В.О. ПЕЛИХ, Ю.В. ТАЙСТРА

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Вул. Наукова, 3б, Львів 79060; e-mail: pelykh@iapmm.lviv.ua, ythelloworld@gmail.com)

УДК 537.8+517.9

ОДНОНАПРЯМЛЕНІ ІЗОТРОПНІ ПОЛЯ У ПРОСТОРІ КЕРРА

Метою роботи є побудова у аналітичному вигляді розв'язків рівнянь безмасового поля довільного спіну у метриці Керра у вигляді ізотропних однонапрямлених – вихідних та вхідних за Чандрасекаром полів, тобто полів, які поширюються від або до чорної діри. На основі методу Ньюмена–Пенроуза у його спінорній формі розглянуто однонапрямлені ізотропні поля у просторі типу D за Петровим та знайдено у аналітичному вигляді загальний розв'язок та розв'язок із відокремленими змінними узагальнених рівнянь таких полів у метриці Керра. У частковому випадку електромагнітного поля обчислено тензор Максвелла та тензор енергії-імпульсу для вихідного та вхідного однонапрямленого поля.

Ключові слова: безмасове поле, однонапрямлене ізотропне поле, спінор Максвелла, простір Керра, відокремлення змінних.

1. Вступ

Дослідження впливу гравітаційного поля на класичні фізичні поля (скалярне, поле Дірака–Вейля, поле Максвелла та Раріти–Швінґера) та на гравітаційні збурення є актуальною проблемою сучасної математичної, теоретичної фізики та астрофізики. При цьому для спрощення задачі впливом самих полів на гравітаційне поле нехтують, розглядаючи їх як пробні або збурення. Особливо важливим та цікавим є вивчення поведінки цих полів у гравітаційних полях чорних дір – у метриках Шварцшільда, Керра, Керра–Ньюмена.

Основною складністю у дослідженні полів відмінного від нуля спіну є зв'язаність систем рівнянь, що їх описують — без обмеження загальності простору рівняння не відокремлюються за жодних калібрувальних (у випадку електромагнетизму) чи координатних (у випадку гравітації) умов. Тюкольський [1], використовуючи формалізм Ньюмена–Пенроуза, частково відокремив рівняння гравітаційного, електромагнітного та нейтринного полів у просторі типу D за Петровим. У результаті отримано два розщеплених окремих рівняння для двох "екстремальних" компонент поля. При розгляді рівнянь у тетраді Кіннерслі вони були узагальнені до головного рівняння Тюкольського (ГРТ), яке описує екстремальні компоненти полів всіх цілих і напівцілих спінів у метриці Керра. Використовуючи анзац $\psi = e^{-i\omega t}e^{im\phi}R(r)S(\theta)$, Тюкольський отримав два звичайних диференціальних рівняння (ЗДР), які відомі як кутове рівняння Тюкольського (КРТ) та радіальне рівняння Тюкольського (РРТ).

Подальші істотні результати в цьому напрямку отримано, зокрема, у роботах [2–6]. Однак побудова достатньо загальних чи придатних для ефективного аналізу розв'язків для поля Максвелла (як і для інших полів, окрім скалярного) у викривленому просторі та дослідження їх властивостей залишаються складним завданням [7]. Складність полягає у нелінійності задачі на власні значення – константа відокремлення ω входить у рівняння як параметр $E_l^m = E_l^m(a\omega)$ (див. [2], ст. 653). Для спрощення розглядаються часткові випадки поля Максвелла, що дозволяє отримати точні розв'язки відповідних рівнянь.

У наших роботах [8–10] ми розглядали окремо випадки полів, що поширюються до чорної діри (вхідні, у термінології Чандрасекара) та від околу чорної діри (вихідні), тобто, однонапрямлені ізотропні поля (ОІП), які відповідають двом випадкам орієнтації електромагнітного головного ізотропного напрямку відносно гравітаційного головного ізотропного напрямку, та знайшли загальний розв'язок, що виражається через довільну функцію від інтегралів системи диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП) першого порядку.

