КВАЗІБОЗОНИ, СКЛАДЕНІ З ДВОХ ФЕРМІОНІВ, ТА ДЕФОРМОВАНІ ОСЦИЛЯТОРИ

О.М. ГАВРИЛИК, І.І. КАЧУРИК, Ю.А. МІЩЕНКО

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14b, Київ 03143; e-mail: omgavr@bitp.kiev.ua)

УДК 539.1.01;539.12.01

Поняття квазібозонів чи складених бозонів має широкий спектр фізичних застосувань (мезони, ексітони тощо). Відомо, що навіть у випадку квазібозонів, складених із двох звичайних ферміонів, їх оператори народження і знищення задовольняють нестандартні комутаційні співвідношення. Природно спробувати реалізувати квазібозонні оператори відповідно операторами народження і знищення деформованих (нелінійних) осциляторів, адже останні становлять добре вивчену область сучасної квантової фізики. У статті доведено, що такі деформовані осцилятори, які реалізують квазібозони, справді існують. Виведено необхідні і достатні умови для реалізації. Також доведено єдиність сім'ї можливих деформацій.

1. Вступ

Дослідження багаточастинкових задач, в яких задіяні композитні частинки, суттєво відрізняється від випадку точковоподібних частинок у бік необхідності значно складнішого аналізу. Зокрема, внаслідок наявності внутрішніх ступенів вільності у складових статистичні властивості композитних (і тому вже неточковоподібних) частинок істотно відрізняється від чисто бозевського чи фермієвського опису. Таку відмінність, закладену в модифіковані комутаційні співвідношення, можна відповідним чином моделювати (представляти) за допомогою деякої деформованої (скажімо, q- чи p,q-деформованої, чи іншої) версії осциляторної алгебри. Частковий випадок реалізації ідеї опису композитних бозонів (чи "квазібозонів", див. [1]) в термінах деформованої алгебри Гайзенберга було розглянуто в роботі Аванчіні і Крейна [2], які використали куонну версію [3] деформованої бозонної алгебри. Необхідно зауважити, що куони принципово відрізняються від деформованих осциляторів типу Аріка–Куна [4], коли розгляд охоплює дві моди і більше: в такому випадку усі моди типу Аріка–Куна є незалежними (оператори, що відповідають різним модам, взаємно комутують) на відміну від некомутуючих куонних мод, див. [2, 3].

Хоча відомо чимало різноманітних версій деформованих осциляторів [5–10], детального аналізу на їх основі можливих реалізацій квазібозонів в літературі досі не було. Дану роботу можна розглядати як певний крок і деякі результати у цьому напрямку. А саме, нами проведено детальний аналіз у важливому випадку набору незалежних мод (копій) деформованих осциляторів, тоді як для окремо взятої копії беремо найбільш загальну структурну функцію деформації $\phi(N)$. Остання, як добре відомо [11,12], однозначно визначає деформовану алгебру, тобто форму комутаційних співвідношень для операторів народження, знищення та числа частинок відповідно до формули $aa^\dagger - a^\dagger a = \phi(N+1) - \phi(N)$.

Тим чи іншим моделям деформованих осциляторів, через їх особливі властивості, приділялася чимала увага в останнє двадцятиліття. Найбільш відомими і інтенсивно досліджуваними моделями деформованих осциляторів є такі як q-деформовані осцилятори Аріка–Куна [4] та Біденгарна–Макфарлейна [4], а також і двопараметрична сім'я p,q-деформованих осциляторів [8]. Крім згаданих також існує ще q-деформований осцилятор Тама–Данкофа [6], який хоч і досліджували, але не так детально [7]. На відміну від усіх цих деформованих осциляторів, дуже скромним є знання стосовно так званого μ-деформованого осцилятора, введеного в [10]. Слід зазначити, що μ-осцилятору притаманні принципово відмінні риси та незвичайні властивості, див. [13].

Деформовані осцилятори, які є нелінійними узагальненнями стандартного квантового гармонічного осцилятора, знаходять численні застосування у описі різноманітних фізичних систем із суттєвими нелінійностями – від квантової оптики чи проблеми Ландау до феноменології квантових частинок при високих енергіях та сучасної квантової теорії поля (див., наприклад, [14–21]). Тому можливе використання для реалізації квазібозонів тих чи інших деформованих осциляторів (деформованих бозонів) є дуже бажаним, що приводить до значного спрощення відповідних обчислень, коли алгебра, що представляє вихідну систему композитних частинок, зводиться до алгебри деякого деформованого осцилятора. В цьому сенсі інформацію про внутрішню структуру частинок несуть у собі один чи декілька параметрів деформації. Дана робота реалізує такий спосіб редукції для випадку квазібозонів [2], складених з двох звичайних ферміонів. Значення отриманих результатів полягає в тому, що для *композитних фізичних частинок* чи *квазічастинок* (таких як мезони, хіггсон, легкі парні ядра, екситони та ін.) було б дуже корисно мати їх реалізацію через деформовані бозони, використовуючи деформовані осцилятори.

2. Квазібозони, складені із двох ферміонів

Як і в роботі [2], розглядаємо систему композитних бозоноподібних частинок (чи квазібозонів, див. [1]), таких, що кожна їх копія/мода утворена з двох звичайних ферміонів. У цьому розділі вивчаємо реалізацію квазібозонів у термінах набору незалежних однакових копій деформованого осцилятора типу Аріка–Куна [4].

