М. БУЛАХОВ,[1,2] О.С. ПЕЛЕТМИНСЬКИЙ,[1,2] Ю.В. СЛЮСАРЕНКО [1,2,3]

[1] Інститут теоретичної фізики імені О.І. Ахієзера,
Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут" НАН України
(Вул. Академічна, 1, Харків 61108)

[2] Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
(Майдан Свободи, 4, Харків 61022)

[3] Національний університет "Львівська політехніка"
(Вул. Степана Бандери, 12, Львів 79013)

УДК 536, 537.6, 539.1

ВПЛИВ ФОТОННОЇ ПІДСИСТЕМИ НА МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ КВАНТОВИХ ГАЗІВ

Вивчено можливість впливу фотонного компонента на магнітні властивості системи із квантових газів, що перебувають у термодинамічній рівновазі з випромінюванням (фотонами). Запропоновано просту модель системи, в рамках якої здобуто загальні рівняння, що описують термодинамічну рівновагу квантових газів дворівневих атомів із фотонами. Отримані рівняння розв'язано в області температур, далеких від температури виродження всіх трьох компонентів системи. Аналіз розв'язків свідчить про нетривіальну поведінку магнітного стану системи як відповідь на зміну густини фотонів та інтенсивності зовнішнього магнітного поля. Показано, що збільшення густини фотонів в системі за рахунок зовнішніх джерел може приводити до збільшення як намагніченості системи, так і густини збуджених атомів. Такий висновок не є a priory тривіальним з огляду на те, що фотони у вакуумі не мають магнітного моменту.

Ключові слова: квантові гази, дворівневі атоми, фотони, зовнішнє магнітне поле, термодинамічна рівновага, невироджений стан, інверсна заселеність, магнітні властивості середовища.

1. Вступ

Само по собі поняття "квантові гази", що об'єднує квантові системи багатьох тотожних частинок у газовому агрегатному стані, в яких ефектом перекриття хвильових функцій окремих частинок не можна знехтувати, стало вже звичним за майже сторічну історію досліджень, початок якої був покладений роботами Ш. Бозе, А. Ейнштейна, Е. Фермі, П. Дірака [1, 4]. Однак досі подібні об'єкти не полишають дивувати дослідників проявом все нових і нових властивостей, що можуть слугувати не тільки демонстрацією яскравих прикладів прояву квантових ефектів на мікрорівні, а й подавати небезпідставні надії на використання в практичних застосуваннях, див., наприклад, [5]. Деякі зі згаданих нових явищ та ефектів у квантових газах можуть бути пов'язані зі взаємодією атомів таких газів із випромінюванням (фотонами). Наприклад, у роботах [6,7] дослідження квантових газів у рівновазі з випромінюванням за наднизьких температур дозволило передбачити у таких системах низку, можна сказати, "екзотичних" ефектів, пов'язаних із доказом можливості реалізації стану бозе-ейнштейнівської конденсації (БЕК) фотонів.

Цитування: Булахов М., Пелетминський О.С., Слюсаренко Ю.В. Вплив фотонної підсистеми на магнітні властивості квантових газів. *Укр. фіз. журн.* **69**, №8, 603 (2024).

Нагадаємо, що у вакуумі існування БЕК фотонів неможливе, перш за все, внаслідок відсутності у них маси. Однак у середовищі реалізація БЕК фотонів можлива, що вперше було продемонстровано в [8] шляхом експериментів із рідким фарбником у рівновазі з випромінюванням за майже кімнатних температур. В експериментах наявність маси у фотона пов'язувалась із встановленням стоячої хвилі уздовж однієї із декартових координат, за рахунок чого система ставала ефективно двовимірною. Збереження кількості фотонів у системі (що є однією з необхідних умов існування БЕК) забезпечувалось системою дзеркал. У роботах [6, 7] маса фотонів вважалась наслідком взаємодії фотонів із атомами ультрахолодних газів. Ефект набуття маси фотонів за рахунок взаємодії з середовищем (квантовими газами) пізніше був доведений у роботі [9].

Слід, однак, зауважити, що при дослідженні слабковзаємодійних газів у стані рівноваги з випромінюванням, див. [6, 7], поза увагою лишались питання, пов'язані з магнітними властивостями зазначених систем. А саме, найбільшу цікавість викликає питання впливу на намагніченість системи наявність фотонної компоненти, у рівновазі з якою перебувають надхолодні атомарні гази. Таку цікавість викликає в першу чергу та обставина, що фотони не мають магнітного моменту, завдяки чому сама постановка задачі про вплив фотонної компоненти на магнітні властивості системи може видаватися парадоксальною. Дана робота якраз і присвячена проясненню поставлених щойно питань. У рамках простої моделі, засади якої сформульовано в [6, 7] (за певної її модифікації на випадок урахування зовнішнього магнітного поля), ми маємо намір показати, що вплив фотонної компоненти, яка перебуває у рівновазі з атомами квантових газів, на намагніченість системи за певних її параметрів може бути досить суттєвою.

2. Основні рівняння термодинамічної рівноваги фотонів із квантовими газами

Формулювання умов термодинамічної рівноваги випромінювання з квантовими газами наведемо у вигляді, близькому до аналогічних умов [6,7]. А саме, будемо розглядати систему, яка складається з ідеального газу атомів Фермі або Бозе, які перебувають у термодинамічній рівновазі з фотонами за присутності зовнішнього постійного й однорідного магнітного поля $\boldsymbol{H}$. Атоми цього газу можуть бути лише в двох квантових станах: основному і збудженому (дворівневі атоми). Іншими словами, перехід з одного атомного стану до іншого відбувається за рахунок поглинання або випромінювання фотона. Таким чином, збуджений атом можна розглядати як "зв'язаний стан", утворений фотоном та атомом в основному стані. Тут відразу слід наголосити, що поділ атомів назвами "основний стан" і "збуджений стан" є умовними і введений для зручності. Тобто мова може йти як про "справжні" основний та збуджений стани, так і інші стани, пов'язані між собою однофотонним переходом.

