

Ю.М. ЄЛІСЕЄВ

Національний науковий центр “Харківський фізико-технічний інститут”,
Інститут фізики плазми
(1, Вул. Академічна, Харків 61108; e-mail: yeliseyev@kipt.kharkov.ua)

СТАТИЧНИЙ ЦИКЛОТРОННИЙ РЕЗОНАНС У ЗАРЯДЖЕНІЙ ПЛАЗМІ

УДК 539

У роботі розглянуто умову циклотронного резонансу частинки зарядженої плазми з надлишком електронів з аксіально несиметричною електромагнітною хвилею, яка у лабораторній системі відліку має нульову частоту. Вираховано значення параметра $q \equiv 2\omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2$, при яких виконується умова статичного циклотронного резонансу для електронів, позитивних і негативних іонів, позитронів. Визначено співвідношення між азимутальним числом хвилі m і кратністю резонансу n , при яких може бути досягнутий статичний циклотронний резонанс. Вказано інтеграл рівнянь дрейфового руху, що визначає зміни параметрів траєкторії частинки у зарядженій плазмі під дією електростатичної хвилі малої амплітуди в умовах циклотронного резонансу. Ці зміни можуть бути суттєвими та вести частинки за межі плазми. Дрейфові рухи в умовах статичного циклотронного резонансу можуть бути причиною аномального переносу частинок по радіусу в пристроях із зарядженою плазмою.

Ключові слова: заряджена плазма, циклотронний резонанс, дрейфовий рух.

1. Вступ

У нейтральній плазмі умова циклотронного резонансу електромагнітної хвилі з нерелятивістською зарядженою частинкою, що знаходиться у поздовжньому однорідному магнітному полі і рухається у поперечній до магнітного поля площині, має добре відомий вигляд

$$\omega = n\omega_{c\alpha}. \quad (1)$$

В (1) ω – частота хвилі, $\omega_{c\alpha} = e_{\alpha}B/(M_{\alpha}c)$ – циклотронна частота частинки, e_{α} і M_{α} – її заряд (з урахуванням знака) і маса, B – індукція магнітного поля, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ – кратність резонансу.

Цитування: Єлісеєв Ю.М. Статичний циклотронний резонанс у зарядженій плазмі. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 7, 455 (2025).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ISSN 2071-0194. *Укр. фіз. журн.* 2025. Т. 70, № 7

У зарядженій плазмі крім поздовжнього магнітного поля присутнє ще й електричне поле, зумовлене некомпенсованим просторовим зарядом електронів і іонів зарядженої плазми. У плазмі, що має форму довгого циліндра, як, наприклад, плазма у пастці Малмберга–Пеннінга (Malmberg–Penning trap), електричне поле спрямоване радіусом. У цих полях за відсутності зіткнень частинка обертається по азимуту і здійснює осциляції по радіусу (див. (28)).

У однорідній зарядженій плазмі умова циклотронного резонансу частинки із хвилею, що біжить по азимуту, набуває вигляду [1]:

$$\omega' = n\Omega_{\alpha}. \quad (2)$$

У (2) $\omega' = \omega - m\omega_{rot}^{\alpha}$ – частота хвилі в системі відліку, що обертається з повільною швидкістю обертання зарядженої частинки сорту α у схрещених полях

$$\omega_{rot}^{\alpha} = \frac{1}{2}(-\omega_{c\alpha} + \Omega_{\alpha}), \quad (3)$$

$$\Omega_\alpha = \text{sgn}(e_\alpha) \sqrt{\omega_{c\alpha}^2 - \frac{4e_\alpha E_r}{M_\alpha r}} \quad (4)$$

– “модифікована” циклотронна частота частинки в схрещених полях (вона дорівнює частоті радіальних осциляцій частинки), m – азимутальне число хвилі. У випадку надлишку електронів, який ми розглядаємо в даній роботі, радіальне електричне поле спрямоване до осі плазми, тобто є негативним: $E_r/r = (M_e/2e_e)\omega_{pe}^2(1-f) = \text{const} < 0$. Тут r – відстань від осі плазмового циліндра, $f \equiv n_i/n_e < 1$ – коефіцієнт зарядової нейтралізації плазми, що складається з електронів і позитивних іонів, $n_{e,i} = \text{const}$ – густина однорідних компонентів зарядженої плазми, $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_e/m_e$ – квадрат ленгмюрівської частоти електронів. У однорідній зарядженій плазмі всі характерні частоти частинки ($\omega_{\text{rot}}^\alpha$, Ω_α) і самої плазми (ω_{pe}) не залежать від радіусу.

Умова циклотронного резонансу у зарядженій плазмі (2) також давно і добре відома. Автор монографії [1] дає посилання на роботу [2] 1965 року, пов’язану з пучками, автори роботи [3] – на статтю [4] 1967 року, пов’язану з плазмою, що обертається у схрещених полях.

Автору даної статті відомі роботи [5–10], виконані ще у 1943–1945 роках, опубліковані у 1948 році і пов’язані з розробкою теорії магнетрона. У цих роботах фігурують “модифікована” циклотронна частота Ω_α (4), повільна частота обертання $\omega_{\text{rot}}^\alpha$ (3) і швидка частота обертання $\omega_{\text{rot}}^\alpha = (-\omega_{c\alpha} - \Omega_\alpha)/2$.

У лабораторній системі відліку умова циклотронного резонансу (2) набуває вигляду

$$\omega = m\omega_{\text{rot}}^\alpha + n\Omega_\alpha. \quad (5)$$

Резонансні частоти ω у формулі (5) можуть бути позитивними, можуть бути негативними. При певних значеннях напруженостей електричного й магнітного полів, характеристик частинки (e_α , M_α) і хвилі (m і n) резонансна частота ω (5) може виявитися рівною нулю:

$$\omega = 0 = m\omega_{\text{rot}}^\alpha + n\Omega_\alpha \quad (m \neq 0, \quad n \neq 0). \quad (6)$$

На цей цікавий окремий випадок циклотронного резонансу зарядженої частинки з хвилею нульової частоти було звернено увагу в [11, 12]. Резонанси, що задовольняють умову (6), природно назвати стаціонарними або статичними циклотронними резонансами. Ми віддаємо перевагу першому терміну.