У [9] ми зазначили, що, на відміну від Тюкольського, не виключаємо з розгляду розв'язки з особливістю на осі обертання $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Підставою для цього є такі міркування. Особливість на півосі $\theta = 0$ як у розв'язку Керра, так і у розв'язках рівнянь полів на фоні простору Керра є наслідком використання системи координат Бойєра–Ліндквіста, яка узагальнює на простір Керра сферичну систему координат з її особливістю на півосі $\theta = 0$ – детермінант метричного тензора обертається на ній в нуль. Оскільки у розв'язку Керра при $r = 0$ метрика не перестає бути визначеною, допустимими є і значення $r < 0$, тому у рівняннях усіх полів виникає додаткова особлива піввісь $\theta = \pi$.

Проте особливості на осі обертання ані метричного тензора простору Керра, ані розв'язків рівнянь полів (для прикладу, електромагнітного) на фоні простору Керра не мають інваріантного характеру – на ній єдиний інваріант геометрії Керра і інваріанти електромагнітного поля не мають особливостей, а метрична квадратична форма аналітично продовжується на неї (за винятком точок на горизонті). Цей запропонований у [9] підхід ми застосуємо і при розгляді полів інших спінів, відповідно обмежуючи область визначеності таких фізично змістовних розв'язків за кутовою змінною умовою $0 < \theta < \pi$. Такі координатно-сингулярні розв'язки, завдяки їх простій формі, знайдуть своє ефективне застосування для опису процесів в околі чорної діри Керра, про що буде йти мова у наступній роботі, при цьому інваріантні характеристики полів і процесів, як слід очікувати, не матимуть сингулярностей також і при $\theta = 0$ і $\theta = \pi$. У плоскому просторі, у часткових випадках, отриманий нами розв'язок у полі Керра описує циркулярно-поляризовану плоску хвилю та електромагнітне поле, аналогічне до ізотропного поля у вигляді вузлів і сплетень, яке виникає з розшарування Гопфа [11, 12].

Поведінка алгебраїчно-спеціальних полів була предметом детального вивчення у роботах [13–16]. При цьому Торресом було отримано загальний розв'язок для алгебраїчно-спеціального поля Максвелла у плоскому просторі. У роботі Чандрасекара [14], де розглядається гравітаційний випадок алгебраїчно-спеціального поля у метриці Керра, отримано розв'язок з відокремленими змінними [(9), (14)], який містить члени з асимптотикою $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$, $1/r^4$, що відрізняється від нашого підходу, – розв'язок з відокремленими змінними має асимптотику виключно $1/r$.

Розвинутий нами метод знаходження розв'язку системи рівнянь для ОІП Максвелла допускає узагальнення і на випадок однонапрямлених ізотропних полів з довільним значенням спіну. Проведення таких узагальнень та знаходження розв'язку системи рівнянь, що описує єдиним чином поля всіх спінів, є метою цієї роботи.

Окрім загального розв'язку в аналітичному вигляді узагальненої системи рівнянь, побудуємо також розв'язок методом відокремлення змінних, який, як відомо, дозволяє детальніше описувати певні властивості фізичних полів (див. наприклад, [17]), провести порівняння результатів з результатами Тюкольського та вказати у подальшому застосування. Далі на прикладі поля Максвелла побудуємо хвильові розв'язки у вигляді ОІП, обчислимо відповідний кожному розв'язку тензор Максвелла та тензор енергії-імпульсу та встановимо умови у координатній формі, які виділяють ОІП.

Рівняння розглядаємо в геометризованій системі одиниць, де $c = G = 1$, та припускаємо достатню гладкість усіх функцій, що у цьому випадку не обмежує фізичної загальності.