Можливість розгляду системи як ідеального газу атомів і фотонів можна "виправдати" саме тим, що ми описуємо систему у стані термодинамічної рівноваги між її компонентами. Тобто, стан термодинамічної рівноваги досягається, зрозуміло, через посередництво всіх можливих у системі взаємодій. Однак будемо вважати, що після встановлення такого стану рівноваги в його описі ефектами взаємодії можна знехтувати. З урахуванням цього зазначимо, що з формальної точки зору систему можна розглядати як таку, що складається із двох сортів атомів, позначених індексами $i = 1, 2$, що перебувають у термодинамічній рівновазі з фотонним газом. Іншими словами, один атомарний компонент складений із атомів в основному стані, а другий компонент утворений атомами у збудженому стані. Припустимо далі, що два сорти атомів характеризуються набором квантових чисел $\alpha_i \equiv i$, спінами $S_i \equiv (S_1, S_2)$ і функцією розподілу атомів $f_{S_{iz}}(\mathbf{p}; \beta, \zeta_i)$ за імпульсами $\mathbf{p}$

$$f_{S_{iz}}(\mathbf{p}; \beta, \zeta_i) = \{\exp\left[\beta\left(\varepsilon_i(\mathbf{p}) - \zeta_i - \mu H S_{iz}\right)\right] \pm 1\}^{-1}, \tag{1}$$

де

$$\varepsilon_i(\mathbf{p}) = \varepsilon_i + \frac{\mathbf{p}^2}{2M}, \quad \varepsilon_i < 0 \tag{2}$$

– енергія рухомого атома з імпульсом в i-му стані з набором квантово-механічних індексів $\alpha_i \equiv i$ за відсутності зовнішнього магнітного поля, $\varepsilon_i \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ – енергія нерухомого атома у відповідному квантово-механічному стані за відсутності магнітного поля, $\beta \equiv \frac{1}{T}$ є величиною, оберненою до температури системи T, вираженої в енергетичних одиницях, H – зовнішнє магнітне поле, направлене уздовж осі z, m – маса атома (вважається, що маса атома у різних станах однакова). Уведено також до розгляду поняття магнітних моментів атомів сорту i, $\mu\mathbf{S}_i \equiv (\mu\mathbf{S}_1, \mu\mathbf{S}_2)$, проекції яких на вісь z (або на напрямок магнітного поля H, див. вище) входять до формули (1). При цьому можна вважати, що коефіцієнт пропорційності μ, який визначає величину магнітного моменту атома, дається виразом $\mu = g\mu_{\mathrm{B}}$, де μ_{B} – магнетон Бора, а g – так званий g-фактор атома, див, наприклад, [10]. Крім того, літерами $\zeta_i \equiv (\zeta_1, \zeta_2)$ в (1) позначено хімічні потенціали атомів, що знаходяться в відповідних станах. Для визначеності будемо також вважати, що набір квантових чисел α_1 (величини з індексом "1") відповідає основному стану атома, а група індексів, об'єднана позначенням α_2 (величини з індексом "2"), відповідає збудженому стану атома (див. також (2)). Зазначимо нарешті, що знак "+" у формулі (1), як видно, відповідає випадку атомів – ферміонів, а знак "−" – бозонів. Слід також звернути увагу на те, що спін атомів в основному й збудженому станах вважається різним, $\mathbf{S}_1 \neq \mathbf{S}_2$. Це є відображенням тієї обставини, що спіном атома є векторна сума спіна його ядра (що у свою чергу є векторною сумою спінів нуклонів та їх орбітальних моментів) та сума всіх орбітальних моментів та спінів електронів його електронної оболонки. Оскільки основний стан атома та його збуджений стан пов'язані поглинанням чи випроміненням фотона, то й спін атома при цьому повинен змінитися. Питання про конкретну (кількісну) зміну спіну атомів при переході від одного стану до іншого є досить непростим і в рамках підходу цієї статті вирішене бути не може.

Звернемось тепер до характеристик фотонного компонента, що перебуває в стані термодинамічної рівноваги з квантовим двокомпонентним газом, характеристики якого описані вище формулами (1), (2). Будемо вважати, що він характеризується функцією розподілу $f^{(\mathrm{ph})}(\mathbf{p};\beta,\zeta_{\mathrm{ph}})$

$$f_{\mathrm{ph}}(\mathbf{k};\beta,\zeta_{\mathrm{ph}}) = \{\exp\left[\beta\left(\hbar\omega(\mathbf{k}) - \zeta_{\mathrm{ph}}\right)\right] - 1\}^{-1}, \qquad (3)$$

де ζ_{ph} – хімічний потенціал фотонів. Сам факт уведення до розгляду хімічного потенціалу фотонів свідчить про те, що передбачається збереження їх сумарного числа в даному стані термодинамічної рівноваги, тобто, сумарного числа вільних фотонів у речовині і тих, що утворили збуджені атоми, більш детальніше див. [5,6]). Величина $\omega(\mathbf{k})$ є законом дисперсії фотонів. Тут слід спеціально наголосити, що оскільки фотони перебувають у речовині, в рівновазі з нею, то їх скоріше слід розглядати як квазічастинки, що мають ефективну масу m_{ph}, яка визначається так званою "частотою відтинання" ω_0,

$$\omega_0 = \omega(\mathbf{k}=0), \quad m_{\mathrm{ph}} = \frac{\hbar\omega_0}{v^2}, \qquad (4)$$

де v – швидкість світла в речовині. Оскільки речовиною є розріджені квантові гази, то швидкість світла в ній будемо вважати близькою до швидкості світла c в вакуумі.

Додамо далі ще деякі зауваження. Ми в даній статті будемо залишати поза увагою питання про можливість набуття спіну (магнітного моменту) фотоном у середовищі. Це питання дуже не просте, вимагає окремих досліджень, залишаючись досі дискутивним (див, наприклад, [11–13]). Тому у формулі (3), як бачимо, відсутні члени, що характеризували би взаємодію фотона (навіть у середовищі) із зовнішнім магнітним полем.

