Б.І. ЛЕВ, А.Г. ЗАГОРОДНІЙ

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна 14-б, Київ 03143)

УДК 539

ФЛУКТУАЦІЇ ТА СТЕПЕНЕВІ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ В НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМАХ

Сформульовано рівняння Фоккера–Планка для функцій розподілу макроскопічних відкритих систем у просторі повільно змінних фізичних величин (енергії, адіабатичних інваріантів тощо). Стаціонарний розв'язок отриманих рівнянь визначає квазірівноважну функцію розподілу у такому просторі. Запропонований підхід враховує еволюцію систем під дією дисипації та дифузії у просторі відповідних змінних. Показано, що відомий степеневий закон розподілу можна отримати, якщо врахувати внутрішні та зовнішні флуктуації в статистичних системах. Наведено приклад рівнянь Ланжевена, які генерують степеневі функції розподілу.

Ключові слова: рівняння Фоккера–Планка, степенева функція розподілу, флуктуації в статистичних системах, рівняння Ланжевена.

1. Вступ

Згідно з основними положеннями термодинаміки, макроскопічна система, яка контактує з навколишнім середовищем, досягає стану рівноваги протягом часу релаксації. Час релаксації визначається фізичною природою системи, що розглядається, і властивостями зовнішнього середовища (див., наприклад, [1–3]). Встановлення рівноваги в системі, що взаємодіє з термостатом, призводить як до встановлення значень термодинамічних параметрів, що дорівнюють значенням відповідних параметрів теплової ванни, так і до відсутності течій у рівноважній системі. У випадку нерівноважних відкритих систем потоки присутні, але стаціонарні стани також можуть існувати. Такі стани можна інтерпретувати як "квазірівноважні" в тому сенсі, що вони не змінюються з часом, але термодинамічні параметри системи та середовища відрізняються між собою. Нерівноважні стаціонарні стани спостерігаються в системі гарячих електронів у напівпровідниках [4], у системі фотонів з неоднорідним розсіюванням, де коефіцієнт дифракції залежить від частоти фотонів [5, 6], у системі високоенергетичних частинок, що утворюються при зіткненнях важких іонів на прискорювачах, і у системах заряджених порошинок у плазмі [7–9]. Функції розподілу таких систем зазвичай відрізняються від відомих рівноважних розподілів.

Прикладом такого стаціонарного розподілу може бути, зокрема, розподіл з "повільно спадаючим хвостом" (heavy-tailed distribution) при великих значеннях змінної (степеневий закон розподілу), що є надзвичайно важливим як з теоретичної, так і з практичної точки зору [10]. У фізиці, біології та суспільних науках знайдено багато степеневих розподілів. Головною особливістю цього розподілу є його якісна та кількісна відмінність від нормального (гаусового) розподілу.

У фізиці всі функції розподілу залежать від енергії, яка визначає гіперповерхню у фазовому просторі і повністю визначає всі ймовірні стани си-

Цитування: Лев Б.І., Загородній А.Г. Флуктуації та степеневі функції розподілу в нерівноважних системах. *Укр. фіз. журн.* **69**, № 8, 521 (2024).

стеми. Функція розподілу в рівноважному випадку залежить тільки від енергії системи, і можна вважати, що нерівноважну функцію розподілу також можна описати в термінах енергії макроскопічної системи. Для фізичних систем енергія є найповільнішою змінною або керівним параметром. В економічних системах таким параметром може бути кількість грошей, що беруть участь у фінансових операціях. Для лінгвістики це набір слів, які вживаються в тій чи іншій мові. Тому в подальшому ми розглянемо зміни найповільнішого керівного параметра системи.

Будь-яка система зазвичай перебуває в нерівноважному стані *a priori*, однак ми можемо припустити, що в деяких випадках стан деякої підсистеми великої системи описується локальним розподілом Гауса. Цей розподіл еволюціонує, щоб забезпечити найменшу енергію та найбільшу ентропію цієї підсистеми. З іншого боку, у загальному випадку, еволюцію нерівноважної системи можна описати на основі рівняння Фоккера–Планка, де коефіцієнти дифузії та дисипації пов'язані з відповідними рівняннями Ланжевена [11–18]. Перевагою рівняння Фоккера–Планка є те, що воно враховує як релаксацію функції розподілу за рахунок дисипації, так і випадковий вплив флуктуацій різної природи (це можуть бути як внутрішні флуктуації, так і флуктуації параметрів навколишнього середовища). Таким чином, за допомогою рівняння Фоккера–Планка можна знайти ймовірні стаціонарні розподіли, породжені, зокрема, мультиплікативними шумами, які виникають в результаті нелінійної взаємодії внутрішніх і зовнішніх флуктуацій. Крім того, стаціонарні розв'язки рівнянь Фоккера–Планка за певних умов вказують на ймовірне існування фазового переходу в стан, який можна пов'язати зі стаціонарним станом системи. Ми припускаємо, що мультиплікативні флуктуації можуть призвести до степеневого стаціонарного розподілу, якщо ми правильно їх врахуємо.