2. Однонапрямлені вільні ізотропні поля спіну l у вакуумному просторі типу D

Розглянемо пробні безмасові вільні поля спіну $l = |s|$, де s – спінова вага ($s = \pm 1/2$, ± 1, $\pm 3/2$, ± 2, ...), які задаються симетричним спінором $\varphi_{ABC\,...\,KL}$ з $2l$ індексами. Рівняння еволюції таких полів має вигляд [18]:

$$\nabla^{AA'}\varphi_{ABC\,...\,KL} = 0. \qquad (1)$$

Поширимо запропонований нами у роботі [9] підхід для розгляду ізотропного електромагнітного поля на поля інших спінів таким чином. Виберемо спінову базу так, щоб головні спінори спінора Вейля, які є попарно кратними внаслідок належності простору-часу Керра до типу D за Петровим, були пропорційними до базисних, тобто $\Psi_{ABCD} = \gamma_{(A}\gamma_B\delta_C\delta_{D)}$, де $\gamma_A = \gamma_1 o_A$, $\delta_A = -\delta_0\iota_A$, o_A, ι_A – базисні спінори. В результаті матимемо $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ та внаслідок теореми Ґолдберґа–Сакса $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$.

Далі розглядатимемо алгебраїчно-спеціальні фізичні поля – вважатимемо, що всі головні спінори α_A, β_B, ..., λ_L спінора $\varphi_{ABC\,...\,KL} = \alpha_{(A}\beta_B\,...\,\lambda_{L)}$ є кратними до кратного головного спінора γ_A спінора Вейля: $\alpha_A \sim \gamma_A$, $\beta_B \sim \gamma_B$, ..., $\lambda_L \sim \gamma_L$. В результаті розклад спінора поля у спіновій базі матиме вигляд

$$\varphi_{ABC\,...\,KL} = \varphi_{2l}\,\underbrace{o_A o_B\,...\,o_L}_{2l}, \tag{2}$$

де $\varphi_{2l} = \varphi_{ABC\,...\,KL}\iota^A\iota^B\iota^C\,...\,\iota^K\iota^L$. Поле $\varphi_{ABC\,...\,KL}$ є ізотропним при такому виборі [18]; слідом за Чандрасекаром називатимемо його "вихідним". У випадку гравітаційного поля умова (2) виокремлює поле хвильового типу за Ліхнеровичем.

Означення 1. Поле, що задається спінором вигляду (2), називатимемо *вихідним однонапрямленим ізотропним полем.*

Рівняння (1) вихідного ОІП (2) у компонентній формі у вакуумному просторі типу D мають вигляд

$$\begin{cases} D\varphi_{2l} + (2l\epsilon - \rho)\varphi_{2l} = 0, \\ \delta\varphi_{2l} + (2l\beta - \tau)\varphi_{2l} = 0; \end{cases} \tag{3}$$

$D = l^a\nabla_a$, $\delta = m^a\nabla_a$, $\Delta = n^a\nabla_a$, $\bar\delta = \bar m^a\nabla_a$ – похідні за напрямками ізотропної тетради Ньюмена–Пенроуза, $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \kappa, \sigma, \rho, \tau, \nu, \lambda, \mu, \pi$ – скаляри Ньюмена–Пенроуза.

Аналогічно "вхідне" ОІП отримуємо вибором всіх головних спінорів α_A, β_B, ..., λ_L спінора $\varphi_{ABC\,...\,KL} = \alpha_{(A}\beta_B\,...\,\lambda_{L)}$ кратними до кратного головного спінора δ_A спінора Вейля: $\alpha_A \sim \delta_A$, $\beta_B \sim \delta_B$, ..., $\lambda_L \sim \delta_L$. Тоді розклад спінора поля у спіновій базі матиме вигляд

$$\varphi_{ABC\,...\,KL} = \varphi_0\iota_A\iota_B\,...\,\iota_K, \tag{4}$$

$$\varphi_0 = \varphi_{ABC\,...\,KL}o^A o^B o^C\,...\,o^L.$$

Означення 2. Поле, що задається спінором вигляду (4), називатимемо *вхідним однонапрямленим ізотропним полем.*

Рівняння (1) у компонентній формі для вхідного ОІП у вакуумному просторі типу D набувають вигляду

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0 + (\mu - 2l\gamma)\varphi_0 = 0, \\ \bar\delta\varphi_0 + (\pi - 2l\alpha)\varphi_0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Зазначимо, що однонапрямлені ізотропні поля (2) та (4) є алгебраїчно-спеціальними типу N, тобто всі головні спінори таких полів є кратними.