Стосовно явного вигляду закону дисперсії фотонів, то тут можна зробити таке зауваження. У роботах [5,6,8] по суті вважалося, що закон дисперсії фотонів можна було прийняти у вигляді, звичному для релятивістських частинок:

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_0^2 + v^2k^2}. \qquad (5)$$

Як легко бачити, в області малих хвильових векторів цей закон дисперсії набуває спрощеного вигляду:

$$\hbar\omega(\mathbf{k}) \approx \varepsilon_{\mathrm{ph}} + \frac{p^2}{2m_{\mathrm{ph}}}, \quad \varepsilon_{\mathrm{ph}} = \hbar\omega_0, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \qquad (6)$$

де маса фотона m_{ph} визначається формулою (4). Вище вже згадувалося, що ефект набуття маси фотонів за рахунок взаємодії з квантовими газами (а значить, і здобуто явні вигляди можливих законів дисперсії фотонів у цих газах, у тому числі й типу (5), (6)) був обґрунтований у роботі [9].

Формула (6) звертає увагу на особливо важливу роль області малих хвильових векторів у законі дисперсії фотонів у речовині. У роботі [6] використання наближення (6) виправдовувалось тією обставиною, що головною задачею статті була демонстрація можливості бозе-ейнштейнівської конденсації фотонів в ультрахолодних газах, але вказувалось на те, що насправді, як ми побачимо й далі, області великих хвильових векторів не відіграють суттєвої ролі в задачі, що розв'язується, оскільки їх внесок в ефекти та явища в даній області температур експоненціально малі.

Як ми згадували раніше, система знаходиться в стані термодинамічної рівноваги відносно процесу поглинання (випромінювання) фотона. За заданої температури цю умову "хімічної реакції" можна подати у такому вигляді (див. [14]):

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial N_1}\right) + \left(\frac{\partial \Phi_{\mathrm{ph}}}{\partial \tilde{N}_{\mathrm{ph}}}\right) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial N_2}\right), \tag{7}$$

де Φ_1, Φ_2, Φ_{ph} – парціальні потенціали Ґіббза, які відповідають компонентам атомів першого та другого сорту, а також фотонному компоненту; $N_1\,(H,T)$, $N_2\,(H,T)$ – відповідно число частинок в атомарних компонентах першого та другого сорту, $\tilde{N}_{\mathrm{ph}}\,(H,T)$ – число вільних фотонів (не поглинутих атомами). Нагадаємо, що енергію Ґіббза можна знайти за формулою:

$$\Phi = E - TS - \Omega, \tag{8}$$

де $E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) f(\mathbf{p})$ – внутрішня енергія, $\Omega = \mp T \sum_{\mathbf{p}} \ln(1 \pm f(\mathbf{p}))$ – великий термодинамічний потенціал (верхній (нижній) знак відповідає статистиці Бозе–Ейнштейна (Фермі–Дірака)), $S = -\left(\partial \Omega / \partial T\right)_{V,\zeta}$ – ентропія, $f(\mathbf{p})$ – функція розподілу відповідного компонента системи.

Додаючи до умови (7) умови збереження сумарної кількості обох сортів атомів N і загальної кількості фотонів N_{ph} (у тому числі тих, що містяться в збудженому атомі, утворюючи тим самим із цим атомом "зв'язаний стан"), здобуваємо таку систему рівнянь:

$$\begin{gathered} n = n_1(H,T) + n_2(H,T), \\ n_{\mathrm{ph}} = n_2(H,T) + n_{\mathrm{ph}}(H,T), \\ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial N_1}\right) + \left(\frac{\partial \Phi_{\mathrm{ph}}}{\partial \tilde{N}_{\mathrm{ph}}}\right) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial N_2}\right), \end{gathered} \tag{9}$$

де $n = N/V$ – густина загального числа атомів у системі, $n_{\mathrm{ph}} = \tilde{N}_{\mathrm{ph}}/V$ – густина загального числа фотонів у системі, а густини числа атомів першого $n_1(H,T) = N_1\,(H,T)\,/V$ та другого $n_2(H,T) = N_2\,(H,T)\,/V$ сортів, а також густина числа фотонів у вільному (не зв'язаному) стані $n_{\mathrm{ph}}(H,T) = \tilde{N}_{\mathrm{ph}}\,(H,T)\,/V$ у відповідності з (1)–(3) даються формулами:

$$n_1(H,T) = \frac{1}{V} \sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} \sum_{\mathbf{p}} \Big\{ \exp\big[\beta\big(\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon_1 - \zeta_1 - \mu H S_{1z}\big)\big] \pm 1 \Big\}^{-1}, \tag{10}$$

$$n_2(H,T) = \frac{1}{V} \sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} \sum_{\mathbf{p}} \Big\{ \exp\big[\beta\big(\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon_2 - \zeta_2 - \mu H S_{2z}\big)\big] \pm 1 \Big\}^{-1}, \tag{11}$$

$$n_{\mathrm{ph}}(H,T) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \Big\{ \exp\big[\beta\big(\varepsilon_{\mathrm{ph}}(p) + \varepsilon_{\mathrm{ph}} - \zeta_{\mathrm{ph}}\big)\big] - 1 \Big\}^{-1}, \tag{12}$$

в яких величина V є об'ємом системи.

Нагадаємо далі, що головною задачею даної роботи є демонстрація впливу фотонної підсистеми на магнітні властивості квантових газів, що перебувають у рівновазі з випромінюванням. У зв'язку з цим треба ввести до розгляду магнітні характеристики системи. Такими характеристиками є намагніченості атомарних компонентів $M_{1z}(H,T)$ і $M_{2z}(H,T)$. Густина намагніченості компонента не збуджених атомів у відповідності з (1) (див. також (10), (11)) дається таким виразом:

$$m_1(H,T) = \frac{M_1(H,T)}{V} = \frac{\mu}{V} \sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} S_{1z} \times \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \exp\left[\beta\left(\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon_1 - \zeta_1 - \mu H S_{1z}\right)\right] \pm 1 \right\}^{-1}, \tag{13}$$

Аналогічною формулою визначається і густина намагніченості компонента збуджених атомів системи:

$$m_2(H,T) = \frac{M_2(H,T)}{V} = \frac{\mu}{V} \sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} S_{2z} \times \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \exp\left[\beta\left(\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon_2 - \zeta_2 - \mu H S_{2z}\right)\right] \pm 1 \right\}^{-1}, \tag{14}$$

у зв'язку з чим приходимо до такого виразу для густини намагніченості всієї системи:

$$m(H,T) = m_1(H,T) + m_2(H,T). \tag{15}$$

Нагадаємо також, що в цій роботі нехтується можливістю набуття фотоном у речовині магнітного моменту, про що згадувалося вище. Тому вільні (не зв'язані у збудженому стані атомів) фотони прямого внеску до сумарної намагніченості системи не дають, що й відображено у формулах (13)–(15).