Метою даної роботи є обґрунтування виникнення степеневого розподілу в просторі різних керівних параметрів та знаходження умов формування такого розподілу. Отримано розв'язок рівняння Фоккера–Планка для функції розподілу макроскопічної системи, що описує ймовірні квазістаціонарні стани системи. Запропонований підхід описує еволюцію системи між різними станами з урахуванням дисипації та впливу зовнішнього середовища. Для економічних систем та систем іншої природи, де повільною змінною може бути інша величина (наприклад, гроші) [10], було показано, що цей підхід може дати відомий степеневий закон розподілу.

Стаття організована наступним чином. Загальний підхід до виведення рівняння Фоккера–Планка з головного рівняння представлений у розділі 2. У розділі 3 ми формулюємо конкретне рівняння Ланжевена, яке призводить до степеневого закону функції розподілу. Застосування рівняння Фоккера–Планка в енергетичному представленні проаналізовано в розділі 4. Отримані результати сформульовано у висновках (розділ 5). Ілюстрація опису відомих результатів (броунівський рух) наведена в Додатку А.

2. Основне кінетичне рівняння

Як відомо, макроскопічний стан статистичної системи можна описати за допомогою функцій розподілу, які визначають усі макроскопічні властивості системи, що розглядається [2, 11]. Такі функції розподілу (на відміну від мікроскопічних розподілів) залежать лише від кількох макроскопічних параметрів. Щоб описати еволюцію в термінах функцій розподілу, ці параметри, як керівні параметри нерівноважних систем, повинні бути величинами, що "повільно змінюються". За відсутності будь-яких інших знань про нерівноважні системи немає підстав віддавати перевагу будь-якому визначеному стану системи. Власне, поточний стан системи визначається керівними параметрами. Нерівноважна функція розподілу $\rho(\varepsilon, t)$ включає залежність від керівного параметра системи ε і часу t. Функцію розподілу, у загальному випадку, можна отримати з головного кінетичного рівняння, яке описує еволюцію системи протягом тривалого періоду часу та враховує швидкі випадкові процеси в ній. З точки зору довільного керівного параметра, основне кінетичне рівняння для нерівноважної функції розподілу можна записати таким чином [11]:

$$\frac{\partial \rho(\varepsilon,t)}{\partial t} = \int \Big\{ W(\varepsilon,\varepsilon')\rho(\varepsilon',t) - W(\varepsilon',\varepsilon)\rho(\varepsilon,t) \Big\} d\varepsilon', \tag{1}$$

де $W(\varepsilon|\varepsilon')$ – ймовірність переходу між різними значеннями керівного параметра системи в одиницю часу. Це базове кінетичне рівняння є рівнянням балансу для ймовірностей станів. Усі розв'язки основного кінетичного рівняння при $t \to \infty$ мають загальну фундаментальну властивість: вони релаксують до відповідних стаціонарних розв'язків, які можна інтерпретувати як "квазірівноважні" стани для цих систем. Загалом така еволюція задовольняє закон зростання ентропії в загальному розумінні [18]. Однак основне кінетичне рівняння є нелінійним, а самі ймовірності переходу залежать від функції розподілу. Перехід до лінійного рівняння можливий лише для броунівського руху, коли відсутня взаємодія між окремими броунівськими системами. Форма рівняння Фоккера–Планка для броунівської системи залежить від шляху розкладання ймовірностей переходу при зміні $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon'$.

Незалежно від процесу, що призводить до змін функції розподілу за керівним параметром, рівняння Фоккера–Планка можна записати в такій загальній формі [11–18]:

$$\frac{\partial \rho(\varepsilon, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big(A(\varepsilon)\rho(\varepsilon, t)\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\Big(D(\varepsilon)\rho(\varepsilon, t)\Big). \quad (2)$$

Тут коефіцієнти $A(\varepsilon)$ і $D(\varepsilon)$ залежать від керівних параметрів, і їх фізичний зміст визначається природою процесів, що розглядаються. Явний вигляд коефіцієнтів Фоккера–Планка не має особливого значення, оскільки в різних презентаціях існує прямий зв'язок між ними [11–18]. Щоб вибрати одну з них, необхідно залучити фізичні аргументи. Зокрема, рівняння Фоккера–Планка можна отримати з ланцюжка рівнянь Боголюбова в наближенні слабкої взаємодії (малий множник при потенціалі взаємодії) або наближенні малості мас молекули рідини чи газу по відношенню до маси частинки домішки [19].