Для виконання умови статичного резонансу (6) необхідно, щоб радіальне електричне та поздовжнє магнітне поля були такими, щоб виконувалося друге рівняння (6), і у плазмі були присутні аксіально-несиметричні хвилі, частоти яких у лабораторній системі відліку ω дорівнювали нулю (перше рівняння (6)).

Аксіально-несиметричні хвилі нульової частоти – це статичні аксіально-несиметричні поля: електричне $\mathbf{E}^\sim$ та/або магнітне $\mathbf{H}^\sim$ поля. Рівняння Максвелла, яким ці поля задовольняють, розпадаються на дві пари незалежних рівнянь: електро-статисти

$$\text{rot } \mathbf{E}^\sim = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}^\sim = 4\pi\rho^\sim \quad (7)$$

та магнітостатисти

$$\text{div } \mathbf{H}^\sim = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H}^\sim = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^\sim. \quad (8)$$

(Тут $\rho^\sim$ є аксіально-несиметричний розподіл густини статичного просторового заряду, що є джерелом поля $\mathbf{E}^\sim$, а $\mathbf{j}^\sim$ – щільність статичного струму, що породжує поле $\mathbf{H}^\sim$, $\text{div } \mathbf{j}^\sim = 0$.) Тобто статичні поля $\mathbf{E}^\sim$, $\mathbf{H}^\sim$ можуть бути присутніми у зарядженій плазмі окремо одне від одного, а можуть і одночасно, причому величини полів $\mathbf{E}^\sim$, $\mathbf{H}^\sim$ не пов’язані між собою. Хвилі нульової частоти $\mathbf{E}^\sim$, $\mathbf{H}^\sim$ далі будемо називати статичними збуреннями або просто збуреннями.

Як видно з (6), умова статичного циклотронного резонансу не залежить від природи збурення, від виду електродинамічної структури, в якій реалізується резонанс. А залежить лише від величини основних схрещених полів E_r та B , в яких перебуває заряджена частинка. Ці резонансні значення полів визначаються та аналізуються в даній роботі.

Зрозуміло, результат взаємодії зарядженої частинки зі статичним збуренням в умовах циклотронного резонансу (6), залежить від топографії збурення, яке у свою чергу залежить і від її природи, і від електродинамічної структури, в якій реалізується взаємодія.

Збурення нульової частоти у (6) може бути власною модою зарядженої плазми, а може і не бути власною модою. Відомо, що у хвильоводі, частково заповненому холодною однорідною плазмою, нульову частоту можуть мати нижньогібридні й діокотронна моди з кінцевим значенням поздовжньо-

го хвильового вектора ($k_z \neq 0$) [13–16]. (У нейтральній плазмі власні моди з нульовою частотою відсутні.)

Статичними збуреннями у (6), які не є власними модами зарядженої плазми (тобто не є рішеннями дисперсійного рівняння коливань зарядженої плазми), можуть бути аксіально-несиметричні статичні збурення зовнішніх електричного E_r або магнітного B полів (field errors), навмисні чи ненавмисні. Такі збурення можуть викликатись електродами, діагностичними зондами, введеними у плазму або розташованими поблизу її поверхні. Статичні збурення полів можуть виникати також внаслідок неточного виготовлення електродів, неточного їх юстування уздовж магнітного поля [17–19] і т.д. Збурення основного однорідного магнітного поля можуть утворюватись провідниками з постійними струмами, розташованими поблизу поверхні плазми.

Зрозуміло, такі малі збурення зовнішніх електричного або магнітного полів завжди існують у плазмі. Привабливо те, що в експерименті їх можна створити, сконструювати без використання ВЧ обладнання.

Сучасний інтерес до статичних збурень у зарядженій плазмі зумовлений тим, що вони розглядаються як причина аномального переносу заряджених частинок вздовж радіуса і взагалі втрат частинок з пасток. Вважається, що до цього призводять статичні збурення (за участі зіткнень), які є власними модами зарядженої плазми нульової частоти [13–15]. Але для умови статичного циклотронного резонансу (6) не має значення чи є збурення власною модою зарядженої плазми, чи ні.

У моделях, що розглядаються, не припускається, що виконується умова статичного циклотронного резонансу для частинок (6). Але саме в умовах циклотронних резонансів (і статичного резонансу в тому числі) вплив збурення на рух заряджених частинок значно сильніший, ніж у нерезонансних умовах [20]. Тож перенесення частинок вздовж радіуса в умовах циклотронних резонансів має пришвидчитись. Окрім цього загальна зміна параметрів траєкторії частинки (параметрів R , ρ у (28)) в умовах циклотронних резонансів зі збуренням навіть малої амплітуди набагато більша, ніж у нерезонансних умовах, і може сягати розміру самої плазми. У цьому процесі частинки можуть виходити за межі плазми і без “допомоги” зіткнень.

У теорії зарядженої плазми [1] введено параметр

$$q = 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} < \frac{1}{1-f}, \quad (9)$$

що характеризує відношення електричного й магнітного полів у плазмі. Величини, що входять у вираз для q , вимірюються і змінюються в експерименті. Через параметр q виражаються характерні частоти заряджених частинок усіх сортів, з яких складається плазма. Нерівність у (9) визначає область значень параметра q , у якій існує рівновага електронів, а отже і існування всієї зарядженої плазми з надлишком електронів.

У роботі визначені значення параметра q (9) і характеристики збурень, при яких виконується умова статичного циклотронного резонансу (6) для частинок різних мас та знаків заряду в зарядженій плазмі з надлишком електронів (розділ 2). У дрейфовому наближенні визначений закон, за яким змінюються елементи траєкторій заряджених частинок в умовах циклотронного резонансу з потенційною хвилею нульової або ненульової частоти (розділ 3).

2. Резонансні значення параметра q

2.1. Знайдемо значення параметра q (9), при яких виконується умова статичного циклотронного резонансу (6) для електронів, позитивних та негативних іонів та позитронів.