Таким чином, формули (1), (9)–(15) у принциповому сенсі містять в собі всю необхідну інформацію для вивчення термодинаміки й магнітних властивостей системи, що складається із квантових газів у збудженому й основному станах і знаходиться в термодинамічній рівновазі з фотонами. Зокрема, використовуючи формули (8), а також (1), (3), (13) і (14), рівняння (7) можна подати в такому вигляді:

$$\zeta_1 - \varepsilon_1 + H\left(\frac{\partial m_1}{\partial n_1}\right) + \zeta_{\rm ph} - \epsilon_{\rm ph} = \\ = \zeta_2 - \varepsilon_2 + H\left(\frac{\partial m_2}{\partial n_2}\right). \quad (16)$$

Отже, тепер ми повинні доповнити перші два рівняння збереження числа частинок у системі щойно здобутим рівнянням (16) і результат з урахуванням (13), (14) розглядати як замкнуту систему рівнянь, що описує стан термодинамічної рівноваги середовища, що вивчається.

Алгоритм дослідження сформульованих рівнянь в принципі зрозумілий. Він полягає в знаходженні спочатку хімічних потенціалів компонентів системи шляхом розв'язання пов'язаних рівнянь (9). Після цього (знову ж таки у принциповому сенсі) можна обчислити густини намагніченості системи (13)–(15). І саме здобутий вираз для сумарної густини намагніченості всієї системи (15) повинен бути проаналізований з точки зору впливу характеристик фотонного компонента на магнітні властивості системи. Нагадаємо, що саме такий вплив викликає цікавість, як було анонсовано вище, оскільки фотон сам по собі (принаймні, у вакуумі, певний аналіз цього питання див. у [11–13]) магнітного моменту не має, завдяки чому, здавалося б, фотонний компонент на магнітні властивості впливати не може.

Аналітичний розв'язок системи рівнянь (9) є складною задачею і можливий в обмеженому числі випадків. Навіть числовий розв'язок задачі у загальному випадку теж є непростою задачею. Тому в подальшому обмежимось аналітичним вивченням розв'язку означеної системи рівнянь у випадку, коли всі три газові компоненти системи є невиродженими.

3. Система невироджених газів атомів у рівновазі з невиродженим газом вільних фотонів

У випадку, коли всі компоненти системи, що вивчається, є невиродженими, вирази (1), (9)–(15) можуть бути значно спрощені завдяки необхідності дотримуватися співвідношень

$$\begin{aligned} &\exp\left(\frac{\varepsilon_1 - \zeta_1 - \mu H S_{1z}}{T}\right) \gg 1, \\ &\exp\left(\frac{\varepsilon_2 - \zeta_2 - \mu H S_{2z}}{T}\right) \gg 1, \\ &\exp\left(\frac{\varepsilon_{\rm ph} - \zeta_{\rm ph}}{T}\right) \gg 1. \end{aligned} \quad (17)$$

З урахуванням співвідношень (17) вирази для функцій розподілу атомів у збудженому та основному станах (1), а також для функції розподілу вільних фотонів (3) в головному наближенні набувають простого вигляду:

$$\begin{aligned} &f_{S_{1z}}(\mathbf{p};\beta,\zeta_1) \approx e^{\frac{\zeta_1 - \varepsilon_1 + \mu H S_{1z}}{T}} e^{-\frac{p^2}{2mT}}, \\ &f_{S_{2z}}(\mathbf{p};\beta,\zeta_2) \approx e^{\frac{\zeta_2 - \varepsilon_2 + \mu H S_{2z}}{T}} e^{-\frac{p^2}{2mT}}, \\ &f_{\rm ph}(\mathbf{p};\beta,\zeta_{\rm ph}) \approx e^{\frac{\zeta_{\rm ph} - \varepsilon_{\rm ph}}{T}} e^{-\frac{p^2}{2m_{\rm ph}T}}, \end{aligned} \quad (18)$$

завдяки чому можуть бути спрощені в такому ж наближенні й вирази (10)–(12) для густин числа частинок у всіх трьох компонентах системи

$$\begin{aligned} &n_1(H,T) \approx e^{\frac{\zeta_1 - \varepsilon_1}{T}} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}}, \\ &n_2(H,T) \approx e^{\frac{\zeta_2 - \varepsilon_2}{T}} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}}, \\ &n_{\rm ph}(H,T) \approx g_{\rm ph} e^{\frac{\zeta_{\rm ph} - \varepsilon_{\rm ph}}{T}} \left(\frac{m_{\rm ph}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (19)$$

де $g_{\rm ph}$ враховує можливу виродженість станів фотона. Уведемо далі до розгляду такі функції:

$$\begin{aligned} &g_1(H,T) \equiv \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}}, \\ &g_2(H,T) \equiv \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}}, \\ &g_{\rm ph}(T) \equiv g_{\rm ph} \left(\frac{m_{\rm ph}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (20)$$

з урахуванням яких вирази (19) для густин частинок у всіх трьох компонентах системи можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &n_1(H,T) = e^{\frac{\zeta_1-\epsilon_1}{T}} g_1(H,T), \\ &n_2(H,T) = e^{\frac{\zeta_2-\epsilon_2}{T}} g_2(H,T), \\ &n_{\text{ph}}(H,T) = e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}} g_{\text{ph}}(T). \end{aligned} \tag{21}$$