Зміст коефіцієнтів можна прояснити за допомогою динамічного рівняння для керівного параметра. У загальному випадку [14, 18] можна припустити, що стохастичне рівняння дисипації можна записати у вигляді

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = f(\varepsilon) + \sqrt{D(\varepsilon)}L(t). \quad (3)$$

Розв'язок цього стохастичного рівняння дисипації залежить від зовнішніх впливів і початкових умов. Зовнішній вплив проявляється у зміні керівного параметра системи під випадковим впливом навколишнього середовища, що діє разом із дисипацією. Розсіювання описується першим доданком $f(\varepsilon)$ у наведеному вище рівнянні. Цей доданок може бути отриманий з динамічного рівняння для макроскопічної системи з відомою взаємодією системи з навколишнім середовищем.

Випадковий вплив середовища враховується другим доданком у рівнянні. Зазвичай передбачається, що джерела флуктуацій не корельовані, а кореляція між двома значеннями флуктуацій у два різні моменти часу, $\langle L(t)L(t')\rangle = \phi(t - t')$, може відрізнятись від нуля лише протягом інтервалу часу, що дорівнює часу взаємодії. Кутові дужки $\langle ... \rangle$ означають статистичне усереднення відповідної величини. Функція $\phi(t - t')$ повинна мати різкий пік в околі нуля та задовольняти умову $\int \phi(\tau)d\tau = \sigma^2$ для білого шуму [18]. Однак властивості середовища також можуть змінюватися випадковим чином. У результаті система, яка не може досягти рівноваги після швидких змін середовища, повинна релаксувати до нового стану. Цей процес свідчить про деградацію системи при її контакті з навколишнім середовищем. Оскільки загальне стохастичне рівняння має такий самий вигляд, як і для звичайної броунівської частинки, то надалі такі системи будемо називати броунівськими.

Нелінійне рівняння Ланжевена повинно мати еквівалентне рівняння для функції розподілу ймовірностей, яке можна записати з урахуванням конкретних властивостей статистичної системи. Сьогодні ми знаємо два різних підходи до розгляду випадкових процесів. Якщо коефіцієнт дифузії $D(\varepsilon)$ залежить від керівного параметра в початковій точці, то рівняння для нерівноважної функції розподілу можна отримати у формі Іто. Якщо ж цей коефіцієнт залежить від керівного параметра до і після переходу, то рівняння дифузії можна записати у формі Стратоновича. Якщо використати розбивку симетричної та асиметричної частин ймовірності переходу, то отримаємо кінетичну форму представлення рівняння Фоккера–Планка. Усі вони пов'язані з представленням сил "розсіювання" та дифузії, тобто

$$A(\varepsilon) = f(\varepsilon) + \nu\,\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad (4)$$

де коефіцієнт ν дорівнює $1, 1/2$, або 0 у представленнях Іто, Стратоновича та кінетичному, відповідно. Явні вирази для коефіцієнтів через мікроскопічні параметри мають такий вигляд [11–18]:

$$f(\varepsilon) = \int \Delta\varepsilon W(\Delta\varepsilon) d\Delta\varepsilon,$$
$$D(\varepsilon) = \int (\Delta\varepsilon)^2 W(\Delta\varepsilon) d\Delta\varepsilon. \qquad (5)$$

Рівняння для нерівноважної функції розподілу в цьому випадку можна переписати у вигляді локального закону збереження ймовірності, тобто

$$\frac{\partial \rho(E,t)}{\partial t} = \frac{\partial J(\rho(\varepsilon,t))}{\partial \varepsilon}, \qquad (6)$$

де

$$J = A(\varepsilon)\rho(\varepsilon,t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} D(\varepsilon)\rho(\varepsilon,t). \qquad (7)$$

Стаціонарний розв'язок рівняння Фоккера–Планка при $J(\rho(\varepsilon,t)) = 0$ дається формулою

$$\rho_s(\varepsilon) = \frac{C}{D^{\nu}(\varepsilon)} \exp\left(-\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{f(\varepsilon')d\varepsilon'}{D(\varepsilon')}\right). \qquad (8)$$

Ця функція розподілу має екстремальне значення, якщо керівний параметр ε задовольняє рівняння

$$\nu D'(\widetilde{\varepsilon}) = f(\widetilde{\varepsilon}), \qquad (9)$$

де символ $'$ означає похідну за керівним параметром. Рівняння (8) встановлює зв'язок між дисипацією та дифузією системи в стаціонарному випадку та повністю визначає новий "квазірівноважний" стан системи [15, 16].

