випромінювання рідберґівського атома вуглецю

$$\nu_{n+k\to n} = \frac{e^4}{4\pi\hbar^3}\,\frac{m_e m_N}{m_e+m_N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+k)^2}\right) =$$

$$= \frac{\nu_0}{1{,}000039}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+k)^2}\right), \qquad (20)$$

де $\nu_0 = e^4/4\pi\hbar^3 = 3{,}2898419602508(64)\cdot 10^{15}$ Гц – константа Рідберґа, яка, зрозуміло, з такою точністю[18] Коноваленко і Содіну була не потрібна, але, на щастя, точність спостережень на УТР-2 виявились достатньою, щоб з'ясувати, випромінювання яких саме атомів спостерігається.

Формула Рідберґа дає можливість обчислити частоту випромінювання атома при переході електрона з $n+k$-го рівня на n-й рівень. Перехід $n+1 \to n$ для атому вуглецю (C – Carboneum) позначається як Cnα, перехід $n+2 \to n$ як Cnβ і т.д. Згідно з (20) частота лінії C630α дорівнює 26,25025 МГц, лінії C631α – 26,12574 МГц, а лінії C640α – 25,03982 МГц. Відповідні спостереження Коноваленко та Содіна [54, 56] були 26,250, 26,126 та 25,040 МГц. Цим було доведено, що всі три лінії – рекомбінаційні радіолінії (РРЛ) рідберґівських атомів саме вуглецю.

Отже, завдяки Й.С. Шкловському, радіоастрономічна команда С.Я. Брауде вийшла на світовий рівень, у Харкові були зроблені видатні радіоастрономічні відкриття (і не тільки ті, про які йде мова, наприклад, на УТР-2 одержані важливі результати щодо природи радіовипромінювання Юпітера [58]). Дослідження на УТР-2 продовжуються, а Україна залишається світовим лідером у радіоастрономічних спостереженнях у декаметровому діапазоні. Про внесок Й.С. Шкловського у розвиток низькочастотної радіоастрономії можна прочитати у статті О.О. Коноваленко [60], про історію розвитку радіоастрономії у Харкові у книгах [57, 59], та у статті [61], а про рекомбінаційні радіолінії (РРЛ) рідберґівських атомів у книзі [62], у якій багато уваги присвячено досягненням харків'ян.

[18] В зв'язку з недавньою (2019 р.) радикальною реформою системи СІ, ми обговоримо питання про точність фундаментальних фізичних констант у Додатку до статті.

6. Рідберґівські атоми та адіабатичні інваріанти, електрони у магнітному полі та квантові точки Фока–Дарвіна, квантовий ефект Холла, рідберґівський атом водню у магнітному полі як ангармонічний осцилятор.

6.1. Адіабатичний інваріант Больцмана та рідберґівські атоми

Почнемо з подій більш ніж столітньої давнини. 28 серпня 1913 р. П. Еренфест писав у листі до А.Ф. Йоффе: *"Робота Бора "Квантово-механічні наслідки закону Бальмера" доводить мене до відчаю: якщо формулу Бальмера можна одержати **у такий спосіб**, то я маю викинути всю фізику на смітник (і сам податися туди ж)"* [63]. Робота Бора багатьох доводила до відчаю, але Еренфест більш ніж хто-небудь інший, був підготовлений до цієї роботи. Наприкінці 1912 р. він знайшов правило квантування ***довільного*** періодичного руху. Квантування моменту кількості руху, на якому базувалась теорія Бора, було найпростішим висновком теорії Еренфеста, згідно з якою, гіпотезу Планка можна узагальнити у такий спосіб: треба квантувати адіабатичний інваріант Больцмана $2\tau\bar{T}$, де τ – період руху, $\bar{T}$ – середнє значення кінетичної енергії T за період руху,

$$2\tau\bar{T} = nh. \qquad (21)$$

Досить кількох рядків, щоб з формули Еренфеста (21) та теореми віріалу одержати і квантування гармонійних коливань по Планку, і квантування Бора–Зоммерфельда ***довільних*** еліптичних орбіт в атомі водню, (докладніше про це, та відповідні посилання див. [32]). У загальному випадку однорідного потенціалу $U(\lambda r) = \lambda^N U(r)$ із теореми віріалу [64], $\bar{T} = \frac{N}{2}\bar{U}$, маємо ($\nu = 1/\tau$):

$$E_n = \bar{E} = \bar{T} + \bar{U} = \frac{N+2}{N}\bar{T} = n\frac{N+2}{N}\frac{h\nu}{2}. \qquad (22)$$

Для гармонійних коливань ($N = 2$) маємо правило квантування Планка

$$E_n = nh\nu. \qquad (23)$$

Для атома водню ($N = -1$)

$$E_n = -n\frac{h\nu}{2}. \qquad (24)$$

Враховуючи, що для класичного кеплеровського руху електрона у потенціалі $U = -e^2/r$, енергія визначається лише частотою обертань, $E^3 = -\pi^2 m_e e^4 \nu^2/2$ [64], маємо правило квантування Бора–Зоммерфельда для довільних еліптичних орбіт,

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}. \tag{25}$$

Звідси для частот випромінювання атома водню одержуємо формулу Рідберґа (20) (без урахування маси протона)

$$\nu_{n+k\to n} = \frac{E_{n+k} - E_n}{h} = \frac{e^4 m_e}{4\pi\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+k)^2}\right) = \\ = \nu_0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+k)^2}\right), \tag{26}$$

ν_0 – константа Рідберґа.

Коли у 1913 р. Бор одержав формулу (25) для випадку кругових орбіт, виникло слушне питання: якщо електрон обертається по колу з частотою ν, він повинен випромінювати електромагнітні хвилі на частотах ν, 2ν, 3ν, ... (відповідні класичні формули були знайдені у 1912 р. Шоттом [65]), чи випромінює ці хвилі атом Бора? Відповідь така: ці хвилі випромінюються атомами водню лише у класичній границі, при $n \gg 1$, тобто рідберґівськими атомами. Так, на УТР-2 у 2000–2003 рр. спостерігались одночасно дві паралельні серії декаметрових ліній вуглецю у напрямку Кассіопеї А [57], C628α–C638α та C790β–C802β. Ці лінії знаходяться у одній і тій же смузі частот шириною 1,2 МГц завдяки тому, що виконуються співвідношення $\sqrt[3]{2}\times(n(\alpha)+1) \approx n(\beta)+2$ між відповідними частотами, наприклад, $\sqrt[3]{2}\times 629 = 792{,}5$.