3. Загальний розв'язок узагальненого рівняння, що описує однонапрямлені поля спіну *l* у метриці Керра

Розглянемо системи рівнянь для вихідного ОІП (3) та вхідного ОІП (5) у метриці Керра в координатах Бойєра–Ліндквіста:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - $$
$$- \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2, \tag{6}$$

M – маса чорної діри ($M > 0$), a – питомий кутовий момент ($0 < a < M$), $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ [1], корені рівняння $\Delta = 0$, $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ та $r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$ визначають відповідно горизонт подій та горизонт Коші. Ізотропну тетраду Ньюмена–Пенроуза виберемо тетрадою Кіннерслі [19]:

$$\begin{aligned} l^a &= \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right), \\ n^a &= \frac{1}{2\Sigma}\left(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a\right), \\ m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right), \\ \bar m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\cos\theta)}\left(-ia\sin\theta, 0, 1, \frac{-i}{\sin\theta}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Системи рівнянь для вихідних та вхідних ОІП усіх спінів l у координатах Бойєра–Ліндквіста при

[1] Позначення у одному тексті символом Δ різних об'єктів при використанні формалізму Ньюмена–Пенроуза для опису простору Керра є традиційним і не веде до непорозумінь.

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2017. Т. 62, № 11

відповідному проведенні заміни функцій мають подібний вигляд, тому побудуємо узагальнену систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{r^2+a^2}{\Delta}\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - k\dfrac{\partial\psi}{\partial r} + \dfrac{a}{\Delta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0, \\ ia\sin\theta\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - k\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} + \dfrac{i}{\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $k = \operatorname{sgn} s$,

$$\psi = \begin{cases} \varphi_{2l}(r - ia\cos\theta)\sin^l\theta, & k=-1; \\ \varphi_0\dfrac{\Delta^l\sin^l\theta}{2(r-ia\cos\theta)^{2l-1}}, & k=1. \end{cases} \tag{9}$$

Загальний розв'язок системи (8) знаходимо шляхом послідовного інтегрування рівнянь в частинних похідних першого порядку. Отримуємо

$$\psi = e^{F(\zeta_1,\zeta_2)}, \tag{10}$$

де F – довільна функція комплексних інтегралів системи (8):

$$\zeta_1 = t + k\Bigg(r + M\ln\Delta + \\ + \frac{M^2}{\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right| - ia\cos\theta\Bigg), \tag{11}$$

$$\zeta_2 = \phi + k\left(\frac{a}{2\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right| + i\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right|\right). \tag{12}$$

У випадку електромагнітного поля ($s=\pm1$) загальний розв'язок (10) був отриманий у попередній роботі авторів [9]. У частковому випадку плоского простору він зводиться до розв'язку Торреса [13]. Точний розв'язок для поля довільного спіну у полі Керра отримано тут вперше.

4. Відокремлення змінних у системі рівнянь для ОІП

Застосування методу відокремлення змінних для знаходження регулярних розв'язків ГРТ дозволило виявити основні властивості збурень та передбачити яскраві фізичні ефекти у полі Керра [1, 4]. З огляду на це та з потреби порівняння підходу ОІП з іншими застосуємо його до ОІП.

Шукатимемо розв'язок системи рівнянь (8) у вигляді

$$\psi(t,r,\theta,\phi) = T(t)R(r)S(\theta)\Phi(\phi). \tag{13}$$

Для невідомих функцій отримаємо систему чотирьох ЗДР:

$$\begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0, \\ \Phi'(\phi) - \nu\Phi(\phi) = 0, \\ R'(r) - k\left(\dfrac{\lambda(r^2+a^2)}{\Delta} + \dfrac{\nu a}{\Delta}\right)R(r) = 0, \\ S'(\theta) - k\left(ia\lambda\sin\theta + \nu\dfrac{i}{\sin\theta}\right)S(\theta) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{C}$ – постійні відокремлення.

Розв'язавши ЗДР, отримаємо розв'язок системи (8):

$$\psi = Ce^{\lambda\xi_1 + \nu\xi_2 - iak\lambda\cos\theta + i\nu k\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right|}, \tag{15}$$

де

$$\xi_1 = t + k\left(r + M\ln\Delta + \frac{M^2}{\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right|\right), \tag{16}$$

$$\xi_2 = \phi + k\,\frac{a}{2\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right|; \tag{17}$$

C – комплексна постійна.