Зазначимо, що залежність величини $n_{\text{ph}}(H,T)$ від магнітного поля H у виразі (21) не є очевидною. Поки можна вважати, що таке позначення вводиться тільки для симетричності з виразами для густин атомарних частинок. Виправданість такого позначення стане зрозумілою тільки після знаходження величин $e^{\frac{\zeta_1-\epsilon_1}{T}}, e^{\frac{\zeta_2-\epsilon_2}{T}}, e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}}$, які, як побачимо, будуть містити залежність від магнітного поля H. Здобути ж вирази для цих величин можна шляхом розв'язання системи рівнянь (9), яка, з урахуванням формул (17)–(21), набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} &n = e^{\frac{\zeta_1-\epsilon_1}{T}} g_1(H,T) + e^{\frac{\zeta_2-\epsilon_2}{T}} g_2(H,T), \\ &n_{\text{ph}} = e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}} g_{\text{ph}}(T) + e^{\frac{\zeta_2-\epsilon_2}{T}} g_2(H,T), \\ &e^{\frac{\zeta_1-\epsilon_1}{T}} e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}} = e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}} \psi(H,T), \end{aligned} \tag{22}$$

де третє рівняння є переписаним в іншому вигляді рівнянням (16) з уведенням для зручності обчислень функції $\psi(H,T)$:

$$\psi(H,T) = \exp\left\{\left(\frac{\partial m_2}{\partial n_2} - \frac{\partial m_1}{\partial n_1}\right)\frac{H}{T}\right\}, \tag{23}$$

яку ми поки що будемо вважати відомою і яка згодом буде нами визначена.

Таким чином, (22) є системою алгебраїчних рівнянь для знаходження величин $e^{\frac{\zeta_1-\epsilon_1}{T}}$, $e^{\frac{\zeta_2-\epsilon_2}{T}}$, $e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}}$, розв'язок якої принципових труднощів не викликає, але остаточний результат має дещо громіздкий вигляд:

$$\begin{aligned} &e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}} = \frac{1}{2g_{\text{ph}}(T)}\Big\{-\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right) + \\ &+\sqrt{\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right)^2 + 4n_{\text{ph}}\kappa(H,T)}\Big\}, \\ &e^{\frac{\zeta_1-\epsilon_1}{T}} = \frac{1}{2g_1(H,T)}\Big\{-\left(\kappa(H,T)+n_{\text{ph}}-n\right) + \\ &+\sqrt{\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right)^2 + 4n_{\text{ph}}\kappa(H,T)}\Big\}, \\ &e^{\frac{\zeta_2-\epsilon_2}{T}} = \frac{1}{2g_2(H,T)}\Big\{\left(\kappa(H,T)+n+n_{\text{ph}}\right) - \\ &-\sqrt{\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right)^2 + 4n_{\text{ph}}\kappa(H,T)}\Big\}, \end{aligned} \tag{24}$$

що містить таку введену до розгляду функцію:

$$\begin{aligned} &\kappa(H,T) \equiv \frac{g_1(H,T)g_{\text{ph}}(T)}{g_2(H,T)}\psi(H,T) = \kappa_0(T) \times \\ &\times \sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}} \left(\sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}}\right)^{-1} \psi(H,T), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\kappa_0(T) \equiv g_{\text{ph}}\left(\frac{m_{\text{ph}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2},$$

залежну від температури й магнітного поля. Нагадаємо, що функцію $\psi(H,T)$ ще потрібно визначити.

Здобуті формули (24)–(25) для величин $e^{\frac{\zeta_1-\epsilon_1}{T}}$, $e^{\frac{\zeta_2-\epsilon_2}{T}}$, $e^{\frac{\zeta_{\text{ph}}-\epsilon_{\text{ph}}}{T}}$ дозволяють виписати вирази для густин числа частинок усіх компонентів системи в термінах її параметрів, що вважаються, як і раніше, вже відомими:

$$\begin{aligned} &n_{\text{ph}}(H,T) = \frac{1}{2}\Big\{-\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right) + \\ &+\sqrt{\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right)^2 + 4n_{\text{ph}}\kappa(H,T)}\Big\}, \\ &n_1(H,T) = \frac{1}{2}\Big\{-\left(\kappa(H,T)+n_{\text{ph}}-n\right) + \\ &+\sqrt{\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right)^2 + 4n_{\text{ph}}\kappa(H,T)}\Big\}, \\ &n_2(H,T) = \frac{1}{2}\Big\{\left(\kappa(H,T)+n_{\text{ph}}+n\right) - \\ &-\sqrt{\left(\kappa(H,T)+n-n_{\text{ph}}\right)^2 + 4n_{\text{ph}}\kappa(H,T)}\Big\}, \end{aligned} \tag{26}$$

що, у свою чергу, дає змогу представити формули для функцій розподілу частинок усіх трьох компонентів у досить простому вигляді:

$$\begin{aligned} &f_{S_{1z}}(\mathbf{p};\beta,\zeta_1) = e^{-\frac{p^2}{2mT}+\frac{\mu H S_{1z}}{T}}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{3/2} \times \\ &\times\left(\sum_{S'_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S'_{1z}}{T}}\right)^{-1} n_1(H,T), \end{aligned} \tag{27}$$

$$f_{S_{2z}}(\mathbf{p};\beta,\zeta_2) = e^{-\frac{p^2}{2mT}+\frac{\mu H S_{2z}}{T}}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{3/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{S'_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S'_{2z}}{T}}\right)^{-1} n_2(H,T), \tag{28}$$

$$f_{\text{ph}}(\mathbf{p};\beta,\zeta_{\text{ph}}) =$$

$$\frac{1}{g_{\text{ph}}}\, e^{-\frac{p^2}{2m_{\text{ph}}T}}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_{\text{ph}}T}\right)^{3/2} n_{\text{ph}}(H,T). \tag{29}$$

Беручи до уваги (13)–(15), (27)–(29), можна прийти до таких виразів, що визначають намагніченість системи:

$$m_1(H,T) = \mu\frac{\left(\sum\limits_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} S_{1z}e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}}\right)}{\left(\sum\limits_{S'_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S'_{1z}}{T}}\right)} n_1(H,T), \tag{30}$$

$$m_2(H,T) = \mu\frac{\left(\sum\limits_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} S_{2z}e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}}\right)}{\left(\sum\limits_{S'_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S'_{2z}}{T}}\right)} n_2(H,T). \tag{31}$$