Впевнимось у тому, що при $n \gg 1$ рідберґівські електрони випромінюють хвилі на частотах ν, 2ν, 3ν.... Згідно з (24) та (25), частота обертання електрона

$$\nu = -\frac{2E_n}{hn} = \frac{e^4 m_e}{2\pi\hbar^3}\frac{1}{n^3}. \tag{27}$$

А згідно з (26), при $n \gg 1$

$$\nu_{n+k\to n} = \frac{E_{n+k} - E_n}{h} \approx \frac{e^4 m_e}{2\pi\hbar^3}\frac{k}{n^3} = k\nu, \tag{28}$$

що повністю узгоджується з випромінюванням класичного електричного заряду, який рухається по класичній орбіті.

Те, що правило квантування Еренфеста (21) працює у випадку атому водня, не є дивним, бо, як ми бачили у розділі 4, кеплерівський рух електрона у потенціалі $U \sim 1/r$ – це “квадрат” еліптичного руху частинки у квадратичному (параболічному) потенціалі.

Справедливість правила Еренфеста у квазікласичному наближенні доводиться у квантовій механіці для випадку довільного потенціалу $U(r)$, у якому є зв'язані стани з $n \gg 1$. Але є важливі фізичні задачі іншого типу – це, наприклад, дослідження властивостей атомів у зовнішньому магнітному полі. В цих випадках правило Еренфеста (якщо його не узагальнити) стає хибним. Корисно розібратися, чому це так.

6.2. Електрони у магнітному полі та квантові точки Фока–Дарвіна

Правило Еренфеста не спрацьовує у найпростішому випадку заряду, який обертається по колу з частотою ν у сталому магнітному полі H. Його енергетичні рівні визначаються формулою (21), $E_n = nh\nu/2$. При переході $n \to n-1$ заряд випромінює фотон з частотою $\nu/2$. Це суперечить тому, що при $n \gg 1$ ця частота має дорівнювати ν. Покажемо, що одержати з правила Еренфеста ***правильне*** правило квантування $E = nhv$ для заряду, що рухається у магнітному полі, можна, якщо перейти у систему відліку, яка ***обертається***.

Запишемо рівняння руху заряду – e, з масою m_e, що рухається у площині (x, y) у магнітному полі H з циклотронною кутовою частотою $\omega = eH/m_e c$, у вигляді

$$\ddot{z} - i\omega\dot{z} = 0, \tag{29}$$

де $z = x + iy$. У новій системі відліку, $(\tilde{x}, \tilde{y})$, що обертається з ларморовою частотою $\omega/2$, $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} = \exp(-i\omega t/2)\, z$, маємо

$$\ddot{\tilde{z}} + (\omega/2)^2\tilde{z} = 0. \tag{30}$$

Зауважимо, що тривіальний перехід від (29) до (30) висвітлює важливу властивість задачі про рух зарядів у сталому магнітному полі. Еквівалентність двох дуже простих рівнянь (29) та (30) означає еквівалентність руху заряду у магнітному полі і руху тіла по еліпсу Гука (див. розділ 4). А оскільки еліпс Гука в квадраті є еліпс Кеплера, ми виявили цікаву аналогію: *класична задача про*

рух заряду у сталому однорідному магнітному полі *математично еквівалентна* ***задачі Кеплера*** *про рух заряду (або маси) у кулонівському (або ньютоновському) потенціалі.*

Перейшовши у систему відліку, що обертається, позбуваємось магнітного поля, а квантувати гармонійні коливання ми вміємо. При цьому одержуємо ніби неправильне правило квантування, $E = n\hbar\omega/2$. Але зараз все правильно. У системі, що обертається, всі кола, по яких обертались заряди у початковій системі відліку з частотою ω, перетворюються на кола, або ж на еліпси, по яких заряди обертаються з частотою $\omega/2$. При переході $n \to n-1$ такий заряд випромінює фотон з частотою $\omega/2$, як і повинно бути. Будемо тепер повільно повертатися у початкову систему координат і скористаємося *адіабатичною гіпотезою Еренфеста* (такий вираз вперше використав Айнштайн у 1914 р.): *кожний цілком певний з точки зору квантової теорії стан переходить при адіабатичній зміні параметрів системи знову в певний стан, що характеризується тими ж квантовими числами.* А це означає, що під час нашого повернення до початкової системи, всі частоти обертання $\omega/2$ повернуться до значення ω, а наше квантове число n не зміниться, і ми одержимо ***правильне*** при $n \gg 1$ правило квантування енергетичних рівнів у магнітному полі [19],

$$E_n = n\hbar\omega. \tag{31}$$

Формула (31), точніше, формула $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, для довільних n вперше була одержана Фоком у 1928 р. [66], але тоді її ***майже ніхто не помітив***, у тому ж році релятивістське узагальнення цієї формули, $E_n = \sqrt{m_e^2c^4 + 2(n\hbar\omega)^2}$, одержав Рабі [20] [67] з релятивістського рівняння Дірака, яке щойно було відкрито, але квантування Рабі було сприйнято лише як якийсь ***релятивістський курйоз***. А ще раніше, у 1923 р. Вільсон [68] з'ясував, як узагальнити адіабатичний інваріант Больцмана $2\tau\bar{T}$ на випадок заряду e, що обертається у магнітному полі $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Треба зробити таку заміну ($\mathbf{p}, \mathbf{q}$ – імпульс та координата заряду):

$$2\tau\bar{T} = \oint \mathbf{p}d\mathbf{q} = nh \to \oint \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) d\mathbf{q} = nh. \tag{32}$$

Формула (32) вирішувала квазікласичну, при $n \gg 1$, проблему квантування. Заміна в (32) $n \to n + 1/2$, як виявилось пізніше, дає точну формулу для обчислення рівнів енергії електрона у сталому магнітному полі та у квадратичній одновимірній потенціальній ямі, для довільних n,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{33}$$

Фок і Рабі розв'язували задачі квантування вже не старої, а нової квантової механіки, рівняння Шрьодінгера і рівняння Дірака. Чому ж майже ніхто не помітив роботу Фока [66]? Шукати енергетичні рівні заряду, що обертається у магнітному полі, Фоку було нецікаво. Простою для нього була і така задача: *заряд міститься у квадратичній потенціальній ямі, яка, в свою чергу, знаходиться у магнітному полі, треба знайти енергетичні рівні.* Проста для Фока, для багатьох інших фізиків це була ***надто складна*** задача, до того ж незрозуміло, навіщо потрібна. Про те, навіщо вона потрібна, трохи пізніше.