Отже, розв'язки з відокремленими змінними рівнянь однонапрямлених ізотропних полів мають вигляд (15), де функція ψ визначається співвідношеннями (9).

Розв'язок (15) є частковим; він отримується із загального розв'язку (10) при виборі довільної функції $F(\zeta_1,\zeta_2)$ таким чином: $F(\zeta_1,\zeta_2) = \lambda\zeta_1 + \nu\zeta_2$.

Зазначимо, що спосіб відокремлення змінних для системи рівнянь першого порядку для ОІП відрізняється від способу відокремлення змінних у підході Тюкольського, функція ψ (9) означена інакше, ніж функція ψ у роботі [1].

5. Розв'язок з відокремленими змінними у випадку вихідного та вхідного ОІП Максвелла

Як приклад розглянемо розв'язки з відокремленими змінними для випадку безмасового вільного

ОІП Максвелла ($s = \pm 1$). Випадок $s = -1$ описує вихідне ОІП Максвелла, а випадок $s = 1$ – вхідне ОІП Максвелла [9, 10].

Рівняння для вільного поля Максвелла має вигляд [18]:

$$\nabla^{AA'}\varphi_{AB} = 0, \tag{18}$$

де

$$\varphi_{AB} = \varphi_2 o_A o_B - \varphi_1(o_A\iota_B + \iota_A o_B) + \varphi_0 \iota_A \iota_B \tag{19}$$

– спінор е/м поля (спінор Максвелла), φ_2: $\varphi_2 \mapsto \mathbb{C}$, φ_1: $\varphi_1 \mapsto \mathbb{C}$, φ_0: $\varphi_0 \mapsto \mathbb{C}$ – компоненти спінора φ_{AB} у спіновій базі.

При розгляді вихідного ОІП спінор Максвелла матиме вигляд $\varphi_{AB} = \varphi_2 o_A o_B$. Розв'язок з відокремленими змінними φ_2 запишемо, використовуючи (15) та (9) при $k = -1$, $l = 1$:

$$\varphi_2 = C\frac{e^{\lambda\eta_1 + \nu\eta_2 + ia\lambda\cos\theta - i\nu\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right|}}{\sin\theta(r - ia\cos\theta)}, \tag{20}$$

де

$$\eta_1 = t - r - M\ln\Delta - \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - a^2}}\ln\left|\frac{r - r_+}{r - r_-}\right|, \tag{21}$$

$$\eta_2 = \phi - \frac{a}{2\sqrt{M^2 - a^2}}\ln\left|\frac{r - r_+}{r - r_-}\right|. \tag{22}$$

При розгляді першого і другого ЗДР у системі (14) накладемо такі умови на їх розв'язки. На функцію $T(t)$ накладемо умову обмеженості при $t \to \infty$, в результаті отримаємо, що константа відокремлення λ повинна бути уявною: $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$. Тим самим ми не включаємо до розгляду квазінормальні розв'язки.

На функцію $\Phi(\phi)$ накладемо умову 2π-періодичності: для довільного значення аргументу ϕ $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, звідси $\nu = im$, $m \in \mathbb{Z}$. Тепер обмежений за часовою змінною та 2π-періодичний за азимутальною змінною розв'язок з відокремленими змінними матиме вигляд [10]:

$$\varphi_2 = C\frac{e^{i\omega\eta_1 + im\eta_2 - a\omega\cos\theta}}{\sin\theta(r - ia\cos\theta)}\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^m. \tag{23}$$

Розв'язок $S(\theta)$ у системі (14) при $k = -1$ має особливості в точках $\theta = 0$ або $\theta = \pi$ (залежно від значення константи відокремлення m). Розв'язок $R(r)$ визначений скрізь, окрім точок $r = r_+$ та $r = r_-$. Далі розглядатимемо розв'язок (23) в області $0 < \theta < \pi$, $r > r_+$, де, як ми зауважили вище, він є фізично змістовним.