3. Степенева функція розподілу

Степеневий стаціонарний розподіл керівного параметра спостерігався для багатьох систем різних типів. Багато статей і оглядів [10] пов'язані з цією важливою проблемою. Хочеться звернути увагу на одну із загальних ймовірних причин появи такого стаціонарного розподілу як у загальному підході, так і у конкретних фізичних прикладах. Перш за все, ми зосередимося на стаціонарній функції розподілу (8). Очевидно, що за наявності зв'язку між дрейфом системи під впливом зовнішніх факторів і коефіцієнтом дифузії $f(\varepsilon) \sim D'(\varepsilon)$ завжди можна отримати степеневий закон залежності від керівного параметра. На практиці це означає, що існує залежність між середнім значенням дрейфу системи при зміні керівного параметра та дифузією в просторі цього керівного параметра. Це призводить до того, що встановлюється зв'язок між дисперсією системи та флуктуаціями, який і забезпечує стаціонарний стан системи зі стаціонарною функцією розподілу в степеневій формі $\rho_s = D^{\mu}(\varepsilon)$, де степінь μ визначатиметься співвідношенням між коефіцієнтом деградації та флуктуаційними кореляціями. Це дає змогу зробити висновок про те, що функція розподілу типу Парето виникає під впливом мультиплікативного шуму в системі, а саме, через флуктуації параметрів процесу дисипації.

Розглянемо простий випадок еволюції системи в середовищі неоднорідної дисипації. Для цього випадку характеристики системи можуть бути враховані через інше значення коефіцієнта дисипації, що залежить від керівного параметра як випадкової величини. У цьому випадку ми можемо використати загальні результати [14], де поточний підхід використовується для опису спричиненого шумом фазового переходу. У розглянутому випадку рівняння Ланжевена для повільного керівного параметра можна записати у вигляді

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\gamma_t \varepsilon,$$

де множник $\gamma_t = \gamma + \xi_t$ складається з постійної частини γ, яка визначає середній коефіцієнт дисипації, та хаотичної частини ξ_t, яка описує вплив випадкової зміни дисипації. У випадку білого шуму ми можемо записати таке рівняння Фоккера–Планка для нерівноважної функції розподілу в стандартній формі інтерпретації Стратоновича [14]:

$$\frac{\partial \rho(\varepsilon,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\gamma\varepsilon\rho(\varepsilon,t)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\varepsilon^2\rho(\varepsilon,t), \qquad (10)$$

де σ^2 визначає дисперсію флуктуацій коефіцієнта дисипації γ. Стаціонарний розв'язок цього рівняння можна представити у вигляді [14]

$$\rho_s(\varepsilon,t) = C(\varepsilon)^{-[\nu+\gamma/\sigma^2]}. \qquad (11)$$

Це стаціонарне рішення має вигляд розподілу Парето. Цей результат був експериментально перевірений і визнаний дійсним у багатьох випадках, наприклад, для розподілу грошей у суспільстві, чи розподілу слів у літературних творах, тощо. Можна стверджувати, що розподіл функції Парето породжується флуктуаціями у середовищі, в якому відбувається динаміка незбалансованої системи. Крім того, слід враховувати, що σ^2 є дисперсією лише коефіцієнта дисипації γ і може визначатися зовнішніми умовами. Залежність дисипаційних властивостей від керівного параметра може бути нелінійною. У такому випадку ми можемо ввести додатковий нелінійний член у функцію $f(\varepsilon)$,

$f(\varepsilon) = -\gamma\varepsilon + \delta\varepsilon^n$.

Як бачимо, якщо $n = 1$, ніщо не змінюється у порівнянні з попереднім випадком, окрім степені $-[\nu + (\gamma - \delta)/\sigma^2]$. У випадку нелінійної степені ми отримуємо такий результат для функції розподілу:

$$\rho(\varepsilon) = A\varepsilon^{-[\nu+\gamma/\sigma^2]} \exp\left(\frac{\delta}{\sigma}^2 \varepsilon^{n-1}\right). \qquad (12)$$

Отриманий розподіл погано працює як для малих, так і для великих значень керівного параметра ε, тобто цей розподіл може бути корисним лише в певному ε-діапазоні. Множник перед експонентою можна інтерпретувати як залежність від щільності станів. Виявляється, що фізичні властивості системи, наприклад теплоємність, залежать від щільності станів. На підставі поведінки останнього параметра робляться висновки про тип фазового переходу в рівноважному випадку [20].

4. Енергетичний простір

Для кращого розуміння отриманих результатів застосуємо цей підхід до опису фізичних систем, чия енергія може бути керівним параметром. У нерівноважному випадку енергія макроскопічної системи змінюється в залежності від зовнішніх впливів і початкових умов, тобто система здійснює перехід з одного енергетичного стану в інший. Щоб описати таку еволюцію, необхідно взяти до уваги дисипацію та вплив зовнішнього середовища [7–16].