Класичній задачі Фока відповідає таке рівняння,

$$\ddot{z} - i\omega\dot{z} + \omega_0^2 z = 0. \tag{34}$$

Рухові з певною частотою, $z = R \times \exp(-i\Omega t)$, відповідають дві частоти Ω_1та Ω_2, $\Omega_{1,2} = \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$. Рівні енергії, для довільних цілих n_1та n_2, які випливають з рівняння Шрьодінгера і були обчислені Фоком [66],

$$E(n_1, n_2) = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar|\Omega_1| + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar|\Omega_2| =$$
$$= \hbar\left[\frac{\omega}{2}(n_1 - n_2) + (n_1 + n_2 + 1)\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}\right]. \tag{35}$$

При $\omega_0 = 0$ (позбулись ями!) маємо формулу (33) $E_{n_1} = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega$. При $\omega = 0$ (позбулись магнітного поля!) маємо формулу

$$E_n = (n+1)\hbar\omega = (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega, \tag{36}$$

[19] Все відбувається саме так, як у випадку маятника Релея–Лоренца–Айнштайна, згідно роз'ясненням Айнштайна на I Сольвеївському конгресі (1911): " ...енергія коливань продовжує дорівнювати $h\nu$, якщо вона спочатку дорівнювала $h\nu$; енергія коливань змінюється пропорційно ν" [32].

[20] Формула Рабі – це точна формула, але в ній, завдяки магнітному моменту електрона, зникли "нульові коливання енергії", з $n + 1/2$ зникла 1/2.

тобто точну формулу для квантування у двовимірній квадратичній ямі. Всі рівні в ямі, як легко обчислити, $(n+1)$-кратно вироджені. Як побачимо, енергетичні рівні заряду, що рухається у магнітному полі, теж вироджені, але вироджені нескінченно-кратно.

У 1931 р. задачу Фока розв'язав Дарвін [69]. Про статтю Фока [66] він нічого не знав, але знав статтю [70], у якій Ландау довів, що квантовий газ вільних електронів *"має відмінний від нуля орбітальний діамагнетизм, ... який точно дорівнює одній третині спінового парамагнетизму Паулі"* [71]. Стаття Дарвіна і була реакцією на статтю Ландау. Він писав: *"У недавній роботі Ландау показав, що коли електрони вільно рухаються у магнітному полі, вони, крім парамагнітного ефекту завдяки спіну, виявляють діамагнітний ефект завдяки їх руху. Цей результат є досить несподіваним, оскільки цілком суперечить класичному випадку"*[21]. Діамагнетизм вільних електронів є суттєво квантовим ефектом, але щоб його спостерігати, рух електронів треба обмежити деякими стінками. Ландау помістив свої електрони у прямокутний ящик, а Дарвін замінив вертикальні стінки квадратичною потенціальною ямою. Це і привело його до задачі Фока.

Формулу (35) Фок спочатку (як пізніше і Дарвін) одержав у такому вигляді:

$$E(m,N) = \hbar\left[\frac{\omega}{2}m + (2N+|m|+1)\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2+\omega_0^2}\right], \tag{37}$$

де $m = n_1 - n_2 = 0,\ \pm1,\ \pm2\ldots$ – азимутальне квантове число, $N = 0, 1, 2, \ldots$ – радіальне квантове число. За відсутності потенціальної ями ($\omega_0 = 0$) маємо

$$E\left(n(m,N)\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \\ = \left(N + \frac{m+|m|}{2} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \\ m = n, n-1, \ldots 0, -1, -2, \ldots -\infty. \tag{38}$$

[21] Теорема Бора–ван Левен, про яку ще не забули у 1930 р., стверджувала, що "в однорідному магнітному полі і в тепловій рівновазі намагніченість класичного електронного газу не виникає". Ван Левен (1921 р.) [72] довела цю теорему незалежно від Бора (1911) [73]. Строгому доведенню цієї теореми присвячена стаття [74].

Відзначимо, що Фок та Дарвін були першими, кто розглянув "квантову точку" у магнітному полі, вираз "квантова точка Фока–Дарвіна" ("Fock–Darwin quantum dot") є загальновживаним у відповідній літературі [75–77]. Квантові точки, які створюються та вивчаються в лабораторіях, слушно називають штучними атомами, бо в них звичайно поміщають багато електронів, які розміщуються на дозволених квантових рівнях, створюючи оболонки, якщо рівні вироджені. Квантові точки з повністю заповненими оболонками, як і в випадку звичайних атомів – це штучні атоми, які відзначаються особливою стабільністю.

6.3. Виродження рівнів енергії у магнітному полі та квантовий ефект Холла

Як з'ясував Дарвін, саме від'ємні значення m відповідають і за діамагнетизм вільних електронів Ландау, і за зникнення діамагнетизму у класичній границі [69]. А нескінченно-кратне виродження рівнів енергії у магнітному полі (за відсутності ями) завдяки від'ємним m (38) має настільки фундаментальні фізичні наслідки, що з ним пов'язані дві нобелівські премії за відкриття та пояснення квантового ефекту Холла (КЕГ), цілочисельного та дробового (К. фон Клітцинг, 1985 р.; Р. Лафлін, Г. Штермер, Д. Цуї, 1998 р.).

Що означає виродження рівнів енергії завдяки від'ємним m? Рівняння руху електричного заряду у магнітному полі (29), $\ddot{z} - i\omega\dot{z} = 0$, мають дуже важливі для теорії квантового ефекту Холла інтеграли руху, координати центра кола, по якому обертається заряд, x_0 та y_0, або

$$z_0 = x_0 + iy_0 = z + \frac{i}{\omega}\dot{z}, \\ z_0^* = x_0 - iy_0 = z^* - \frac{i}{\omega}\dot{z}^*. \tag{39}$$

Зрозуміло, що довільні функції від z_0 та z_0^* теж є інтегралами руху. Обчислимо інтеграл руху

$$r_0^2 = |z_0|^2 = x_0^2 + y_0^2 = \\ = \underbrace{\dot{z}\dot{z}^*/\omega^2}_{} + \underbrace{z^*z + i(z^*\dot{z} - \dot{z}^*z)/\omega}_{} = \\ = \underbrace{2E/m_e\omega^2}_{} - \underbrace{2M/m_e\omega}_{}. \tag{40}$$

Згідно з (40) інтеграл руху r_0^2 виражається через два інтеграли руху, кінетичну енергію заряду E та момент кількості руху M (відносно точки $z = 0$). Слід відзначити, що зв'язок між r_0^2, E та M зберігається і у квантовому випадку, коли всі величини стають операторами [78]. Оскільки E та M квантуються, квантується також і r_0^2,

$$\pi r_0^2(n, m) = \left(n - m + \frac{1}{2}\right) S_0, \quad m = n, n-1, ...0, -1, -2, ... - \infty. \tag{41}$$

S_0 – площина, магнітний потік через яку дорівнює кванту потоку $\Phi_0 = hc/e$, тобто $S_0 = hc/eH$. Оператори $\hat{x}_0$ та $\hat{y}_0$ не комутують,

$$\hat{x}_0\hat{y}_0 - \hat{y}_0\hat{x}_0 = i\frac{S_0}{2\pi}, \tag{42}$$

звідки безпосередньо випливає формула (41). Фізичний зміст виродження рівнів енергії по m полягає в тім, що електричні заряди у площині, яка пронизується магнітним полем, мають можливість бути локалізованими поблизу будь-якої точки (x_0, y_0) але ця локалізація, згідно з (42), має квантові обмеження $\Delta x_0 \Delta y_0 \approx S_0$. У колі з площею $(n - m + \frac{1}{2})S_0$, згідно з (41), у заряду є $n - m$ можливостей десь розміститися, це означає, що у колі може розміститися не більше $n - m$ електронів з фіксованим напрямком спіну (принцип Паулі). Отже доходимо висновку: *максимальна густина електронів у фіксованому квантовому стані на площині, яку пронизує магнітне поле, дорівнює* $1/S_0$, *а густина заряду* $\rho_0 = e/S_0$ [22].