Звернімо тепер увагу на те, що суми за проекціями спінів, які входять до виразів (25), (30)–(31), можуть бути обчислені за правилами обчислення суми геометричної прогресії, наприклад

$$\sum_{S'_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S'_{1z}}{T}} = \frac{e^{-\frac{\mu H S_1}{T}}\left(e^{\frac{\mu H(2S_1+1)}{T}}-1\right)}{e^{\frac{\mu H}{T}}-1} =$$

$$= \frac{\sinh\frac{\mu H}{T}(S_1+\frac{1}{2})}{\sinh\frac{\mu H}{2T}}. \tag{32}$$

Тоді відношення сум, що входить до визначення величини κ, див. (25), можна зобразити таким чином:

$$\sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}}\left(\sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sinh\frac{\mu H}{T}(S_1+\frac{1}{2})}{\sinh\frac{\mu H}{T}(S_2+\frac{1}{2})}, \tag{33}$$

у той час як для відношень сум у (30), (31) приходимо до таких виразів:

$$\sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} S_{1z}e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}}\left(\sum_{S'_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S'_{1z}}{T}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(S_1+\frac{1}{2}\right)\coth\frac{\mu H}{T}\left(S_1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\coth\frac{\mu H}{2T}, \tag{34}$$

$$\sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} S_{2z}e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}}\left(\sum_{S'_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S'_{2z}}{T}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(S_2+\frac{1}{2}\right)\coth\frac{\mu H}{T}\left(S_2+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\coth\frac{\mu H}{2T}. \tag{35}$$

Тепер можемо повернутися до визначення функції $\psi\,(H,T)$. У відповідності з (23) з урахуванням (30), (31), (34), (35), приходимо до такого виразу для цієї функції:

$$\psi\,(H,T) =$$

$$= e^{\left\{\left(S_2+\frac{1}{2}\right)\coth\frac{\mu H}{T}\left(S_2+\frac{1}{2}\right)-\left(S_1+\frac{1}{2}\right)\coth\frac{\mu H}{T}\left(S_1+\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\mu H}{T}}. \tag{36}$$

Зі здобуттям виразу (36) величина $\kappa(H,T)$ (див. (25)) також стає повністю визначеною:

$$\kappa(H,T) = \kappa_0(T)\frac{\sinh\frac{\mu H}{T}\left(S_1+\frac{1}{2}\right)}{\sinh\frac{\mu H}{T}\left(S_2+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\, e^{\left\{\left(S_2+\frac{1}{2}\right)\coth\frac{\mu H}{T}\left(S_2+\frac{1}{2}\right)-\left(S_1+\frac{1}{2}\right)\coth\frac{\mu H}{T}\left(S_1+\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\mu H}{T}}. \tag{37}$$

Отже, у виразах (24), (26)–(31) величина $\kappa(H,T)$ тепер повинна братися у формі (37).

З метою скоріше якісного, аніж кількісного аналізу здобутих результатів, розглянемо далі випадок малих $\frac{\mu H}{T}\ll 1$ і великих $\frac{\mu H}{T}\gg 1$ магнітних полів. Як легко впевнитись, у випадку малих магнітних полів формула (33) набуває вигляду

$$\sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}}\left(\sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}}\right)^{-1} \approx$$

$$\approx \frac{2S_1+1}{2S_2+1}\left(1+\frac{1}{6}(S_1-S_2)(S_1+S_2+1)\left(\frac{\mu H}{T}\right)^2\right), \tag{38}$$

тоді як у випадку великих магнітних полів у зазначеному вище сенсі та сама формула демонструє експоненціальну поведінку залежності від поля:

$$\sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}} \left(\sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}} \right)^{-1} \approx e^{(S_1-S_2)\frac{\mu H}{T}}. \tag{39}$$

Залежність же від магнітного поля густини намагніченості системи визначається, як видно з (30), (31), ще й величинами (34), (35), які входять і до визначення $\kappa(H,T)$. Ці величини у запропонованих до розгляду двох граничних наближеннях будуть надаватися виразами:

$$\sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} S_{1z} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}} \left(\sum_{S'_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S'_{1z}}{T}} \right)^{-1} \approx$$
$$\approx \frac{1}{3} S_1 \left(S_1+1\right) \frac{\mu H}{T}, \tag{40}$$
$$\sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} S_{2z} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}} \left(\sum_{S'_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S'_{2z}}{T}} \right)^{-1} \approx$$
$$\approx \frac{1}{3} S_2 \left(S_2+1\right) \frac{\mu H}{T}, \tag{41}$$

якщо $\frac{\mu H}{T} \ll 1$ і

$$\sum_{S_{1z}=-S_1}^{S_1} S_{1z} e^{\frac{\mu H S_{1z}}{T}} \left(\sum_{S'_{1z}=-S_1}^{S_1} e^{\frac{\mu H S'_{1z}}{T}} \right)^{-1} \approx S_1, \tag{42}$$
$$\sum_{S_{2z}=-S_2}^{S_2} S_{2z} e^{\frac{\mu H S_{2z}}{T}} \left(\sum_{S'_{2z}=-S_2}^{S_2} e^{\frac{\mu H S'_{2z}}{T}} \right)^{-1} \approx S_2, \tag{43}$$

коли $\frac{\mu H}{T} \gg 1$.

Таким чином, з урахуванням формул (38), (39)–(43) вираз (37) для характеристики системи $\kappa(H,T)$ набуває вигляду

$$\kappa(H,T) \approx \kappa_0(T) \frac{2S_1+1}{2S_2+1} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{1}{6}\left(S_2-S_1\right)\left(S_1+S_2+1\right)\left(\frac{\mu H}{T}\right)^2\right) \tag{44}$$