Узагальнення статистичного опису таких систем за допомогою розподілу Гіббса в енергетичному представленні [21] не завжди можливо. Щоб зрозуміти причини цього, нагадаємо основні моменти такого підходу. Канонічний розподіл Гіббса у фазовому просторі задається формулою

$$\rho(q,p)d\Gamma = \exp\left\{\frac{F - H(q,p)}{\Theta}\right\} d\Gamma, \qquad (13)$$

де $H(q,p) = E$ – це гамільтоніан на гіперповерхні постійної енергії E, $d\Gamma = \prod_i dq_i dp_i$ – елемент фазового простору, $\Theta = kT$, T – температура, а F – вільна енергія, яку можна знайти з умови нормалізації

$$\int \exp\left[\frac{F - H(q,p)}{\Theta}\right] d\Gamma = 1.$$

Фазовий простір, як відомо, визначається енергією системи та зовнішніми параметрами [21]. Введемо величину $\Sigma = \ln (d\Gamma)/(dE)$. Тоді можна розглянути розподіл в енергетичному просторі

$$\rho(E)dE = C \exp\left\{\frac{F - E}{\Theta} + \Sigma(E)\right\} dE. \qquad (14)$$

Умова нормалізації дає

$$\int c \exp\left[\frac{F - E}{\Theta} + \Sigma(E)\right] dE = 1.$$

Щоб вибрати стани з домінуючим внеском у статистичну суму, ми використовуємо умову для температури, визначену рівнянням $(d\Sigma)/(dE) = 1/\Theta$.

При цьому ми припускаємо, що зв'язок між змінами величини фазового простору та енергії E відомий. В рамках цього визначення та в контексті фундаментальних принципів статистичної механіки [13] ми приходимо до висновку, що формула

$$\Sigma = \ln \frac{d\Gamma}{dE} = S$$

відтворює ентропію системи, враховуючи те, що температура описує залежність ентропії лише від енергії, але не від інших термодинамічних функцій. Звідси також випливає, що інтегрування по енергії в континуальному сенсі дає вираз для статистичної суми. Очевидно, що екстремальний внесок у статистичну сумму пов'язаний зі станами, для яких $F = E - \theta S$, і що за будь-яких відхилень від останньої умови внесок у статистичну сумму є мізерно малим, подібно до внеску квантових поправок до класичних траєкторій [8, 16].

У випадку відкритих систем може виникнути додаткова дисипація (наприклад, дисипативні характеристики зовнішнього середовища можуть мати значні випадкові зміни в процесі еволюції), що може призвести до повільної зміни енергії системи під зовнішнім впливом. Випадкове блукання системи також є результатом взаємодії із навколишнім середовищем, вплив якого проявляється у випадковій послідовності змін енергії системи. Якщо система не має достатньо часу, щоб повернутися до початкового розподілу після випадкової зміни параметрів навколишнього середовища, вона повинна релаксувати до нового стану. Тому внесок станів з енергіями, що змінилися внаслідок флуктуацій зовнішніх параметрів, та які не задовольняють умову домінуючого внеску в статистичну сумму в рівноважному випадку, може бути значним, і тому розподіл Гіббса більше не буде виконуватися.

Загальне рівняння, яке описує змінну енергію (3) як повільний керівний параметр ($\varepsilon = E$) і враховує енергію дисипації та випадкові кроки в енергетичному просторі, можна представити у формі

$$\frac{\partial E}{\partial t} = f(E) + L(t), \tag{15}$$

де $f(E)$ визначає зміни енергії внаслідок процесів дисипації, а $L(t)$ – це флуктуація, яку неможливо пов'язати зі змінною дисипацією та врахувати випадкові збурення зовнішнього середовища. Залежність функції дисипації від енергії включає вплив усіх зовнішніх факторів, що призводять до дисипації енергії. Нижче ми розглянемо деякі приклади такої залежності. У випадку білого шуму ми використовуємо просте рівняння Фоккера–Планка (2) для нерівноважної функції розподілу [14, 18]:

$$\frac{\partial \rho(E,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E}\left(f(E)\rho(E,t)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \rho(E,t)}{\partial E^2}. \tag{16}$$

Стаціонарний розв'язок цього рівняння має простий вигляд

$$\rho(E) = A\exp\left(\int\limits_0^E \frac{f(E')}{\sigma^2}dE'\right). \tag{17}$$