Розгляньмо тепер напівпровідникову плівку, яку, перпендикулярно до плівки, пронизує магнітне поле H_0 [23]. Нехай плівка заповнена максимально щільно електронами, які знаходяться на першому енергетичному рівні Ландау. Якщо ми почнемо рухатися повз плівку (вздовж її довжини) із швидкістю $-V$, у нашій системі відліку виникне електричний струм $j = \rho_0 V/\sqrt{1 - V^2/c^2} = e/S_0\, V/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, а, крім того, через перетворення Лоренца, виникне електричне (холлівське) поле $E_H = V/c\, H_0/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, перпендикулярне до швидкості V та магнітного поля H. Отже, маємо

$$j = \frac{e}{S_0}\frac{V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{e^2}{h}\frac{H_0}{c}\frac{V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{e^2}{h}E_H = \sigma_0 E_H. \tag{43}$$

Відзначимо, що рівняння (43) – це одне з трьох релятивістських коваріантних рівнянь, які описують рух електронів у двовимірній площині (точніше рух центрів кол обертань електронів),

$$j_\mu = \frac{e^2}{2h}\varepsilon_{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho},$$

або

$$J_i = \frac{e^2}{h}\varepsilon_{ik}E_k, \quad J_0 \equiv \rho = \frac{e^2}{h}H, \tag{44}$$

де $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2,\ i, k, l = 1, 2,\ F_{12} = H,\ F_{i0} = E_i$, $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$ та ε_{ik} – тензори Леві–Чівіта, $\varepsilon_{012} = 1$ і $\varepsilon_{12} = 1$.

Якщо у напівпровідниковій плівці електрони заповнюють n рівнів Ландау, то виникає квантовий ефект Холла $j = n\sigma_0 E_H$. У плівці з шириною L та довжиною L^* зв'язок між повним струмом $I = jL$ та холлівською напругою $U_H = E_H L$ має вигляд $I = n\sigma_0 U_H$ і для квантування холлівського опору $R_H(n)$ одержуємо формулу

$$R_H(n) = \frac{h/e^2}{n} = \frac{R_\text{K}}{n}, \tag{45}$$

де R_K – стала фон Клітцінга.

У 1980 р. фон Клітцінг одержав для R_K значення $R_{\text{K}-1980} = 25812{,}68 \pm 0{,}08$ Ом. Використовуючи рекомендоване значення сталої тонкої структури (сталої Зоммерфельда) на 2019 р. [47] одержимо для

$$R_{\text{K}-2019} = \frac{h}{e^2} = 2\pi\frac{\hbar c}{e^2}\frac{1}{c} = 2\pi\frac{1}{\alpha}\frac{1}{c} = 2\pi \times 137{,}035999084(21) \times 29{,}9792458 = 25812{,}8074452(39)\text{ Ом}. \tag{46}$$

[22] У 1979 р., за рік до відкриття К. фон Клітцінгом КЕГ [79], Ааронов та Кашер [80] довели теорему, що має до КЕГ найбезпосередніше відношення: Нехай двовимірну площину пронизує магнітне поле $H(x, y)$, магнітний потік Φ якого є скінченним, тоді кратність виродження N основного стану електрона зі спіном є цілою частиною відношення Φ/Φ_0, $N = \{\Phi/\Phi_0\}$. Детальніше про це див. [81].

[23] Напівпровідникова плівка потрібна лише для того, щоб локалізувати електрони на двовимірній площині. Вважається, що поведінка електронів на цій площині не відрізняється від поведінки електронів у вакуумі. Це припущення з великою точністю підтверджується експериментально.

Обчислюючи (46), ми скористалися співвідношенням Ом = Вольт/Ампер, яке дає змогу виразити швидкість світла через оми, $1/c \approx 30$ Ом, а точніше,

$$\text{Ом} = \frac{\text{Кл/м}}{2{,}99792458^2 \cdot 10^9} \Big/ \text{Кл/сек} =$$

$$= \frac{1}{29{,}9792458} \frac{1}{c}, \tag{47}$$

тобто $1/c = 29{,}9792458$ Ом [82]. Саме це співвідношення між швидкістю світла та омами використовував фон Клітцінг в 1980 р. Формула (46) однозначно пов'язує сталу фон Клітцинга і сталу Зоммерфельда. Саме в цьому розумів значення свого фундаментального відкриття фон Клітцинг, назвавши свою нобелівську публікацію [79] *"Новий метод надточного визначення сталої тонкої структури через вимірювання квантованого холлівського опору."*

Зрозуміло, що фон Клітцінг, замість того, щоб бігти повз напівпровідникову плівку із швидкістю майже 26 км/год (зараз ми цю швидкість обчислимо), підключав плівку $L \times L^* = 50$ мкм $\times$ 140 мкм до джерела електричної напруги. Напруга підбиралась такою, щоб електрони, які заповнють 4 рівні Ландау, давали електричний струм 1 мкА вздовж L^*. Плівка знаходилась у магнітному полі 18 Тл і спостерігалась холлівська напруга $U_H = 6453{,}17 \pm 0{,}02$ мВ. Відповідні холлівське поле і швидкість руху електронів були $E_H = 129$ В/м та $V = (E_H/H_0)\, c = 7{,}17$ м/с. Оскільки в експериментах фон Клітцинга у плівці підтримувався сталий електричний струм $I = enV_nLH/\Phi_0 = 1$ мкА, де V_n – швидкість електронів при n заповнених рівнях Ландау, то $nV_n = \text{const}$, $nV_n = 4V_4 = 4 \times 7{,}17$ м/с, і маємо формулу для швидкості електронів $V_n = 28,68/n$ м/с.