при малих магнітних полях $\frac{\mu H}{T} \ll 1$ і надається простим виразом

$$\kappa(H,T) \approx \kappa_0\left(T\right) \tag{45}$$

за великих магнітних полів $\frac{\mu H}{T} \gg 1$. Як бачимо з (44), $\kappa(H,T)$ в області малих магнітних полів квадратично зростає зі зростанням поля при $S_2 > S_1$. Слід при цьому також звернути увагу на те, що у випадку великих магнітних полів, як витікає із (45), величина $\kappa(H,T)$ зі зростанням магнітного поля у головному наближенні взагалі перестає відчувати вплив магнітного поля. Залежність її від інтенсивності поля проявляється в наступних доданках типу $\exp\left(-\frac{\mu H}{T}\right)$, що є експоненціально згасаючими за великим параметром. І, як бачимо із порівняння формул (44) і (45), на всьому інтервалі зміни магнітного поля від $\frac{\mu H}{T} \ll 1$ до $\frac{\mu H}{T} \gg 1$ значення $\kappa(H,T)$ при $S_2 > S_1$ зростає від $\kappa(H,T) \approx \kappa_0(T)\frac{2S_1+1}{2S_2+1}$ до $\kappa(H,T) \approx \kappa_0(T)$. Нагадаємо, що ця величина характеризує залежність густин числа частинок всіх трьох компонентів від магнітного поля у розглянутих двох граничних випадках. Таким чином, як бачимо, зміною магнітного поля можна впливати як на число вільних фотонів у системі $n_{\mathrm{ph}}(H,T)$, так і на ступінь інверсної заселеності атомарних рівнів, що характеризується густиною $n_2(H,T)$.

Проаналізуємо тепер формули (26), (30), (31), (15) з урахуванням (26) із точки зору впливу на намагніченість системи фотонного її компонента. Знову ж таки, оскільки задача є складною як із міркувань багатопараметричності, так і складності трансендентних рівнянь, що її описують, прослідкуємо за означеним впливом фотонів на намагніченість у рамках деякої теорії збурень. А саме, розглянемо випадки малої густини фотонного компонента у системі, $n_{\mathrm{ph}} \ll n$, і випадок $n_{\mathrm{ph}} \sim n$. Зазначимо відразу, що випадок $n_{\mathrm{ph}} \gg n$ у рамках моделі даної статті коректно розглянутий бути не може, оскільки протирічить наближенню дворівневого атома.

У наближенні малої густини сумарного числа фотонів вирази (26)) набувають більш простого вигляду:

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{ph}}(H,T) &\approx \frac{n_{\mathrm{ph}}\kappa(H,T)}{\kappa(H,T)+n}, \\ n_1(H,T) &\approx n - \frac{n_{\mathrm{ph}} n}{\kappa(H,T)+n}, \\ n_2(H,T) &\approx \frac{n_{\mathrm{ph}} n}{\kappa(H,T)+n}, \end{aligned} \tag{46}$$

що дозволяє нам із використанням (44), (40), (41) відразу виписати формулу густини магнітного моменту системи у випадку малого зовнішнього магнітного поля (див. (30), (31)):

$$m(H,T) = \frac{\mu^2 H}{3T}\left([S_2\,(S_2+1) - S_1\,(S_1+1)] \times \right.$$
$$\left. \times\, \frac{n_{\text{ph}} n}{\kappa_0(T)\frac{2S_1+1}{2S_2+1} + n} + S_1\,(S_1+1)\,n\right), \qquad (47)$$

де величина $\kappa_0(T)$ визначається формулою (25).

Як легко бачити з (31), у даному наближенні (малого магнітного поля, $\frac{\mu H}{T} \ll 1$, і малої густини фотонного компонента) при $S_1 < S_2$ намагніченість системи зростає не тільки зі зростанням величини зовнішнього поля, а й зі зростанням густини числа фотонів у системі. Тобто, за малого магнітного поля, що впливає на систему, "закачування" до системи із-зовні додаткових фотонів сприяє збільшенню її магнітного моменту навіть якщо саме поле не зростає.

У випадку великих магнітних полів, $\frac{\mu H}{T} \gg 1$ і малої густини фотонного компонента $n_{\text{ph}} \ll n$, вважаючи, як і вище $S_1 < S_2$, можна прийти до такого виразу для густини магнітного моменту всієї системи:

$$m(H,T) \approx \mu n S_1 + \mu\,(S_2 - S_1)\,\frac{n_{\text{ph}} n}{\kappa_0(T) + n}, \qquad (48)$$

де величина $\kappa_0(T)$, як і попередньо, визначається формулою (25). Знову ж таки бачимо, що за незмінності магнітного поля (але великого за напругою) збільшення густини загального числа фотонів викликає зростання намагніченості системи. Наголосимо, що мова тут іде, як у випадку (47), так і (48), лише про тенденцію такого зростання намагніченості саме тому, що є необхідність триматися в рамках наближення $n_{\text{ph}} \ll n$.

Розглянемо, нарешті, випадок $n_{\text{ph}} \sim n$. Нагадаємо, що розглядати випадок $n_{\text{ph}} \gg n$ у рамках застосованої нами моделі не коректно, оскільки тим самим порушується припущення про дворівневий атом. Отже, за справедливості співвідношення $n_{\text{ph}} \sim n$ вирази (26) для густин частинок у компонентах можна навести у вигляді:

$$n_{\text{ph}}(H,T) \approx \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\kappa^2(H,T) + 4n\kappa(H,T)} - \kappa(H,T) - \right.$$
$$\left. - \left(1 + \frac{\kappa(H,T)}{\sqrt{\kappa^2(H,T) + 4n\kappa(H,T)}}\right)\delta n\right\},$$

$$n_1(H,T) \approx \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\kappa^2(H,T) + 4n\kappa(H,T)} - \kappa(H,T) + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{\kappa(H,T)}{\sqrt{\kappa^2(H,T) + 4n\kappa(H,T)}}\right)\delta n\right\},$$

$$n_2(H,T) \approx$$
$$\approx n - \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\kappa^2(H,T) + 4n\kappa(H,T)} - \kappa(H,T) - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{\kappa(H,T)}{\sqrt{\kappa^2(H,T) + 4n\kappa(H,T)}}\right)\delta n\right\}, \qquad (49)$$

де $\delta n \equiv n - n_{\text{ph}}$ і величина $\kappa(H,T)$ визначається формулою (37).