У випадку $f(E) = -\gamma E$, коли враховується ефективна дисипація енергії в зовнішньому середовищі, стаціонарний розв'язок можна записати у формі

$$\rho(E) = A\exp\left(-\frac{\gamma E^2}{\sigma^2}\right). \tag{18}$$

Щоб визначити фізичний зміст коефіцієнта дисипації енергії, слід повернутися до динамічного рівняння енергії. Розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді

$$\left\langle E^2\right\rangle = E_0^2\exp(-2\gamma t) + \frac{\sigma^2}{2\gamma}\left[1-\exp(-2\gamma))\right], \tag{19}$$

з необхідною умовою $\lim_{t\to\infty}\left\langle E^2\right\rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma}$. У такому випадку нерівноважна функція розподілу визначається формулою

$$\rho(E) = A\exp\left(-\frac{E^2}{\langle E^2\rangle}\right), \tag{20}$$

яка є рівноважною "функцією розподілу Максвелла" для енергії, близької за значенням до середнього значення флуктуаційної енергії. Цю формулу можна розглядати як узагальнення розподілу енергії в консервативній системі, яка не взаємодіє з термостатом. В останньому випадку $f(E) = 0$, і стаціонарний розв'язок перетворюється на константу. Рівняння для нерівноважної функції розподілу у випадку відкритої системи має вигляд рівняння дифузії, яке має розв'язок

$$\rho(E) = A\frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{E^2}{4\sigma^2 t}\right), \tag{21}$$

що описує вільну міграцію системи, яка є нечіткою (розмитою) в енергетичному просторі. Ступінь нечіткості системи зростає з часом за законом $\left\langle E^2\right\rangle = 4\sigma^2 t$. Це рішення описує еволюцію системи, яка у початковому стані описувалася функцією розподілу замкнутої системи $\rho(E) = \delta(E-E_0)$. Усі стани системи в початковий момент часу знаходяться в точках поверхні постійної енергії. Флуктуації зовнішніх умов призводять до розмитості мікроканонічного розподілу. У цій ситуації не існує стаціонарної щільності ймовірності. У цьому сенсі необхідно враховувати, що значення $E = 0$ – це не тільки внутрішня межа, а також і стаціонарна точка, в якій усі ймовірні стани системи мають однакові щільності ймовірності, а тому процеси переносу та дифузії не відбуваються. Ця точка також є точкою притягання, і вся "маса" щільності ймовірності зосереджена в нулі і повинна задовольняти умову нормалізації для функції розподілу [14]. Згідно зі щільністю ймовірності вона повинна відповідати мікроканонічній функції розподілу. Стаціонарний розв'язок у загальному нерівноважному випадку можна подати у вигляді

$$\rho_s(E) = \frac{C}{D^\nu(E)}\exp\left(-\int\limits_0^E \frac{f(E')d\varepsilon'}{D(E')}\right). \tag{22}$$

Ця функція розподілу має екстремальне значення при значенні керівного параметра, яке можна знайти як розв'язок рівняння

$$\nu D'(\widetilde{E}) = f(\widetilde{E}). \tag{23}$$

Якщо ми припустимо, що дисипація $f(E)$ є нелінійною функцією стану системи, може виникнути багато цікавих ситуацій, включаючи спричинені шумом переходи до нових нерівноважних станів, які є більш стабільними, ніж попередній стан. У цьому сенсі можна реалізувати новий нерівноважний стан з більшим часом життя системи. У цьому особливому стані система виявляє нові властивості, які не проявлялися при початкових умовах. Флуктуації у зовнішньому середовищі визначають температуру системи і всі можливі стани цієї системи. Температура системи визначається дифузією в енергетичному просторі, і ця дифузія є універсальною характеристикою середовища. Температура визначається процесом, що розглядається. Як приклад, обчислимо ентропію при екстремальному значенні функції розподілу, тобто

$$S = -\int \rho_s(E) \ln \rho_s(E) dE = \langle U(E) \rangle, \tag{24}$$

та знайдемо, у відповідності до визначення, температуру системи в сідловій точці,

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{dS}{d\langle E\rangle} = \frac{d\langle U(E)\rangle}{d\langle E\rangle}. \tag{25}$$

Це означає, що температура не відповідає середньому значенню енергії в системі і в загальному випадку є певною функцією середньої енергії. В додатку ми продемонструємо це для деяких випадків. У найпростішому випадку броунівської частинки ми можемо взяти $f(E) = -\gamma E$, де γ – це коефіцієнт дисипації, і $g(E) = 1$ для білого шуму; тоді $U(E) = \frac{2\gamma}{\sigma^2} E$ і $\frac{1}{\Theta} = \frac{2\gamma}{\sigma^2}$. Температура для таких систем визначається тільки через інтенсивність шуму, що є природним.

5. Висновок

Показано, що причиною розподілу Парето в багатьох нерівноважних системах є флуктуації властивостей навколишнього середовища.