6.4. Рідберґівській атом водню у магнітному полі як ангармонічний осцилятор та суперсиметрична квантова механіка

Розглянемо класичний електрон з зарядом $-e$ і масою m_e. Нехай електрон рухаєтья навколо кулонівського центра з зарядом e у площині (x, y), перпендікулярно до якої направлено магнітне поле H. Рівняння руху електрона у комплексній площині $z = x + iy$, $|z|^2 = r^2$,

$$\ddot{z} - i\omega\dot{z} + \alpha\frac{z}{|z|^3} = 0, \tag{48}$$

схожі на рівняння для руху заряду у квантовій точці Фока–Дарвіна (34), але мають сингулярність у початку координат. У рівнянні (48) $\omega = eH/m_ec$ – циклотронна частота, $\alpha = 2e^2/m_e$. У системі відліку $(\tilde{x}, \tilde{y})$, що обертається з ларморовою частотою $\omega/2$, $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} = \exp(-i\omega\, t/2)\, z$, маємо

$$\ddot{\tilde{z}} + (\omega/2)^2\tilde{z} + \alpha\frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|^3} = 0. \tag{49}$$

Переходячи до нової комплексної змінної $w = \xi + i\zeta = \sqrt{\tilde{z}/2} = \sqrt{(\tilde{x} + i\tilde{y})/2}$ та до нового часу τ, $d\tau = dt/|\tilde{z}|$, одержуємо, замість (49), рівняння ангармонічного осцилятора без сингулярності,

$$w'' + \Omega^2 w + 3(\omega/2)^2|w|^4 w = 0, \tag{50}$$

де $w'' \equiv d^2w/d\tau^2$, Ω^2 – інтеграл руху рівняння (49),

$$\Omega^2 = -\frac{1}{4}\left(|\dot{\tilde{z}}|^2 + (\omega/2)^2|\tilde{z}|^2 - \frac{\alpha}{|\tilde{z}|}\right), \tag{51}$$

пов'язаний с енергією електрона $E = -2m_e\Omega^2$, рівні якої, E_n, нам і треба знайти.

Зробимо припущення, слушність якого підтверджується порівнянням обчислених і спостережених рівнів енергії W_n [83]: *орбітальний момент руху електрона у системі відліку, що обертається, дорівнює нулю.* Будемо вважати, що електрон у цій системі рухається вздовж осі $\tilde{x}$, $\tilde{x} \equiv r \geq 0$, відповідне ξ може бути як додатним, так і від'ємним. Замість (50) маємо

$$\xi'' + \Omega^2\xi + 3(\omega/2)^2\xi^5 = 0. \tag{52}$$

Проквантуємо інтеграл руху рівняння (52),

$$W = 8m_e(\xi'^2 + \Omega^2\xi^2 + (\omega/2)^2\xi^6) = T + U. \tag{53}$$

Відповідне правило квантування Бора–Зоммерфельда має вигляд ($n \gg 1$)

$$\oint \sqrt{2m_e(W_n - U)}d\xi =$$

$$= 8\int\limits_0^{\xi_0} \sqrt{m_eW_n/2 + 2Em_e\xi^2 - m_e^2\omega^2\xi^6}\, d\xi = nh \tag{54}$$

(на верхній границі інтегрування підінтегральний вираз дорівнює нулю). Але тут виникає проблема, яку неважко подужати. Річ у тім, що W має цілком певне значення, $W = 2e^2$, в чому можна впевнитися, використавши співвідношення $\xi^2 = r/2$, $\xi'^2 = r\dot{r}^2/8$. Тобто, щоб інтеграл (54) квантувався, квантуватися має енергія E, що, власне, і потрібно

$$\int_0^{\xi_0} \sqrt{m_e e^2[1 + 2(E_n/e^2)\xi^2 - m_e(\omega/e)^2\xi^6]}d\xi = nh/8. \tag{55}$$

Переходячи до нової змінної $\lambda = \xi\sqrt{m_e e^2}/n\hbar$, запишемо (55) у вигляді

$$\int_0^{\lambda_0} \sqrt{1 + 2(E_n n^2/\hbar\omega_0)\lambda^2 - (\omega n^3/\omega_0)^2\lambda^6}\, d\lambda = \pi/4, \tag{56}$$

де частота $\omega_0 = e^4 m_e/\hbar^3 = 4\pi\nu_0$, ν_0 – константа Рідберґа. Відзначимо, що рівні E_n визначаються дуже малим відношенням $\omega/\omega_0 = H\,4{,}2543821\times\times10^{-10}$, якщо H вимірювати у теслах. У експериментах [83] поле H дорівнювало 2–4 Тл.

Рівняння (56) містить важливу інформацію про властивості енергетичного спектра рідберґівських атомів водню у магнітному полі, воно значить, що $E_n n^2/\hbar\omega_0$ є деякою функцією від $\beta = (\omega/\omega_0)n^3$, $E_n(\beta)n^2 = \hbar\omega_0 f(\beta)$. Це добре відомий емпіричний масштабний закон [83, 84], а рівняння (56) у вигляді

$$\int_0^{\lambda_0} \sqrt{1 + 2f(\beta)\lambda^2 - \beta^2\lambda^6}\, d\lambda = \pi/4 \tag{57}$$

дозволяє обчислити функцію $f(\beta)$, яка чудово узгоджується з експериментом [83]. Так, наприклад, неважко обчислити значення $\beta_0 = \left(\frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-\lambda^6}d\lambda\right)^3 = 1{,}5592627$, при якому $f(\beta) = 0$. Дещо важче одержати формулу, яка описує відому з дослідів [83] еквідистантність рівнів (квазірівнів Ландау) з різницею $3\hbar\omega/2$ в околі $E_n = 0$,

$$E_n = 3\hbar\omega/2\,(n - 33{,}21704/H^{1/3}), \tag{58}$$

де H вимірюється у теслах. При $H = 1$ Тл, знак енергії змінюється при переході від $n = 33$ до $n = 34$, але, згідно з (58), $E_{34} - E_{33} = 3\hbar\omega/2$. Якщо збільшити магнітне поле до $H = 1{,}1$ Тл, знак енергії зміниться при переході від $n = 32$ до $n = 33$, тобто розшташуванням рівнів енергії можна керувати.

Зрозуміло, що рівняння (55), а тим самим і (57), цілком еквівалентні звичайному правилу квантування Бора–Зоммерфельда [83] (для спрощення формул ми перейдемо до атомних одиниць $e = \hbar = m = 1$)

$$\int_0^{r_0} \sqrt{2E_n + 2/r - (\omega/2)^2 r^2}dr = n\pi \underset{r\rightleftarrows 2\xi^2}{\rightleftarrows}$$

$$\underset{r\rightleftarrows 2\xi^2}{\rightleftarrows} \int_0^{\xi_0} \sqrt{1 + 2E_n\xi^2 - \omega^2\xi^6}\, d\xi = n\pi/4. \tag{59}$$

Що ж нового дає перехід до нової змінної ξ та нового часу τ, крім того, що ми позбавились сингулярності $1/r$? Нові і корисні наслідки нашого переформулювання задачі виявляються при дослідженні рівняння Шрьодінгера, відповідного ангармонічному осцилятору: (52),

$$(-d^2/d\xi^2 - 8E_n\xi^2 + 4\omega^2\xi^6)\psi_n = 2\psi_n. \tag{60}$$

Розглянемо лише один приклад. Рівняння (58) є окремим випадком рівняння

$$[-d^2/d\xi^2 + \varepsilon\, dU/d\xi + U^2(\xi)]\psi_n = \lambda_n\psi_n \tag{61}$$