Тензор Максвелла $F_{ab} = 2\varphi_2 l_{[a}m_{b]} + 2\bar{\varphi}_2 l_{[a}\bar{m}_{b]}$, що відповідає розв'язку (23), обчислюємо за допомогою пакета GRTensor2 [20] та отримуємо:

$$F_{ab} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\Delta}P & -\frac{1}{\sin\theta}Q & P \\ \frac{a}{\Delta}P & 0 & \frac{\Sigma}{\sin\theta\,\Delta}Q & -\frac{r^2+a^2}{\Delta}P \\ \frac{1}{\sin\theta}Q & -\frac{\Sigma}{\sin\theta\,\Delta}Q & 0 & -a\sin\theta\,Q \\ -P & \frac{r^2+a^2}{\Delta}P & a\sin\theta Q & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

де $P = c_1\sin(\omega\eta_1 + m\eta_2) + c_2\cos(\omega\eta_1 + m\eta_2) \times e^{-a\omega\cos\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^m$, $Q = c_1\cos(\omega\eta_1 + m\eta_2) - c_2\sin(\omega\eta_1 + m\eta_2)e^{-a\omega\cos\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^m$, $C = c_1 + ic_2$.

Умова ОІП (2) у координатній формі має вигляд

$$\begin{cases} (r^2 + a^2)F_{tr} - aF_{r\phi} = 0, \\ a\sin^2\theta F_{t\theta} - F_{\theta\phi} = 0, \\ \Sigma F_{t\theta} + \Delta F_{r\theta} = 0, \\ F_{tr} + \frac{a}{\Delta}F_{t\phi} = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Обчислимо тензор енергії-імпульсу $T_{ab} = (1/2\pi)|\varphi_2|^2 l_a l_b$, що відповідає розв'язку (23):

$$T_{ab} = \frac{|\varphi_2|^2}{2\pi}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & -a\sin^2\theta \\ -\frac{\Sigma}{\Delta} & \frac{\Sigma^2}{\Delta^2} & 0 & a\sin^2\theta\frac{\Sigma}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a\sin^2\theta & a\sin^2\theta\frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & a^2\sin^4\theta \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$|\varphi_2|^2 = \frac{|C|^2 e^{-2a\omega\cos\theta}}{\sin^2\theta\,\Sigma}\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^{2m}. \tag{27}$$

Розглянемо також розв'язок з відокремленими змінними у випадку вхідного ОІП, коли спінор Максвелла має вигляд $\varphi_{AB} = \varphi_0\iota_A\iota_B$. Розв'язок з відокремленими змінними φ_0 запишемо використовуючи (15) та (9) при $k = 1$, $l = 1$:

$$\varphi_0 = C\frac{2e^{\lambda\eta_3 + \nu\eta_4 - ia\lambda\cos\theta + i\nu\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right|}}{\sin\theta\,\Delta(r - ia\cos\theta)^{-1}}, \tag{28}$$

де

$$\eta_3 = t + r + M\ln\Delta + \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - a^2}}\ln\left|\frac{r - r_+}{r - r_-}\right|, \tag{29}$$

$$\eta_4 = \phi + \frac{a}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \ln\left|\frac{r - r_+}{r - r_-}\right|. \tag{30}$$

За умов обмеженості φ_0 за часовою змінною та 2π-періодичності за азимутальним кутом розв'язок (28) буде мати вигляд

$$\varphi_0 = C\frac{2e^{i\omega\eta_3 + im\eta_4 + a\omega\cos\theta}}{\sin\theta\,\Delta(r - ia\cos\theta)^{-1}}\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^{-m}. \tag{31}$$

Він також має особливості при $\theta = 0$, $\theta = \pi$ та $r = r_+$, $r = r_-$, як і розв'язок (23) , і також є фізично змістовним поза віссю обертання та горизонтами.