Наведено обґрунтування запропонованого раніше підходу до статистичного опису нерівноважних систем в енергетичному просторі [15] та запропоновано загальний опис еволюції нерівноважної функції розподілу в енергетичному просторі. На основі рівняння Фоккера–Планка для функції розподілу макроскопічної системи отримано нове рівняння, що враховує флуктуації стану навколишнього середовища. Стаціонарний розв'язок такого рівняння описує стаціонарні стани нерівноважних систем. Запропонований підхід враховує ймовірні переходи між різними станами внаслідок дисипації та дифузії системи в енергетичному просторі.

Для опису еволюції нерівноважної системи необхідно знайти розв'язки рівняння Фоккера–Планка з нелінійними кінетичними коефіцієнтами, які можуть бути предметом подальших досліджень. Еволюцію в енергетичному просторі природно описувати за допомогою кінетичних коефіцієнтів, які слід знайти з відповідних рівнянь Ланжевена для еволюції керівного параметра системи, що взаємодіє з флуктуаціями середовища, та її макроскопічних характеристик. Зменшення значимості початкового основного стану не суперечить H-теоремі, оскільки відомо, що розподіли, еволюція яких підпорядкована рівнянню Фоккера–Планка, приводять до зростання ентропії. Тому запропонована в цій статті картина видається цілком послідовною.

ДОДАТОК А.
Звичайний броунівський рух

Щоб повніше проілюструвати переваги запропонованого підходу, розглянемо відомі результати, отримані в теорії броунівського руху. Зараз ми покажемо, що для звичайної броунівської частинки запропонований підхід до опису стохастичної динаміки в енергетичному просторі повністю еквівалентний опису в просторі швидкостей. Динаміку броунівських частинок можна описати у термінах швидкості v рівнянням Ланжевена

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + F(t), \tag{A1}$$

де γ – коефіцієнт тертя, а $F(t)$ – випадкова сила, яка описує дію середовища на частинку і для якої виконуються такі умови: середнє по рівноважному ансамблю значення дорівнює нулю, $\langle F(t)\rangle = 0$; $\langle F(t)F(t')\rangle = \phi^2\delta(t-t')$. Вони задовольняють умову білого шуму і описують процес некорельованого руху частинок. Для броунівської частинки енергію $E = Mv^2/2$ і зміну енергії можна визначити таким чином:

$$\frac{dE}{dt} = Mv\frac{dv}{dt} = -2\gamma E + \sqrt{2ME}F(t). \tag{A2}$$

Це є ніщо інше, як рівняння (15) з $f(E) = -2\gamma E$, $g(E) = \sqrt{E}$ і $L(t) = \sqrt{2M}F(t)$. Використовуючи розв'язок рівняння

Ланжевена для швидкості, отримуємо [18]

$$\left\langle v^2(\infty)\right\rangle = \phi^2/(2\gamma) = (kT)/M.$$

Тому $\langle E\rangle = (kT)/2$, де T – це температура термальної ванни. Використовуючи розв'язок рівняння (A2) і нехтуючи кореляцією флуктуацій енергії, ми отримуємо

$$\sqrt{\langle E\rangle^2} = \frac{\sigma^2}{4\gamma} \equiv \frac{\phi^2}{4\gamma}2M = kT,$$

що, як і в попередньому результаті, повністю задовольняє умову рівноваги.

Різні описи процесу, що протікає в нерівноважній системі, є еквівалентними, але перевага віддається енергетичному представленню, оскільки воно дає можливість знайти умови "сталих" станів нерівноважної системи. Такий підхід справедливий для різних систем, для яких можливо визначити прямий вплив взаємодії з навколишнім середовищем і ймовірні випадкові нерівноважні флуктуації. Він є кращим у порівнянні з іншими підходами, оскільки енергія є найповільнішою змінною, від якої залежить релаксація системи.

Енергетичне представлення може бути більш прозорим для розуміння, якщо ми порівняємо його зі звичайним способом опису станів рівноваги. Наприклад, для звичайної броунівської частинки стаціонарний розв'язок можна записати у вигляді

$$\rho_s(E) = A\exp\left\{-\frac{4\gamma}{\sigma^2}E - \ln\sqrt{E}\right\} \equiv A\frac{1}{\sqrt{E}}\exp(-\beta E), \qquad \text{(A3)}$$

де використовується добре відоме співвідношення $(2\gamma)/\sigma^2 = \beta$. Враховуючи умову нормування

$$\int \rho_s(E)dE \equiv \int \rho_s(p)dp,$$

ми отримуємо рівноважну функцію розподілу в імпульсному просторі у такому вигляді:

$$\rho_s(p) = A\exp\left(-\beta\frac{p^2}{2M}\right) = A\exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right). \qquad \text{(A4)}$$

Стаціонарний розчин повністю відтворює добре відому рівноважну функцію розподілу для звичайних броунівських частинок.