при $U = 2\omega\xi^3$, $\varepsilon_n = 4E_n/3\omega$, $\lambda_n = 2$. Якщо $\varepsilon = \pm 1$ і існує квадратично нормована функція

$$\psi_0^-(\xi) = \int_0^{\xi} e^{-U(\rho)}d\rho, \tag{62}$$

то у *суперсиметричної* пари рівнянь [85]

$$[-d^2/d\xi^2 \pm\, dU/d\xi + U^2(\xi)]\psi_n^\pm = \lambda_n^\pm\psi_n^\pm \tag{63}$$

співпадають всі власні значення, за винятком $\lambda_0^+ = 0$. Тобто,

$$\lambda_1^+ = 0,\ \lambda_2^+ = \lambda_1^-,\ \ldots,\ \lambda_{n+1}^+ = \lambda_n^-,\ \ldots. \tag{64}$$

Знайдемо тепер відстані між рівнями E_n в околі $E_n = 0$, які, як ми вже знаємо, еквідистантні. Розглянемо таке розташування рівнів, коли рівень $E_n < 0$, а рівень $E_{n+1} > 0$, і $|E_n| = E_{n+1}$. Якщо

$\varepsilon_n = 4E_n/3\omega = -1$, а $\varepsilon_{n+1} = 4E_{n+1}/3\omega = 1$, два відповідні рівняння (63) перетворюються у *суперсиметричну* пару рівнянь з одним і теж власним значенням $\lambda_n^- = \lambda_{n-1}^+ = 2$, а $E_{n+1} - E_n = 3\omega/2 \equiv$ $\equiv 3\hbar\omega/2$, як і повинно бути.

Ми щойно роглянули спрощений, але важливий випадок плоского рідберґівського атома водню у магнітному полі за допомогою спрощеної спінорної регуляризації задачі Кеплера. Цьому випадку також присвячена статті [86, 87]. Узагальнення спінорної регуляризації на випадок класичного та квантового тривимірного атома водню у сталих і однорідних електричному та магнітному полях докладно розглянуто у статті [88]. Тісний зв'язок між квантовою механікою руху заряду у магнітному полі та суперсиметричною квантовою механікою обговорюється у статті [89].

7. Висновки

Коли Ньютон писав писав свої *PRINCIPIA,* у нього був молодий помічник, секретар, переписувач, а, головне, добра нянька, яка в той час була конче потрібна Ньютону, Хамфри Ньютон (Humphrey Newton). Хамфри Ньютон згадував [26], що за п'ять років бачив, як старший Ньютон сміявся, лише одного разу, коли у нього спитали, навіщо вивчати Евкліда. Дійсно, це смішне питання. Без сумніву, багато чого, не менш важливого, ніж математика Евкліда, з'явилося за 2300 років з того часу, коли жив Евклід. Треба вивчати не лише Евкліда (а фізикам не лише Ландау–Ліфшиця) – це можливо, головний висновок цієї статті.

На жаль, навіть видатні люди можуть не помітити важливі речі, які були б їм цікаві та корисні. Так, спінорна регуляризація задачі Кеплера, прослизнула повз увагу Арнольда [23], який так чудово пов'язав корні квадратні із еліпсів Кеплера з перетворенням Жуковського. У даній статті за допомогою перетвореннь Жуковського роз'яснюється, що добування квадратного кореня з еліпса Кеплера і використання кеплеровської ексцентричної аномалії замість звичайного часу – це і є спінорна регуляризація задачі Кеплера.

Спінорна регуляризація узагальнена на нееліптичні орбіти, що використано для аналізу енергетичних спектрів рідберґівських атомів водню в магнітному полі. Деякі важливі властивості цих спектрів пояснюються суперсиметричною квантовою механікою.

Виявлена цікава властивість класичної задачі про рух заряду у сталому однорідному магнітному полі, ця задача математично цілком еквівалентна задачі Кеплера про рух маси у ньютоновському потенціалі.

Докладно розглянута історія пошуків харківськими радіоастрономами рекомбінаційних радіоліній рідберґівських атомів вуглецю на радіотелескопі УТР-2.

Автор сердечно вдячний О.С. Бакаю за постійний глибокий інтерес до цієї роботи та велику допомогу при написанні цієї статті.

ДОДАТОК

Про нові великі зміни у системі СІ та деякі супутні проблеми з новими омами та швидкістю світла

Необхідно відзначити, що відносно нещодавно, у травні 2019 р., сталася важлива подія: набула чинності нова, радикально змінена і вдосконалена, міжнародна система СІ [90], запропонована Міжнародним бюро ваг та мір (***Bureau International des Poids et Mesures, BIPM***). Як це проголошувалось у 1875 р., коли була заснована Паризька Метрична Конвенція [24], нова система теж прийнята ***A TOUS LES TEMPS, A TOUS LES PEOPLES (на всі часи, для всіх народів).*** Згідно з новими вдосконаленнями, відтепер стала Планка

$h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ В · А · с^2

та електричний заряд електрону

$e = 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ А · с

є ***точно*** визначеними фізичними константами, поряд із швидкістю світла

$c = 299792458$ м · с$^{-1}$,

яка стала фізичною константою ще у 1983 р. Сталу фон Клітцінга $R_{\rm K}$, відповідальну за надточне визначення ома, а також сталу Джозефсона [25] $K_{\rm J}$, відповідальну за надточне визначення вольта, відтепер і назавжди можна обчислити за допомогою простої арифметики,

$R_{\rm K} = h/e^2 = 25812{,}8074593045...$ Ом,

$K_{\rm J} = 2e/h = 483597{,}848416984...$ ГГц/В

(трьома крапками позначена можливість обчислення наведених чисел з довільною точністю).

[24] Україна, як країна-учасниця (з травня 2018 р.) Паризької Метричної Конвенції, має відтепер керуватися новою системою СІ.

[25] Про Джозефсона та Нобелівські премії, пов'язані з проблемами точності див. [91].

В зв'язку з цими нововведеннями виникли і деякі незручності (можливо, тимчасові, якби пощастило знайти ***точне*** значення сталої тонкої структури). Якщо ретельно придивитися до R_{K-2019} (46) та до нової R_K, то можна побачити, що десяті цифри в R_{K-2019} (виміряні) і в новій R_K (обчислені) відрізняються. Це сталося тому, що нова R_K визначає новий Ом, Ом$_{2019}$, який трохи менший, ніж старий Ом, який ми позначимо, як Ом$_{1948}$, бо він був жорстко (і ***точно***) пов'язаний з новим визначенням ампера, яке набуло чинності у 1948 р., Ом$_{1948}$ = 1,00000000055(15) Ом$_{2019}$.