З (6) випливає, що умова статичного циклотронного резонансу виконується, коли

$$\omega_{\text{rot}}^\alpha = -(n/m) \Omega_\alpha. \quad (10)$$

Частота обертання зарядженої частинки (повільна) $\omega_{\text{rot}}^\alpha$ в (5), (6) визначається виразом (3). При надлишку електронів ($E_r < 0$) частота обертання позитивна ($\omega_{\text{rot}}^\alpha > 0$) і для позитивно, і для негативно заряджених частинок. Знак “модифікована” циклотронної частоти частинки Ω_α (4) визначається знаком заряду частинки e_α . Щоб рівняння (10) виконувалося й статичний циклотронний резонанс міг бути досягнутий, необхідно, щоб задовольнялася нерівність:

$$-nm \operatorname{sgn}(e_\alpha) > 0. \quad (11)$$

Підставляючи (3) в (6), знаходимо зв'язок між $\omega_{c\alpha}$ і Ω_α в умовах статичного резонансу:

$$\Omega_\alpha = \frac{m}{m+2n} \omega_{c\alpha}. \quad (12)$$

Оскільки Ω_α й $\omega_{c\alpha}$ у (12) мають однакові знаки, необхідною умовою досягнення резонансу є також виконання нерівності:

$$m(m+2n) > 0. \quad (13)$$

Тобто маємо дві необхідні умови на m та n , при виконанні яких можливий резонанс. Це умови (11) та (13).

Підставляючи (12) в (10), знаходимо зв'язок між $\omega_{\text{rot}}^\alpha$ і $\omega_{c\alpha}$ в умовах статичного циклотронного резонансу

$$\omega_{\text{rot}}^\alpha = -\frac{n}{m+2n}\omega_{c\alpha}. \quad (14)$$

Для виконання рівняння (14) необхідне виконання умов (11) і (13).

2.2. Для електронів ($\alpha = e$) величини $\Omega_e < 0$, $\omega_{ce} < 0$ негативні й з (11) впливає, що рівняння (6) може виконуватися, тільки якщо m й n мають однакові знаки ($m \cdot n > 0$). Для однозначності будемо вважати азимутальне число позитивним, $m > 0$. Тоді для електронів статичний циклотронний резонанс можливий тільки за умови $n > 0$. При цьому умова (13) також виконується.

Величина Ω_e для електронів, виражена через параметр q , дорівнює [1]:

$$\Omega_e = [1 - q(1-f)]^{1/2}\omega_{ce}, \quad q < 1/(1-f). \quad (15)$$

Комбінуючи (12) й (15), знаходимо резонансні значення q для електронів:

$$q = q_{\text{res}}^e \equiv \frac{4n(m+n)}{(m+2n)^2} \frac{1}{(1-f)}, \quad m > 0, \quad n > 0. \quad (16)$$

Статичний циклотронний резонанс для електронів може досягатись при всіх $n, m > 0$. Оскільки в (16) коефіцієнт $4n(m+n)/(m+2n)^2 < 1$, то при

Таблиця 1. Числові значення q_{res}^e , Ω_e , ω_{rot}^e для електронів в умовах статичного циклотронного резонансу (6) кратності $n = 1$ й різних азимутальних числах $m > 0$. Розрахунки по формулах (16), (15), (14)

m	q_{res}^e	Ω_e/ω_{ce}	$\omega_{\text{rot}}^e/ \omega_{ce} $
1	$(8/9)/(1-f)$	$1/3$	$1/3$
2	$(3/4)/(1-f)$	$1/2$	$1/4$
3	$(16/25)/(1-f)$	$3/5$	$1/5$

всіх $n, m > 0$ резонансні значення q_{res}^e задовольняють умову існування рівноваги зарядженої плазми з надлишком електронів (9), (15), $q_{\text{res}}^e < 1/(1-f)$.

У табл. 1 для ілюстрації наведені числові значення q_{res}^e , Ω_e , ω_{rot}^e для електронів в умовах статичного резонансу (6), кратності $n = 1$ й різних значеннях азимутального числа m , обчислені за формулами (16), (15) (або (12)) і (14). Видно, що електрони зарядженої плазми, які обертаються з повільною частотою обертання (3), можуть бути в резонансі зі статичним збуренням з нижчими значеннями m й n при значеннях параметра q порядку бріллюєнівського значення ($q \sim 1/(1-f)$), тобто в електричних полях порядку гранично сильних припустимих значень.

2.3. Для позитивних іонів ($\alpha = i^+$) з (3), (4) маємо:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{rot}}^{i+} &= (-\omega_{ci+} + \Omega_{i+})/2 > 0, \\ \omega_{ci+} &> 0, \quad \Omega_{i+} > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

З (11) впливає, що статичний резонанс (6) може виконуватися, тільки якщо m й n мають різні знаки ($m \cdot n < 0$). Оскільки ми вважаємо $m > 0$, то n повинне бути негативним, $n < 0$. При цьому повинна також виконуватися умова (13).

Для позитивних іонів вираз (4) для Ω_{i+} через параметр q має вигляд

$$\begin{aligned} \Omega_{i+} &= \omega_{ci+} [1 + q(M_{i+}/M_e)(1-f)]^{1/2}, \\ q &< 1/(1-f). \end{aligned} \quad (18)$$

Підставляючи вираз (18) у (12), знаходимо значення q , при яких виконується умова статичного циклотронного резонансу (6) у зарядженій плазмі для позитивних іонів:

$$\begin{aligned} q = q_{\text{res}}^{i+} &\equiv \frac{M_e}{M_{i+}} \frac{(-4n)(m+n)}{(m+2n)^2} \frac{1}{(1-f)} \\ (n < 0, m + 2n > 0). \end{aligned} \quad (19)$$

При статичному резонансі (6) значення q_{res}^{i+} є різними для іонів різних мас. Так що в зарядженій плазмі в умовах статичного циклотронного резонансу можливий селективний вплив на іони різних мас, як і при циклотронному резонансі (5) в зарядженій плазмі ($\omega \neq 0$), як і при “звичайному” циклотронному резонансі в нейтральній плазмі $\omega = n\omega_{c\alpha}$.