Наведемо далі формули для намагніченості системи, виходячи з (49) у головному наближенні $\delta n = 0$ у випадках великих та малих магнітних полів, як розглядалося і вище. Для малих магнітних полів, $\frac{\mu H}{T} \ll 1$, маємо такий вираз для намагніченості середовища:

$$m(H,T) \approx \frac{\mu^2 H}{3T}\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\kappa^2(T) + 4n\kappa(T)} - \kappa(T)\right) \times \right.$$
$$\left. \times\ [S_2\,(S_2+1) - S_1\,(S_1+1)] + S_2(S_2+1)n\right), \qquad (50)$$

де $\kappa(T)$ дається виразом (44) у головному наближенні за $\frac{\mu H}{T} \ll 1$. У такому ж граничному наближенні, $n_{\text{ph}} = n$, випишемо й формулу для намагніченості системи і в протилежному до (50) випадку, тобто, при $\frac{\mu H}{T} \gg 1$:

$$m(H,T) \approx \mu S_2 n - \frac{1}{2}\mu\,(S_2 - S_1) \times$$
$$\times \left(\sqrt{\kappa_0^2(T) + 4n\kappa_0(T)} - \kappa_0(T)\right), \qquad (51)$$

де $\kappa_0(T)$ дається виразом (45) у головному наближенні за $\frac{\mu H}{T} \gg 1$.

Із порівняльного аналізу виразів (46) із (49), і (47), (48) із виразами (50), (51) можна зрозуміти, що тенденція зростання густини компонента з інверсною заселеністю енергетичних рівнів, а також збільшення густини намагніченості системи з ростом густини сумарного числа фотонів у системі n_{ph}, зберігається на всьому інтервалі $0 < n_{\text{ph}} \le n$ дозволеної моделлю зміни цього числа (див. вище).

Наведений аналіз демонструє можливість регулювання інверсної заселеності і зміни намагніченості середовища закачуванням до нього фотонів іззовні, тобто, збільшенням величини $n_{\rm ph}$. Але варто також зауважити, що поведінка інверсної заселеності й густини магнітного моменту речовини може значною мірою визначатися величиною $\kappa(H,T)$, тобто, варіацією зовнішнього магнітного поля. У зв'язку з цим слід зауважити, що величина $\kappa(H,T)$, визначена виразом (25), у формулах (24), (26), (46), (49)–(51), містить також температуру та характеристики енергетичного спектра фотонів (частота відтинання чи маса фотона, див. (5), (6). Тобто, варіації значень величини $\kappa(H,T)$ можна досягти, варіюючи і магнітне поле, і температуру (не порушуючи границь високотемпературного наближення, див. (19)).

4. Висновки

Таким чином, можна вважати доведеним можливість впливу фотонного компонента на магнітні властивості системи із квантових газів, що перебувають у термодинамічній рівновазі з випромінюванням (фотонами) за впливу на систему зовнішнього магнітного поля. Такий висновок не є a priory тривіальним з огляду на ту обставину, що фотони у вакуумі не мають магнітного моменту. Твердження про суттєвий вплив фотонної підсистеми на намагніченість середовища витікає із аналізу розв'язків загальних рівнянь, що описують стан термодинамічної рівноваги в системі, далеко від температури виродження всіх трьох її компонентів. Проілюстровано можливість керування інверсною заселеністю рівнів атомарних компонентів, а також магнітними властивостями середовища за допомогою додаткового накачування фотонів до системи та зміни інтенсивності зовнішнього магнітного поля й температури.

Робота виконана за підтримки Національної академії наук України (№ 0121U108722), Міністерства освіти і науки України (№ 0122U001575) та Українського науково-технологічного центру (№ 9918).

1. A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **1**, 3 (1925).
2. S.N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
3. E. Fermi. Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico. *Rend. Lincei* **3**, 145 (1926).
4. P.A.M. Dirac. On the theory of quantum mechanics. *Proc. R. Soc. Lond. A* **112** (762), 661 (1926).
5. A.S. Peletmiskii, Yu.V. Slyusarenko, A.G. Sotnikov. *Theory of Exotic States in Quantum Fermi and Bose Systems* (Naukova dumka, 2023).
6. A. Kruchkov, Y. Slyusarenko. Bose–Einstein condensation of photons in an ideal atomic gas. *Phys. Rev. A* **88**, 013615 (2013).
7. N. Boichenko, Y. Slyusarenko. Coexistence of photonic and atomic Bose–Einstein condensates in ideal atomic gases. *Condens. Matter Phys.* **18**, 43002 (2015).
8. J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, M. Weitz. Bose–Einstein condensation of photons in an optical microcavity. *Nature* **468**, 545 (2010).
9. Y.V. Slyusarenko, O.Y. Sliusarenko. Kinetic theory of weakly ionized dilute gas of hydrogen-like atoms of the first principles of quantum statistics and dispersion laws of eigenwaves. *J. Math. Phys.* **58**, 1133021 (2017).
10. Y. Kawaguchi, M. Ueda. Spinor Bose–Einstein condensates. *Phys. Rept.* **520**, 253 (2012).
11. B. Altschul. Astrophysical bounds on the photon charge and magnetic moment. *Astroparticle Physics* **29**, 290 (2008).
12. H. Pérez Rojas and E. Rodríguez Querts. The photon magnetic moment problem revisited. *Eur. Phys. J. C* **74**, 2899 (2014).
13. Z. Saglam, G. Sahin. Magnetic Moment of Photon. *J. Mod. Phys.* **6**, 937 (2015).
14. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics. Part 1* (Pergamon Press, 1980).

Одержано 16.08.24

M. Bulakhov, A.S. Peletminskii, Yu.V. Slyusarenko

INFLUENCE OF PHOTON SUBSYSTEM ON THE MAGNETIC PROPERTIES OF QUANTUM GASES

The possibility for the photon component to affect the magnetic properties of a system of quantum gases of two-level atoms staying in thermodynamic equilibrium with radiation (photons) has been studied. A corresponding simple model has been proposed, which enabled the general equations describing the thermodynamic equilibrium in this system to be derived. The resulting equations are solved in the temperature interval far from the degeneracy temperatures of all three system components. The analysis of the solutions testified to a non-trivial behavior of the system's magnetic state as a response to changes in the photon density and the intensity of the external magnetic field. It is shown that the growth of the photon density induced in the system by external sources can increase both system's magnetization and the density of excited atoms. Such a conclusion is not trivial *a priori* given the fact that photons in the vacuum have no magnetic moment.

Keywords: quantum gases, two-level atoms, photons, external magnetic field, thermodynamic equilibrium, non-degenerate state, inverse population, magnetic properties of the medium.