Незважаючи на те, що c, h та e – це ***точно*** визначені фундаментальні фізичні константи, ми не можемо ***точно*** обчислити сталу тонкої структури $e^2/\hbar c$, бо відтепер ми не знаємо, як ***точна*** фундаментальна константа c пов'язана з новим, ***точно*** визначеним омом$_{2019}$. Якщо обчислити $1/c$ як $R_K/2\pi\alpha_{2019}$, то $1/c$ = 29,9792458163(46) Ом$_{2019}$.

Постраждала від модернізації системи СІ ще одна, раніше ***точна***, важлива величина – характеристичний імпеданс вакууму [92], який дорівнює $4\pi/c$ і всім потрібен саме в омах, бо через нього виражаються такі практично необхідні величини, як хвильові опори різноманітних ліній передач електромагнітних хвиль, наприклад, хвильовий опір звичайного телевізійного кабелю. Зрозуміло, співвідношення між $1/c$ і новим омом стане ***точним***, як тільки з'ясується ***точне*** значення сталої тонкої структури. Якщо воно взагалі існує, а не змінюється з часом, що цілком можливо [93].

1. G. Chr. Lichtenberg. *Vermischte Schriften, Band 2* (Dieterich, 1801).
2. P. Nowak. *Hodowanie troglodytów* (Kronos, 2014).
3. В.И. Арнольд. *Нужна ли в школе математика?* (МЦНМО, 2004).
4. Н.М. Карамзин. *История государства Российского, Том 1* (Терра, 1998).
5. Galileo Galilei. *Opere, Volume II* (Nicolo Bettoni e Comp, 1832).
6. Галилео Галилей. *Пробирных дел мастер* (Наука, 1987).
7. Ю.А. Белый. *Тихо Браге* (Наука, 1982).
8. Ю.А. Белый. *Иоганн Кеплер* (Наука, 1971).
9. V.E. Thoren, J.R. Christianson. *The Lord of Uraniborg: A Biography of Tycho Brahe* (Cambridge University Press) [ISBN: 978-0-521-35158-4].
10. M. Caspar. *Kepler* (Dover, 1993) [ISBN: 0-486-67605-6].
11. В. Стеклов. *Галилей* (ГИЗ, 1923).
12. A. Koestler. *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe* (CityplaceHutchinson, 1959) [ISBN: 0-14-019246-8].
13. J. Keplerus. *Mysterivm Cosmographicvm* (Gruppenbachius, 1596).
14. J. Keplerus. *Astronomia Nova* ΑΙΤΙΟΛΟΓΙΤΟΣ (Vögelin, 1609).
15. J. Keplerus. *Ioannis Keppleri Harmonices Mvndi* (Lincii Austriæ, 1619).
16. Ф. Араго. *Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров* (РХД, 2000), Т. 1.
17. A. Einstein. *Mein Weltbild* (*Ullstein Taschenbuch Verlag*, 2005) [ISBN: 978-3-548-36728-6].
18. W. Pauli, C. Jung. *Atom and Archetype: The Pauli/Jung Letters 1932–1958* (Princeton University Press, 2001) [ISBN: 9780415120784].
19. A. Pais. *The Genius of Science: A portrait gallery* (Oxford University Press, 2000) [ISBN: 9780198506140].
20. W. Pauli. The Influence of Archetypal Ideas on the Scientific Theories of Kepler. In: W. Pauli. *Writings On Physics And Philosophy* (Springer, 1994) [ISBN: 978-3-662-02994-7].
21. M.M. Nieto. *The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory* (Pergamon Press, 1972) [ISBN: 978-1483126944].
22. M.A. Blagg. On a suggested substitute for Bode's Law. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **73**, 414 (1913).
23. V.I. Arnold. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke* (Birkhäuser Verlag, 2012) [ISBN: 978-3-0348-9129-5].
24. I. Newton. *Philosophiae naturalis Principia mathematica* (Londini, 1687).
25. https://solarsystem.nasa.gov.
26. P. Ackroyd. *Newton* (Nan A. Talese, 2008) [ISBN: 9780385507998].
27. Н.А. Беляев, К.И. Чурюмов. *Комета Галлея и её наблюдение* (Наука, 1985).
28. T. Levi-Civita. Trajettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre carpi. *Ann. Math.* **9**, 1 (1903).
29. P. Kustaanheimo. Spinor regularization of Kepler motion. *Ann. Univ. Turkuensis A* **73**, 3 (1964).
30. N. Joukowsky. Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. *Z. Flugtechnik* **1**, 281 (1910); **3**, 81 (1912).
31. Е. Штифель, Г. Шейфеле. *Линейная и регулярная небесная механика* (Наука, 1975).
32. А.С. Бакай, Ю.П. Степановский. *Адиабатические инварианты* (Наукова думка, 1981).
33. И. Шкловский. *Разум, Жизнь, Вселенная* (Янус-К, РФФИ, 1996).
34. Г.Е. Горелик. Советская жизнь Льва Ландау глазами очевидцев (Вагриус, 2009).
35. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Квантовая механика. Часть 1. Нерелятивистская теория* (ГИТТЛ, 1948).
36. E. Fermi. Über die magnetischen Momente der Atomkerne. *Zeits. für Physik* **60**, 320 (1930).
37. E. Fermi. Magnetic Moments of Atomic Nuclei. *Nature* **125**, 16 (1930).
38. C.G. Darwin. The wave equations of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **118**, 654 (1928).
39. E. Fermi, E. Segrè. Zur theorie der hyperfeinstrukturen. *Zeits. für Physik* **82**, 729 (1933).
40. Я.И. Померанчук, Я.А. Смородинский. Об уровнях энергии ядер с $Z > 137$. *J. Phys. USSR* **9**, 97 (1945).
41. L. Fermi. *Atomi in famiglia* (Mondadori, 1954).
42. J.E. Nafe, E.B. Nelson, I.I. Rabi. The hyperfine structure of atomic hydrogen and deuterium. *Phys. Rev.* **71**, 914 (1947).