Тензор Максвелла для вхідного ОІП обчислимо за формулою $F_{ab} = 2\varphi_0\bar{m}_{[a}n_{b]} + 2\bar{\varphi}_0 m_{[a}n_{b]}$:

$$F_{ab} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\Delta}U & \frac{1}{\sin\theta}V & U \\ -\frac{a}{\Delta}U & 0 & \frac{\Sigma}{\sin\theta\,\Delta}V & \frac{r^2+a^2}{\Delta}U \\ -\frac{1}{\sin\theta}V & -\frac{\Sigma}{\sin\theta\,\Delta}V & 0 & a\sin\theta\,V \\ -U & -\frac{r^2+a^2}{\Delta}U & -a\sin\theta\,V & 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

де $U = c_1\sin(\omega\eta_3 + m\eta_4) + c_2\cos(\omega\eta_3 + m\eta_4) \times e^{a\omega\cos\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^{-m}$, $V = c_1\cos(\omega\eta_3 + m\eta_4) - c_2 \times \sin(\omega\eta_3 + m\eta_4)e^{a\omega\cos\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^{-m}$.

Умова ОІП (4) у координатній формі має вигляд

$$\begin{cases}(r^2 + a^2)F_{tr} - aF_{r\phi} = 0,\\ a\sin^2\theta F_{t\theta} - F_{\theta\phi} = 0,\\ \Sigma F_{t\theta} - \Delta F_{r\theta} = 0,\\ F_{tr} - \frac{a}{\Delta}F_{t\phi} = 0.\end{cases} \tag{33}$$

Тензор енергії-імпульсу вхідного ОІП $T_{ab} = (1/2\pi)|\varphi_0|^2 n_a n_b$ для розв'язку (31) має вигляд

$$T_{ab} = \frac{|\varphi_0|^2\Delta^2}{8\pi\Sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & -a\sin^2\theta \\ \frac{\Sigma}{\Delta} & \frac{\Sigma^2}{\Delta^2} & 0 & -a\sin^2\theta\frac{\Sigma}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a\sin^2\theta & -a\frac{\sin^2\theta\,\Sigma}{\Delta} & 0 & a^2\sin^4\theta \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$|\varphi_0|^2 = \frac{4|C|^2\Sigma e^{2a\omega\cos\theta}}{\sin^2\theta\,\Delta^2}\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^{-2m}. \tag{35}$$

6. Висновки

Рівняння, які описують однонапрямлені гравітаційні, електромагнітні та нейтринні поля у просторі типу D за Петровим, описуються єдиним чином для довільного значення спіну поля. При розгляді систем рівнянь для вихідного та вхідного ОІП в метриці Керра в координатах Бойєра–Ліндквіста можемо узагальнити їх до одної системи ДРЧП першого порядку для невідомої функції $\psi(t, r, \theta, \phi)$, подібно до того, як це було зроблено Тюкольським у випадку рівнянь другого порядку для функцій, регулярних при $\theta = 0, \theta = \pi$. Заміна функції у вигляді (9) в нашому випадку відрізняється від подібної заміни у підходах Тюкольського і Чандрасекара. Це, однак, не перешкоджає порівнянню розв'язків, що описують ОІП, з розв'язками Тюкольського та Чандрасекара.

Отримавши узагальнену систему, ми знаходимо загальний розв'язок шляхом послідовного інтегрування ДРЧП першого порядку, що істотно відрізняє наш підхід від підходів інших авторів, оскільки дає у аналітичному вигляді розв'язок, що, на додаток, є загальним у певному класі полів – ізотропних однонапрямлених. Знайдений нами розв'язок з відокремленими змінними залежить від лінійної комбінації інтегралів системи.

У випадку ОІП Максвелла отримані розв'язки описують циркулярно-поляризовані хвилі, вихідна хвиля йде на просторову нескінченність, вхідна – із неї на чорну діру Керра. Розв'язки, що описують ОІП, є змістовними скрізь поза віссю обертання та горизонтами, де вони мають координатні сингулярності. Умовою регулярності вони відкинуті у роботі Тюкольського. Застосування отриманих розв'язків до аналізу поведінки полів у просторі Керра буде викладено у роботі, яка готується до друку.