У табл. 2 наведені числові значення q_{res}^{i+} , Ω_{i+} і ω_{rot}^{i+} для позитивних іонів в умовах статичного резонансу (6) кратності $n = -1$ й різних припустимих значеннях азимутального числа m . Як випливає з (13), резонанс позитивного іона зі статичним збуренням можливий при досить великих значеннях азимутального числа m ($m > -2n$). Так, резонанси кратності $n = -1, -2, -3, \dots$ можливі тільки при $m \geq +3, +5, +7, \dots$ відповідно.

За рахунок коефіцієнта M_e/M_{i+} резонансні значення для позитивних іонів q_{res}^{i+} (19) виявляються малими у порівнянні з резонансними значеннями для електронів q_{res}^e (16). Наприклад, для аргону ($M_{i+} = 40$ в.о.) маємо $M_e/M_{i+} \approx 1,36 \cdot 10^{-5}$. Однак відповідне цим малим значенням q_{res}^{i+} радіальне електричне поле, що діє на іони, залишається сильним у порівнянні з магнітним. Так, при $m = 3$ відношення електричного й магнітного полів, описуване другим доданком у квадратних дужках в (18), дорівнює 8 (див. другий стовпчик табл. 2). При $m = 4$ — відношення дорівнює 3.

2.4. Якщо у зарядженій плазмі поряд з електронами й позитивними іонами присутня невелика кількість негативних іонів ($\alpha = i^-$), для них маємо вираз для частоти Ω_{i-} подібний до (18):

$$\Omega_{i-} = \omega_{ci-} \sqrt{1 - q \frac{M_{i-}}{M_e} (1 - f)} < 0. \quad (20)$$

Вираз (20) відрізняється від (18) знаком другого доданка у квадратних дужках і знаком ω_{ci-} . Рух негативних іонів фінітний по радіусу, тільки у вузькому (у порівнянні з інтервалом припустимих значень q для електронів (15)) інтервалі значень параметра q :

$$q < \frac{M_e}{M_{i-}} \frac{1}{1 - f}. \quad (21)$$

Негативні іони утримуються по радіусу, якщо радіальне електричне поле достатньо слабе. Якщо нерівність (21) не виконується, іони викидаються по радіусу із плазми. У цій області значень параметра q заряджена плазма є фільтром для важких негативних іонів з масами:

$$M_{i-} > \frac{M_e}{q(1 - f)}. \quad (22)$$

Така ситуація аналогічна ситуації, яка має місце у фільтрі Архімеда для позитивних іонів [21]. У ньому радіальне електричне поле позитивне й важкі

позитивні іони з масами M_{i+} , що задовольняють нерівності (22), не утримуються по радіусу, викидаються з плазми, відокремлюючись таким чином від легких іонів.

Для негативних іонів умова статичного циклотронного резонансу (6) може виконуватися тільки при однакових знаках m і n ($m \cdot n > 0$).

Резонансні значення q_{res}^{i-} , при яких досягається статичний циклотронний резонанс для негативних іонів у зарядженій плазмі, дорівнюють:

$$q = q_{\text{res}}^{i-} \equiv \frac{M_e}{M_{i-}} \frac{4n(m+n)}{(m+2n)^2} \frac{1}{(1-f)} \quad (23)$$

$(n > 0, m > 0).$

Вираз для q_{res}^{i-} (23) задовольняє нерівності (21) при всіх $n, m > 0$, оскільки коефіцієнт $4n(m+n)/(m+2n)^2 < 1$.

У табл. 3 наведені числові значення q_{res}^{i-} , Ω_{i-} , ω_{rot}^{i-} для негативних іонів в умовах статичного циклотронного резонансу (6) кратності $n = 1$ й різних значеннях азимутального числа m , обчислені за формулами (23), (20), (14). Значення q_{res}^{i-} в (23) і в табл. 3 відрізняються коефіцієнтом M_e/M_{i-}

Таблиця 2. Числові значення q_{res}^{i+} , Ω_{i+} , ω_{rot}^{i+} для позитивних іонів в умовах статичного циклотронного резонансу (6) кратності $n = -1$ й різних припустимих азимутальних числах $m > 0$. Розрахунки по формулах, (19), (18) (або (12)), (14)

m	q_{res}^{i+}	Ω_{i+}/ω_{ci+}	$\omega_{\text{rot}}^{i+}/\omega_{ci+}$
3	$8(M_e M_{i+})/(1-f)$	3	1
4	$3(M_e M_{i+})/(1-f)$	2	1/2
5	$(16/9)(M_e M_{i+})/(1-f)$	5/3	1/3

Таблиця 3. Числові значення q_{res}^{i-} , Ω_{i-} , ω_{rot}^{i-} для негативних іонів в умовах статичного циклотронного резонансу (6) кратності $n = 1$ й різних азимутальних числах $m > 0$. Розрахунки по формулах (23), (20) (або (12)), (14)

m	q_{res}^{i-}	Ω_{i-}/ω_{ci-}	$\omega_{\text{rot}}^{i-}/ \omega_{ci-} $
1	$(8/9)(M_e/M_{i-})(1-f)$	1/3	1/3
2	$(3/4)(M_e/M_{i-})(1-f)$	1/2	1/4
3	$(16/25)(M_e/M_{i-})(1-f)$	3/5	1/5

від значень q_{res}^e для електронів у формулі (16) й у табл. 1, а значення відносин Ω_{i-}/ω_{ci-} і Ω_e/ω_{ce} у таблицях в точності збігаються. За рахунок коефіцієнта M_e/M_{i-} резонансні значення для негативних іонів q_{res}^{i-} (23) набагато менші від резонансних значень q_{res}^e для електронів (16). Вони також виявляються меншими резонансних значень для позитивних іонів q_{res}^{i+} (19).