43. H. M. Foley, P. Kusch. On the intrinsic moment of the electron. *Phys. Rev.* **73**, 412 (1948).
44. J. Schwinger. On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).
45. D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (2008).
46. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio. Revised value of the eighth-order electron $g-2$. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 110406 (2007).
47. http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-phys-constants.pdf.
48. S.G. Karshenboim. Precision physics of simple atoms: QED tests, nuclear structure and fundamental constants. *Phys. Rept.* **422**, 1 (2005).
49. Е. Кондон, Г. Шотли. *Теория атомных спектров* (Изд. иностр. лит., 1949).
50. I.B. Khriplovich, A.I. Milstein, S.S. Petrosyan. Nuclear structure corrections to deuterium hyperfine Splitting. *Phys. Lett. B* **366**, 13 (1996).
51. И.С. Шкловский. *Космическое радиоизлучение* (Гостехиздат, 1956).
52. W.W. Holloway, Jr.R. Novick. Determination of the hyperfine structure of atomic nitrogen by optical orientation. *Phys. Rev. Lett.* **1**, 367 (1958).
53. Дж.Д. Краус. *Радиоастрономия* (Советское радио, 1973).
54. A.A. Konovalenko, L.G. Sodin. Neutral ^{14}N in the interstellar medium. *Nature* **283**, 360 (1980).
55. D.H. Blake, R.M. Crutcher, W.D. Watson. Identification of the anomalous 26.131-MHz nitrogen line observed towards Cas A. *Nature* **287**, 707 (1980).
56. A.A. Konovalenko, L.G. Sodin. The 26.13 MHz absorption line in the direction of Cassiopeia A. *Nature* **294**, 135 (1981).
57. В.М. Конторович, С.Я. Брауде. *Радиоволны рассказывают о Вселенной* (Физматлит, 2011).
58. Б.П. Рябов. Спорадическое радиоизлучение Юпитера. Мультимасштабные динамические спектры. *Радиофизика и радиоастрономия* **6** (1), 103 (2001).
59. *Академик С.Я. Брауде в воспоминаниях современников* (Харьков: Радиоастрономический ин-т НАН Украины, 2005).
60. А.А. Коноваленко. И.С. Шкловский и низко-частотная радиоастрономия. *Радиофизика и радиоастрономия* **22** (1), 7 (2017).
61. A. Konovalenko, L. Sodin, V. Zakharenko, *et al.* The modern radio astronomy network in Ukraine: UTR-2, URAN and GURT. *Experimental Astronomy* **42**, 11 (2016).
62. M.A. Gordon, R.L. Sorochenko. *Radio Recombination Lines* (Springer, 2009).
63. П.С. Эренфест, А.Ф. Иоффе. *Эренфест–Иоффе: Научная переписка (1907–1933)* (Наука, 1990).
64. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Механика* (Наука, 1988) [ISBN: 5-02-013850-9].
65. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля* (Наука, 1988) [ISBN: 5-02-014420-7].
66. V. Fock. Bemerkung zur quantelung des harmonischen oszillators im magnetfeld. *Zeits. für Physik* **47**, 446 (1928).
67. I.I. Rabi. Das Freie elektron im homogenen magnetfeld nach der diracschen theorie. *Zeits. für Physik* **49**, 507 (1928).
68. W. Wilson. The quantum theory and electromagnetic phenomena. *Proc. Roy. Soc. London A* **102**, 478 (1923).
69. C.G. Darwin. The Diamagnetism of the Free Electron. *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* **27**, 86 (1931).
70. L. Landau. Diamagnetismus der metalle. *Zeits. für Physik* **64**, 629 (1930).
71. W. Pauli. Über Gasentartung und Paramagnetismus, *Zeits. für Physik* **41**, 81 (1927).
72. H.-J. van Leeuwen. Problèmes de la théorie électronique du magnétisme. *J. Phys. Radium* **2** (12), 361 (1921).
73. N. Bohr. *Collected Works, Vol. 1, Early Work (1905–1911)* (Elsevier Science Publishers, 1972).
74. Baptiste Savoie. A rigorous proof of the Bohr-van Leeuwen theorem in the semiclassical limit. *Reviews in Mathematical Physics* **27**, 1550019 (2015).
75. L. Kouwenhoven, C. Marcus. Quantum dots. *Physics World* **11** (6), 35 (1998).
76. D. Bimberg, M. Grundmann, N.N. Ledentsov. *Quantum Dot Heterostructures* (Wiley, 1999) [ISBN: 978-0-471-97388-1].
77. E. Drigho-Filho, S. Kuru, J. Negro, L.M. Nieto. Superintegrability of the Fock–Darwin system. *Annals of Physics* **383**, 101 (2017).
78. В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. *Задачи по квантовой механике* (Наука, 1992).
79. K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
80. Y. Aharonov, A. Casher. Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field. *Phys. Rev. A* **19**, 2461 (1979).
81. Ю.П. Степановский. Дробный квантовый эффект Холла. *Электромагнитные явления* **1**, 427 (1998).
82. E.M. Purcell. Electricity and magnetism (Cambridge University Press, 2011) [ISBN: 978-1-107-01360-5].
83. R.J. Fonck, F.L. Roesler, D.H. Tracy. Comparison of atomic quasi-Landau spectrum with semiclassical strong-field-mixing models. *Phys. Rev. A* **21**, 861 (1980).
84. S. Feneuille. Semiempirical scaling laws for adiabatic energy levels of highly excited hydrogen atom in high magnetic fields. *Phys. Rev. A* **26**, 673 (1982).
85. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Supersymmetry in quantum mechanics* (World Scientific, 2001) [ISBN: 978-981-238-650-2].

86. Ю.П. Степановский. Атом водорода в магнитном поле, супер ВКБ квантование и уравнение Майораны. *Проблемы теоретической физики* (Наукова думка, 1991).
87. А. Кротько, Ю. Степановський. Високозбуджений двовимірний атом водню у магнітному полі. *Вісник Львів. ун-ту, Серія фізична* **39**, 54 (2006).
88. Ю.П. Степановский. Атом водорода во внешнем поле как ангармонический осциллятор. *УФЖ* **32**, 1316 (1987).
89. I.E. Ovcharenko, Yu.P. Stepanovsky. On some properties of 2-D Weyl equation for charged massless spin 1/2 particle. *Problems of Atomic Science and Technology* **3** (1), 56 (2007).
90. *Le Système international d'unités (SI)/The International System of Units (SI)* (BIPM, 2019).
91. Ю.П. Степановский. "Нобелевские" физические эффекты и некоторые концепции современной физики. *Фундаментальные проблемы теории точности* (Наука, 2001) [ISBN: 5-02-024947-5].
92. S.J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antennas* (Rutgers University, 2016).
93. C.J.A.P. Martins. The status of varying constants: A review of the physics, searches and implications. *Rep. Prog. Phys.* **80**, 126902 (2017).

Одержано 08.07.20

Yu.P. Stepanovsky

SQUARE ROOTS OF KEPLER ELLIPSES, ELECTRONS AND RYDBERG ATOMS IN A MAGNETIC FIELD

S u m m a r y

Young Kepler's daring ideas on the structure of the Solar system are applied to the analysis of planetary distances in the exoplanetary system HD 10180. Using Zhukovsky's transformation, the essence of the spinor regularization of Kepler's problem is explained as extracting the square root of an ellipse and using a Kepler eccentric anomaly instead of the usual time. The achievements of Kharkiv radio astronomers in the search for radio recombination lines of Rydberg carbon atoms at the UTR-2 radio telescope are considered. A generalized spinor regularization of the Kepler problem is used to analyze the energy spectra of Rydberg hydrogen atoms in a magnetic field.