Розглянемо інший випадок, коли енергія постійно вводиться в систему і розсіюється, тобто $f(E) = \alpha - \gamma E$. Для такої системи отримуємо таку стаціонарну функцію розподілу для флуктуацій коефіцієнта дисипації $\gamma = \gamma + \xi_t$:

$$\rho(\varepsilon) = AE^{-[1+(2\gamma)/\sigma^2]}\ \exp\left(-\frac{2\alpha}{\sigma^2 E}\right). \qquad \text{(A5)}$$

Тут σ^2 – це дисперсія лише коефіцієнта дисипації γ. При великих значеннях енергії ми маємо лише степеневу функцію розподілу.

1. N.N. Bogoliubov. *Problems of Dynamic Theory* (Geophysics Research Directorate, AF Cambridge Research Laboratories, Air Force Research Division, United States Air Force, 1960).
2. R. Balescu. *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics* (J. Wiley and Sons, 1975) [ISBN: 978-0471046004].
3. Yu.L. Klimontovich. *Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes* (Springer, 1982).
4. D. Zubaryev. *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics* (Nauka, 1971).
5. C.W. Gardiner, P. Zoller. *Quantum Noise* (Springer, 2000) [ISBN: 3-540-22301-0].
6. D.F. Wells, G.J. Milburn. *Quantum Optics* (Springer, 1994) [ISBN-13: 978-3-540-58831-3].
7. B.I. Lev, A.G. Zagorodny. Structure formation in system of Brownian particle in dusty plasma. *Phys. Lett. A* **376**, 1101 (2009).
8. B.I. Lev, A.G. Zagorodny. Statistical description of Coulomb-like systems. *Phys. Rev. E* **84**, 061115 (2011).
9. B.I. Lev, V.B. Tymchyshyn, A.G. Zagorodny. Brownian particle in non-equilibrium plasma. *Cond. Matter Phys.* **12**, 593 (2009).
10. V. Guerriero. Power law distribution: Method of multiscale inferential statistics. *J. Mod. Math. Frontier* **1**, 21 (2012).
11. Yu.L. Klimontovich. Nonlinear Brownian motion. *Usp. Fiz. Nauk* **164**, 811 (1994).
12. D. Huang. *Statistical Mechanics* (W.A. Benjamin, Inc., 1969).
13. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics* (Elsevier, 2013).
14. W. Horsthemke, R. Lefever. *Noise-Induced Transition: Theory, Applications in Physics, Chemistry and Biology* (Springer-Verlag, 1984) [ISBN: 978-3540113591].
15. B.I. Lev, A.D. Kiselev. Energy representation for nonequilibrium Brownian-like systems: Steady states and fluctuation relations. *Phys. Rev. E* **82**, 031101 (2010).
16. B.I. Lev. Brownian system in energy space: Non-equilibrium distribution function in energy representation. *Eur. Phys. J. (Special Topics)* **216**, 37 (2013).
17. A.J. Lichtenberg, M.A. Liberman. *Regular and Stochastic Motion* (Springer-Verlag, 1984).
18. N.G. van Kampen. *Stohastic Process in Physics and Chemistry* (North-Holland, 1990).
19. N.N. Bogoliubov. On stochastic processes in dynamic system. In: *Physics of Elementary Particles and Nuclei (PEPAN)* (JINR (Dubna), 1978), Vol. 9, No. 4.
20. Fugao Wang, D.P. Landau. Determining the density of states for classical statistical models: A random walk algorithm to produce a flat histogram. *Phys. Rev. E* **64**, 056101 (2001).
21. J.W. Gibbs. *Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics* (Cambridge University Press, 1902) [ISBN: 9780511686948].

Одержано 15.06.24.

Переклад на українську мову О. Войтенка

B. Lev, A. Zagorodny

FLUCTUATIONS AND POWER
LAW DISTRIBUTION FUNCTION
IN NONEQUILIBRIUM SYSTEMS

The Fokker–Planck equation is formulated for the distribution functions of macroscopic open systems in the space of slowly changing physical variables (energy, adiabatic invariants, *etc.*). The stationary solution of such equations determines a quasi-equilibrium distribution function in the relevant space. The proposed approach involves the evolution of systems under the action of dissipation and diffusion in the space of the appropriate variables. It is shown that the well-known power law distribution can be obtained by considering internal and external fluctuations in statistical systems.

Keywords: Fokker–Planck equation, power low distribution function, fluctuations in statistical systems, Langevin equations.