2.5. Якщо в плазмі поряд з електронами й позитивними іонами в зарядженій плазмі є невелика кількість позитронів ($\alpha = e^+$), для них вираз для Ω_{e+} має вигляд

$$\Omega_{e+} = \omega_{ce+} \sqrt{1 + q(1-f)} > 0 \quad (24)$$

$$(\omega_{ce+} > 0, \omega_{\text{rot}}^{e+} > 0).$$

Відзначимо, для позитронів величина Ω_{e+} змінюється від мінімального значення ω_{ce+} , яке досягається при $q = 0$, до максимального значення, що дорівнює всього лише $\Omega_{e+} = 2^{1/2}\omega_{ce+}$ при бріллоєнівському значенні параметра q для електронів $q = 1/(1-f)$. Тоді як для позитивних іонів величина Ω_{i+} змінюється від ω_{ci+} до значення $\Omega_{i+} \approx \omega_{ci+} (M_{i+}/M_e)^{1/2}$, яке може в сотні разів перевищувати ω_{ci+} .

Статичний циклотронний резонанс (6) для позитронів може досягатися, якщо m й n мають різні знаки ($m \cdot n < 0$). Повинна також виконуватися умова (13). З (24) і (12) знаходимо резонансне значення q для позитронів:

$$q = q_{\text{res}}^{e+} \equiv \frac{(-4n)(m+n)}{(m+2n)^2} \frac{1}{(1-f)}, \quad (25)$$

$$n < 0, \quad m + 2n > 0.$$

Воно збігається з виразом для резонансного значення q_{res}^{i+} для позитивних іонів (19) при заміні в останньому $M_{i+} \rightarrow M_{e+} = M_e$.

Таблиця 4. Числові значення q_{res}^{e+} , Ω_{e+} , ω_{rot}^{e+} для позитронів в умовах статичного циклотронного резонансу (6) кратності $n = -1$ й різних припустимих азимутальних числах $m > 0$. Розрахунки по формулах (25), (12), (14)

m	q_{res}^{e+}	Ω_{e+}/ω_{ce+}	$\omega_{\text{rot}}^{e+}/\omega_{ce+}$
7	$(24/25)/(1-f)$	7/5	1/7
8	$(28/36)/(1-f)$	8/6	1/8
9	$(32/49)/(1-f)$	9/7	1/9

Безпосередні обчислення по формулі (25) показують, що при $n = -1$ й азимутальних числах $m = 3, 4, 5, 6$ величина q_{res}^{e+} виявляється більше значення параметра q гранично припустимого для рівноваги зарядженої плазми з надлишком електронів: $q_{\text{res}}^{e+} > 1/(1-f)$. Це означає, що статичні циклотронні резонанси для позитронів при зазначених m і n не можуть бути реалізовані у зарядженій плазмі з надлишком електронів. Тільки при $m \geq 7$ величина q_{res}^{e+} (25) зменшується до прийняттого значення ($q_{\text{res}}^{e+} < 1/(1-f)$) і статичний резонанс для позитронів може бути реалізований.

При довільних значеннях $n < 0$ величина q_{res}^{i+} стає менше гранично припустимого значення для електронів ($q_{\text{res}}^{e+} < 1/(1-f)$) і статичний циклотронний резонанс стає можливим при значеннях m , що задовольняють умову:

$$m > (4 + 2\sqrt{2}) |n|. \quad (26)$$

Як впливає із (26), резонанс позитрона зі статичним збуренням можливий при досить великих значеннях азимутального числа m . Резонанси кратності $n = -1, -2, -3, \dots$ можливі тільки при $m \geq +7, +14, +21, \dots$ відповідно.

У табл. 4 наведені числові значення q_{res}^{e+} , Ω_{e+} і ω_{rot}^{e+} для позитронів в умовах статичного циклотронного резонансу (6) при $n = -1$ й різних припустимих значеннях азимутального числа m . З формули (25) і табл. 4 видно, що величини резонансних значень для позитронів q_{res}^{e+} виявляються порядку гранично припустимих значень для електронів ($q_{\text{res}}^{e+} \sim 1/(1-f)$).

3. Дрейфовий рух заряджених частинок в умовах циклотронного резонансу

3.1. Визначимо, як змінюються параметри траєкторії частинки, що перебуває в зарядженій плазмі з надлишком електронів, в умовах циклотронного резонансу загального вигляду (5) або статичного (6) з потенційною хвилею малої амплітуди? В обох випадках закон, за яким змінюються елементи траєкторії зарядженої частинки, той самий.

Зауважимо, у випадку статичного циклотронного резонансу повна поперечна енергія зарядженої частинки в лабораторній системі, яка складається з кінетичної та потенціальної енергії, зберігається, оскільки основні електричне E_r й магнітне B поля,

а також поля $\mathbf{E}^{\sim}$, $\mathbf{H}^{\sim}$ статичного збурення не залежать від часу. Окремо кінетична і потенціальна енергія частинки можуть змінюватися суттєво.

У полі аксіально несиметричного статичного збурення змінюється узагальнений азимутальний момент P_{φ} частинки.

Скористаємося результатами рішення рівнянь руху зарядженої частинки в схрещених полях і в поле потенційної хвилі малої амплітуди, що біжить по азимуту, вигляду

$$\phi(r, m\varphi - \omega t) \quad (27)$$

в умовах циклотронного резонансу (5), проведеного в [11, 12, 22] у дрейфовому наближенні. В умовах статичного циклотронного резонансу (6) потенціал хвилі (27) набуває вигляду $\phi(r, m\varphi)$, тобто вигляд статичного збурення.

У відсутності хвилі (27) рішення рівнянь руху зарядженої частинки у поперечній до магнітного поля площини мають у комплексній формі вигляд:

$$r \exp(i\varphi) = \exp(i\omega_{\text{tot}}^{\alpha} t) [R \exp(i\theta) + \rho \exp(i\vartheta - \Omega_{\alpha} t)]. \quad (28)$$

У нейтральній плазмі ($f = 1$, $\omega_{\text{tot}}^{\alpha} = 0$, $\Omega_{\alpha} = \omega_{c\alpha}$) величини R , θ є циліндричними координатами ларморівського центра частинки, ρ – її ларморівський радіус, ϑ – фаза частинки на ларморівській окружності в початковий момент часу ($t = 0$).