Порівнюючи вихідний ізотропний розв'язок рівнянь Максвелла при $r \to \infty$ з асимптотичним вихідним на нескінченності радіальним розв'язком Тюкольського (див. (5.4) у [1]), бачимо, що функції ϕ_2 мають таку ж асимптотику $e^{i\omega r_*}/r$, і обмеження розглядом вихідного ізотропного поля не веде до втрати інформації про єдино істотну для віддаленого спостерігача складову поля – "дальнє поле". І, навпаки – отримані за такого обмеження розв'язки у аналітичній формі відкривають можливості вивчення якісної поведінки полів, що не є можливим при поданні розв'язку Тюкольським у вигляді рядів за сфероїдальними гармоніками, оскільки для коефіцієнтів цих рядів відсутні рекурентні співвідношення.

Автори висловлюють подяку рецензентам за корисні зауваження та пропозиції.

1. S. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *Astrophys. J.* **185**, 635 (1973).
2. W.H. Press, S.A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. II. Dynamical stability of the Kerr metric. *Astrophys. J.* **185**, 649 (1973).
3. S.A. Teukolsky, W.H. Press. Perturbations of a rotating black hole. III – Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *Astrophys. J.* **193**, 443 (1973).
4. А.А. Старобинский, С.М. Чурилов. Усиление электромагнитных и гравитационных волн при рассеянии на вращающейся "черной дыре". *Журн. эксперим. теорет. физики* **65**, 3 (1974).
5. S. Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes* (Oxford University Press, 1983).
6. P.P. Fiziev. Classes of exact solutions to the Teukolsky master equation. *Class. Quant. Grav.* **27**, 135001 (2010).
7. S. Teukolsky. The Kerr metric. *Class. Quant. Grav.* **32**, 124006 (2015).
8. Y.V. Taistra. New approach to Maxwell equations decoupling in curved spacetime. In *WDS'13 Proceedings of Contributed Papers: Part III– Physics,* edited by J. Safrankova, J. Pavlu (Matfyzpress, 2013), p. 39–44.
9. В.О. Пелих, Ю.В. Тайстра. Клас загальних розв'язків рівнянь Максвелла у просторі Керра. *Мат. методи та фіз.-мех. поля* **59**, 48 (2016).
10. V.O. Pelykh, Y.V. Taistra. Solution with separable variables for null one-way Maxwell field in Kerr space-time. *Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl.* **10**, 387 (2017).
11. W.T.M. Irvine, D. Bouwmeester. Linked and knotted beams of light. *Nature Phys.* **4**, 716 (2008).
12. H. Kedia, I. Bialynicki-Birula, D. Peralta-Salas, W. Irvine. Tying knots in light fields. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 150404 (2013).
13. G.P. Torres del Castillo *3-D spinors, spin-weighted functions and their applications.* (Birkhauser, 2003).
14. S. Chandrasekhar. On algebraically special perturbations of black holes. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392**, 1 (1984).
15. R.M. Wald. On perturbations of a Kerr black hole. *J. Math. Phys.* **14**, 1453 (1973).
16. J. Jezierski, T. Smolka. A geometric description of Maxwell field in a Kerr spacetime. *Class. Quant. Grav.* **33**, 125035 (2016).
17. M.V. Berry, M.R. Dennis. Knotted and linked phase singularities in monochromatic waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **457**, 2251 (2001).
18. R. Penrose, W. Rindler. *Spinors and space-time. Two-spinor calculus and relativistic fields* (Cambridge University Press, 1984), vol. 1.
19. W. Kinnersley. Type D vacuum metrics. *J. Math. Phys.* **10**, 1195 (1969).
20. *GRTensorIII for Maple* [https://github.com/grtensor/grtensor].

Одержано 20.08.17

V.O. Pelykh, Y.V. Taistra

NULL ONE-WAY FIELDS IN THE KERR SPACETIME

S u m m a r y

Analytical solutions of the equations for massless fields with arbitrary spins have been obtained in the Kerr metric in the null one-way form, i.e. in the form of ingoing or outgoing, according to Chandrasekhar, fields propagating to or from a black hole, respectively. On the basis of the Newman–Penrose approach in the spinor formulation, the null one-way fields in the Petrov-type D spacetime are considered. A general analytical solution and an analytical solution with separated variables are found for the generalized equations of those fields in the Kerr metric. In the partial case of electromagnetic field, the Maxwell tensor and the energy-momentum tensor for the outgoing and ingoing one-way fields are calculated.