У загальному випадку ($\omega_{\text{tot}}^{\alpha} \neq 0$) величини R , θ й ρ , ϑ у (28) є узагальненням циліндричних координат зарядженої частинки в нейтральній плазмі на випадок зарядженої плазми. У системі відліку, що обертається з частотою $\omega_{\text{tot}}^{\alpha}$, величини R , θ і ρ , ϑ мають той самий сенс, що й у нейтральній плазмі. Це видно з (28).

У відсутності хвилі величини R , θ і ρ , ϑ є незмінними – інтегралами руху. Рух частинки за радіусом згідно з (28) відбувається в інтервалі $|R - \rho| \leq r \leq R + \rho$. Умова того, що при такому русі частинка знаходиться всередині плазмового стовпа радіуса a , має вигляд $R + \rho \leq a$. Лінія $R + \rho = a$ відповідає частинкам, які під час руху (28) торкаються межі плазми (лінія “1” на рис. 1 і 2), але не перетинають межу.

При наявності хвилі малої амплітуди в умовах циклотронного резонансу (5) параметри траєкторії R , θ та ρ , ϑ повільно змінюються. При цьому

залишається незмінною комбінація [11, 12, 22]:

$$\frac{\rho^2}{n} - \frac{R^2}{m+n} = \text{const.} \quad (29)$$

Це один з інтегралів дрейфового руху частинки у полі потенційної хвилі малої амплітуди (27), що біжить по азимуту, в умовах циклотронного резонансу (5). Інтеграл (29) визначає траєкторії дрейфового руху частинки на площині параметрів R та ρ . Рівняння (29) справедливе при будь-яких резонансних частотах (5), в тому числі і у випадку статичного циклотронного резонансу (6), при будь-яких малих або немалих початкових значеннях параметрів R , ρ частинки, при довільній залежності потенціалу хвилі (27) від радіуса r й довільній періодичній залежності від азимутального кута φ , для будь-яких азимутальних чисел m і кратностей резонансу n , у тому числі й при m або n , які дорівнюють нулю.

Під дією хвилі (27) частинки здійснюють періодичні рухи уздовж дрейфових траєкторій (29). Те наскільки змінюються параметри R , ρ в процесі дрейфу, як далеко частинка відходить від початкових значень R , ρ , визначається дрейфовими рівняннями для $\dot{R}$, $\dot{\theta}$ й $\dot{\rho}$, $\dot{\vartheta}$ [11, 12, 22], а в остаточному підсумку – конкретно залежністю потенціалу хвилі (27) від радіуса r й азимутального кута φ . У даній роботі ці питання не порушуються. Ми обмежимося аналізом дрейфу на основі інтеграла руху (29).

3.2. Для електронів статичний циклотронний резонанс (6) досягається за умови $m \cdot n > 0$ (див. розділ 2.2). У цьому випадку дрейфова траєкторія електрона на площині $R\rho$ (29) є гіперболою з асимптотою $\rho = [n/(m+n)]^{1/2} R$. Дрейфові траєкторії електрона на площині $R\rho$ та асимптота наведені на рис. 1. Тангенс кута нахилу асимптоти (лінія “3”) дорівнює: $[n/(m+n)]^{1/2} < 1$.

Електрони, які перебувають на площині $R\rho$ в області нижче асимптоти ($\rho < [n/(m+n)]^{1/2} R$), дрейфуючи під дією хвилі (27) по гіперболах (29) продовжують залишатися в цій області. Ці електрони при ларморівському обертанні не охоплюють вісь системи. Умова неохоплення має вигляд $\rho < R$ (область нижче за лінію “2” на рис. 1).

Електрони, які перебувають на площині $R\rho$ в області вище асимптоти, $\rho > [n/(m+n)]^{1/2} R$, продовжують залишатися в цій області. При цьому вони можуть охоплювати (якщо $\rho > R$), а можуть і

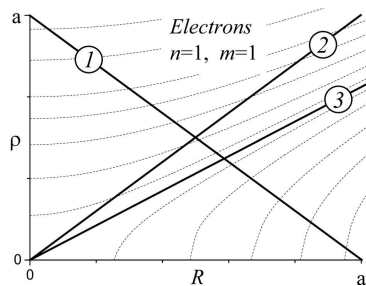


Рис. 1. Дрейфові траєкторії електронів (гіперболи) на площині $R\rho$ в умовах циклотронного резонансу кратності $n = 1$ з потенційною хвилею (27) з азимутальним числом $m = 1$. Пряма лінія “1” позначає залежність $R + \rho = a$, що відповідає границі плазми (a – радіус плазми). Лінія “2” позначає залежність $\rho = R$, що розмежовує частинки, які охоплюють і не охоплюють вісь системи при ларморівському обертанні. Лінія “3” є асимптотою сімейства гіпербол $\rho = [n/(m+n)]^{1/2} R$

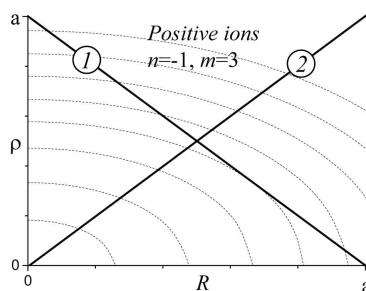


Рис. 2. Дрейфові траєкторії позитивних іонів (еліпси) на площині $R\rho$ в умовах циклотронного резонансу кратності $n = -1$ з потенційною хвилею (27) з азимутальним числом $m = 3$. Лінії “1” і “2” позначають те саме, що й на рис. 1

не охоплювати ($\rho < R$) вісь плазми при ларморівському обертанні. Причому, у процесі дрейфа під дією хвилі вони можуть переходити з одного стану в інший, якщо перетинають лінію $\rho = R$ (лінія “2” на рис. 1).

Як видно з рис. 1, усі дрейфові траєкторії електронів, що перебувають усередині плазми (в області $R + \rho \leq a$), перетинають межу плазми – лінію “1”, на якій $R + \rho = a$. Це означає, що електрони зарядженої плазми, що перебувають на площині $R\rho$ на будь-якій траєкторії в сприятливих фазах хвилі й частинки (кутах θ , ϑ і належної залежності потенціалу ϕ (27) від радіуса r), можуть перетинати поверхню плазми й дрейфувати під дією хвилі назовні плазми (в область $\rho + R > a$), приводячи в такий спосіб до переносу електронів по радіусу.

3.3. Для позитивних іонів статичний резонанс (6) може досягатися за умови $n < 0$, $m + 2n > 0$

(див. розділ 2.3). У цьому випадку дрейфові траєкторії іонів на площині $R\rho$ (29) є еліпсами з відношенням півосей уздовж ρ і уздовж R , що дорівнює $[|n|/(m+n)]^{1/2}$ (рис. 2). Це еліпс, сплюснений уздовж осі ρ , оскільки, згідно з (13), $|n| < (m+n)$. Наприклад, при $m = 3$, $n = -1$ співвідношення півосей дорівнює $[|n|/(m+n)]^{1/2} = 1/2^{1/2} \approx 0,7$.

Для іонів на будь-яких дрейфових траєкторіях існує принципова можливість переходу зі стану, у якому вони охоплюють вісь плазми при ларморівському обертанні ($\rho > R$), у стан, у якому вони не охоплюють вісь ($\rho < R$), і навпаки, якщо перетинають лінію $\rho = R$ (лінія “2” на рис. 2).

Перетинати поверхню плазми й виходити із плазми назовні можуть тільки позитивні іони, які на площині $R\rho$ розташовуються на дрейфових траєкторіях (еліпсах), що перетинають лінію $\rho + R = a$ (лінія “1” на рис. 2). Це еліпси з півосями по R , ρ , більшими, ніж $[(m+n)/m]^{1/2} a$ та $(|n|/m)^{1/2} a$ відповідно.

Еліпси з меншими півосями не перетинають лінію $\rho + R = a$. Дрейфуючи по них, позитивні іони, наближаються до поверхні плазми або віддаляються від неї, не досягаючи при цьому самої поверхні плазми.

3.4. Для негативних іонів, як і для електронів, умова статичного резонансу (6) може виконуватися при однакових знаках m і n , тобто при $m > 0$, $n > 0$ (розділ 2.4). Усі висновки розділу 3.2 і рис. 1 застосовні й до негативних іонів. Слід мати на увазі, що статичні циклотронні резонанси для негативних іонів реалізуються при набагато порядків менших значеннях параметра q , ніж для електронів (порівняй табл. 1 і 3).

Дрейфова траєкторія негативних іонів на площині $R\rho$ (29) є гіперболою з асимптотою $\rho = [n/(m+n)]^{1/2} R$ (див. рис. 1). Негативні іони, які перебувають на площині $R\rho$ в області нижче асимптоти ($\rho < [n/(m+n)]^{1/2} R$), у процесі дрейфу в полі хвилі залишаються в цій же області. Вони не охоплюють вісь системи при ларморівському обертанні.

Негативні іони, які перебувають на площині $R\rho$ в області вище асимптоти ($\rho > [n/(m+n)]^{1/2} R$), у процесі дрейфу залишаються в цій області. Вони можуть охоплювати, а можуть не охоплювати вісь системи. У процесі дрейфу негативні іони можуть переходити з одного стану в інший.

Негативні іони, що перебувають на будь-якій дрейфовій траєкторії на площині $R\rho$ і знаходяться у сприятливих фазах хвилі та частинки, можуть перетинати поверхню плазми й дрейфувати під дією хвилі назовні, приводячи до переносу частинок по радіусу.

3.5. Для позитронів умова статичного резонансу (6) в зарядженій плазмі може досягатися за умови $n < 0$ та $m > (4 + 2\sqrt{2})|n|$. Дрейфова траєкторія позитронів на площині $R\rho$ (29) є еліпсом з відношенням півосей уздовж ρ і уздовж R рівним $[|n|/(m+n)]^{1/2}$. Таке саме співвідношення півосей має місце й для позитивних іонів (розділ 3.3). Однак, оскільки статичні резонанси для позитронів можливі тільки при більших значеннях азимутальних чисел m ($(m+n) \gg |n|$), цей еліпс сильніше стиснутий уздовж осі ρ , ніж еліпси на рис. 2. Так, при $n = -1$ й $m = +7$ відношення півосей уздовж ρ і уздовж R дорівнює $[|n|/(m+n)]^{1/2} = (1/6)^{1/2} \approx 0,41$.

Усі висновки розділу 3.3 для позитивних іонів справедливі й для позитронів.

4. Висновки

4.1. У роботі показано, що в зарядженій плазмі з надлишком електронів ($E_r < 0$) у лабораторній системі відліку можливий статичний циклотронний резонанс заряджених частинок зі статичним аксіально несиметричним збуренням електричного та/або магнітного полів. Нульова частота є резонансною для всіх видів заряджених частинок, але резонанс реалізується при різних значеннях полів E_r , B .

Розраховані значення параметра q , при яких реалізується статичний циклотронний резонанс для електронів (16), позитивних (19) і негативних (23) іонів, позитронів (25). Для легких частинок (електронів та позитронів) резонансні значення q менші, але порядку максимально можливого значення для зарядженої плазми з надлишком електронів $1/(1-f)$.

Для іонів (позитивних та негативних) резонансні значення q значно менші. Вони порядку $(M_e/(M_i)/(1-f))$. Хоча для позитивних іонів можуть бути і у декілька разів більшими, але все одно для іонів резонансні значення параметра q малі: $q_{\text{res}}^i \ll 1/(1-f)$.

Визначені співвідношення між азимутальним числом m і кратністю резонансу n (11) й (13), при яких тільки і може бути досягнутий статичний циклотронний резонанс (6).

4.2. Вказано інтеграл рівнянь дрейфового руху (29), що визначає зміну параметрів поперечної траєкторії частинки в зарядженій плазмі – R і ρ – під дією електростатичної хвилі малої амплітуди. Інтеграл дійсний і в загальному випадку циклотронного резонансу (5), і в окремому випадку статичного циклотронного резонансу (6).

Дрейфові траєкторії негативно заряджених частинок (електрони, негативні іони) мають форму гіпербол на площині параметрів $R\rho$. Траєкторії позитивно заряджених частинок (позитивні іони, позитрони) мають форму еліпсів. Параметри еліпсів і гіпербол визначаються азимутальним числом хвилі m й кратністю циклотронного резонансу n .

Зміна параметрів R і ρ в результаті взаємодії із хвилею в умовах циклотронного резонансу (ΔR , $\Delta \rho$) може бути суттєвою – навіть порядку радіуса самої плазми a ($\Delta R \sim a$, $\Delta \rho \sim a$).

Більшу можливість досягати поверхні плазми й виходити за її межі мають негативно заряджені частинки (електрони та негативно заряджені іони). Кожна гіпербола, по якій вони дрейфують на площі параметрів $R\rho$, перетинає лінію $R + \rho = a$. При цьому частинка виходить за межі плазми при ларморовському обертанні.

З позитивно заряджених частинок, (позитивні іони, позитрони), досягати поверхні плазми й виходити за її межі можуть тільки ті частинки, що розташовані на площі параметрів $R\rho$ на еліпсах з півосями по R , ρ більшими, ніж $[(m+n)/m]^{1/2} a$ та $(|n|/m)^{1/2} a$ відповідно.

Розглянуті дрейфові рухи в умовах циклотронного резонансу можуть бути причиною аномального транспорту частинок по радіусу (без зіткнень), який спостерігається в експериментах із зарядженою плазмою.

Автор вдячний Д.Л. Грекову за інтерес до роботи й корисні поради.

1. R.C. Davidson. *Theory of Nonneutral Plasmas* (W.A. Benjamin, Inc., 1974).
2. H. Pözl. Types of waves in magnetically focussed electron beams. *Arch. Elek. Übertrag.* **19**, 367 (1965).

3. Ю.А. Киричкин, В.Л. Сизоненко, К.Н. Степанов. Ионная циклотронная неустойчивость вращающейся плазмы. *УФЖ* **18**, 621 (1973).
4. В.В. Долгополов. О циклотронном резонансе в холодной вращающейся плазме. *ЖТФ* **37**, 23 (1967).
5. S.I. Tomonaga. Theory of split-anode magnetrons. I. *J. Phys. Soc. Jpn.* **3**, 56 (1948).
6. S.I. Tomonaga. Theory of split-anode magnetrons II. *J. Phys. Soc. Jpn.* **3**, 62 (1948).
7. Yu. Hagihara. Application of celestial mechanics to the theory of a magnetron. I. *J. Phys. Soc. Jpn.* **3**, 70 (1948).
8. Yu. Hagihara. Application of celestial mechanics to the theory of a magnetron. II. *J. Phys. Soc. Jpn.* **3**, 76 (1948).
9. Yu. Hagihara. Application of celestial mechanics to the theory of a magnetron. III. *J. Phys. Soc. Jpn.* **3**, 81 (1948).
10. M. Kotani. On the oscillation mechanism of the magnetron. *J. Phys. Soc. Jpn.* **3**, 86 (1948).
11. Ю.Н. Елисеев. *Нелинейная теория взаимодействия резонансных частиц со спиральными потенциальными волнами*. Кандидатська дисертація (ХГУ, 1984).
12. Ю.Н. Елисеев, К.Н. Степанов. Дрейфовое движение заряженной частицы в скрещенных аксиальном магнитном и радиальном электрическом полях и электрическом поле бегущей по азимуту потенциальной волны. *УФЖ* **28**, 1010 (1983).
13. P. Goswami, S.N. Bhattacharyya, A. Sen, K.P. Maheshwari. Stationary modes in a non-neutral plasma. *Phys. Plasmas* **5**, 895 (1998).
14. R. Keinigs. Effect of magnetic field errors on low-frequency waves in a pure electron plasma. *Phys. Fluids* **24**, 860 (1981).
15. S.A. Prasad, T.M.O'Neil. Waves in a cold pure electron plasma of finite length. *Phys. Fluids* **26**, 665 (1983).
16. Y.N. Yeliseyev. Trivelpiece–Gould modes and low-frequency electron–ion instability of non-neutral plasma. *J. Plasma Phys.* **90**, 935900103 (2024).
17. N.A. Kervalishvili. Electron transport across magnetic field in gas-discharge nonneutral electron plasma. *J. Georgian Geophys Soc. B* **17**, 58 (2014).
18. I. Kotelnikov, M. Romé. Equilibrium of nonneutral plasmas in a Malmberg–Penning trap with a weakly tilted magnetic field. *Phys. Plasmas* **15**, 072118 (2008).
19. D.H.E. Dubin. Theory and simulations of electrostatic field error transport. *Phys. Plasmas* **15**, 072112 (2008).
20. А.В. Тимофеев. *Резонансные явления в колебаниях плазмы* (Физматлит, 2009) [ISBN: 978-5-9221-1043-3].
21. T. Ohkawa. Plasma mass filter. US Patent #6,096,220 (August 1, 2000).
22. Ю.Н. Елисеев, К.Н. Степанов. Дрейфовое движение заряженной частицы в однородном магнитном поле и электрическом поле бегущей по азимуту потенциальной волны. *УФЖ* **28**, 683 (1983).

Одержано 08.10.24

Yu.N. Yeliseyev

STATIONARY CYCLOTRON

RESONANCE IN NON-NEUTRAL PLASMA

This work deals with the condition required for a cyclotron resonance between a charged particle and an axially asymmetric zero-frequency electromagnetic wave to take place in a non-neutral plasma with an excess of electrons in the laboratory reference frame. The values of the parameter $q = 2\omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2$ were calculated at which the condition of stationary cyclotron resonance is obeyed for electrons, positrons, and positive and negative ions. Relationships between the azimuthal number m and the resonance multiplicity n , which are necessary for a stationary cyclotron resonance to occur, have been determined. We have found the integral of the drift motion equations which determines the variations of the particle trajectory parameters in the non-neutral plasma subjected to the action of a small-amplitude electrostatic wave under the cyclotron resonance conditions. These variations can be substantial and force the particles to go outside the plasma. It is shown that, under the cyclotron resonance conditions, the considered drift motions can invoke an anomalous radial transport of particles in non-neutral-plasma devices.

Keywords: non-neutral plasma, cyclotron resonance, drift motion.