Отже, позначимо через $a^\dagger_\mu$, $b^\dagger_\nu$, a_μ, b_ν, відповідно, оператори народження та знищення двох (взаємно-антикомутуючих) наборів звичайних ферміонів із стандартними співвідношеннями антикомутації, і використовуємо їх для побудови квазібозонів. Тоді квазібозонні оператори народження і знищення $A^\dagger_\alpha$, A_α (де α характеризує конкретний квазібозон і позначає повний набір його квантових чисел) задаємо наступним чином:

$$A^\dagger_\alpha = \sum_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}_\alpha a^\dagger_\mu b^\dagger_\nu, \quad A_\alpha = \sum_{\mu\nu} \overline{\Phi}^{\mu\nu}_\alpha b_\nu a_\mu, \tag{1}$$

де $a^\dagger_\mu$, $b^\dagger_\nu$, a_μ, b_ν задовольняють співвідношення

$$\{a_\mu, a^\dagger_{\mu'}\} \equiv a_\mu a^\dagger_{\mu'} + a^\dagger_{\mu'} a_\mu = \delta_{\mu\mu'}, \ \ \{a_\mu, a_{\mu'}\} = 0,$$
$$\{b_\nu, b^\dagger_{\nu'}\} \equiv b_\nu b^\dagger_{\nu'} + b^\dagger_{\nu'} b_\nu = \delta_{\nu\nu'}, \quad \{b_\nu, b_{\nu'}\} = 0$$

і, крім того, кожен із $a^\dagger_\mu$, a_μ антикомутує з $b^\dagger_\nu$, b_ν. Можна легко перевірити, що

$$[A_\alpha, A_\beta] = [A^\dagger_\alpha, A^\dagger_\beta] = 0. \tag{2}$$

Для основного комутатора знаходимо

$$[A_\alpha, A^\dagger_\beta] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta},$$

де використано умову нормування

$$\mathrm{Tr}(\Phi_\alpha \Phi^\dagger_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

і введено позначення

$$\Delta_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\mu\nu\mu'} \overline{\Phi}^{\mu\nu}_\alpha \Phi^{\mu'\nu}_\beta a^\dagger_{\mu'} a_\mu + \sum_{\mu\nu\nu'} \overline{\Phi}^{\mu\nu}_\alpha \Phi^{\mu\nu'}_\beta b^\dagger_{\nu'} b_\nu.$$

Величина $\Delta_{\alpha\beta}$ уособлює відхилення від чисто бозонного комутаційного співвідношення. Зауважимо, що чистий бозон (коли $\Delta_{\alpha\beta} = 0$) не є частковим випадком квазібозона, оскільки $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ вимагало б $\Phi_\alpha = 0$, що заперечувало б саму композитну структуру (1).

Зауважимо, що на відміну від реалізації квазібозонних операторів з використанням куонного варіанта алгебри деформованого осцилятора, як це робили у [2], у нашому подальшому розгляді різні копії/моди деформованого осцилятора є повністю незалежними. Тобто, ми вважатимемо, що виконується (2), а також $[A_\alpha, A^\dagger_\beta] = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

3. Чи можуть деформовані осцилятори типу Аріка-Куна моделювати квазібозони?

Тут ми вивчаємо реалізацію квазібозонів незалежним набором q-деформованих бозонів типу Аріка–Куна. Останні задовольняють співвідношення

$$[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}^\dagger_\beta] = \delta_{\alpha\beta} + (q^{\delta_{\alpha\beta}} - 1)\mathcal{A}^\dagger_\beta \mathcal{A}_\alpha, \tag{4}$$

де незалежність мод забезпечується наявністю $\delta_{\alpha\beta}$.

Квазібозонний оператор числа частинок $\mathcal{N}_\alpha$ визначаємо як

$$\mathcal{N}_\alpha = \log_q \left(1 + (q-1)\mathcal{A}^\dagger_\alpha \mathcal{A}_\alpha\right),$$

що є оберненням формули $\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} = \frac{q^{\mathcal{N}}-1}{q-1}$, див. [4].

Нагадаємо, що для моделі Аріка–Куна виконуються також і співвідношення

$$[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{N}_\alpha] = \mathcal{A}_\alpha, \quad [\mathcal{A}^\dagger_\alpha, \mathcal{N}_\alpha] = -\mathcal{A}^\dagger_\alpha.$$

Тобто, оператор $\mathcal{A}^\dagger_\alpha$, є підвищуючим (відповідно, $\mathcal{A}_\alpha$ – понижуючим) оператором для деформованих бозонів.

Нашою метою є знайти коефіцієнти $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ в (1) такі, що реалізація через (4) є дійсною, тобто комутаційні співвідношення (4) виконуються на відповідному просторі станів. Якщо основний стан $|O\rangle$ для квазібозонів визначено як

$$A_\alpha|O\rangle = a_\mu|O\rangle = b_\nu|O\rangle = 0,$$

то відповідним простором станів є лінійна оболонка $\{|O\rangle, A^\dagger_{\gamma_1}|O\rangle, A^\dagger_{\gamma_2}A^\dagger_{\gamma_1}|O\rangle, \ldots\}$. Перепишемо комутаційні співвідношення (4) у вигляді

$$F_{\alpha\beta} \equiv \Delta_{\alpha\beta} + (q^{\delta_{\alpha\beta}} - 1)A^\dagger_\beta A_\alpha = 0.$$

Тоді виконання комутаційних співвідношень на вказаній лінійній оболонці зводиться до занулення оператором $F_{\alpha\beta}$ кожного зі станів $|O\rangle$, $A^\dagger_{\gamma_1}|O\rangle$, $A^\dagger_{\gamma_2}A^\dagger_{\gamma_1}|O\rangle$, і т. д.

Очевидно, що для основного стану маємо

$$F_{\alpha\beta}|O\rangle = 0.$$

Зауважимо, що

$$F_{\alpha\beta}A^\dagger_{\gamma_1}|O\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad [F_{\alpha\beta}, A^\dagger_{\gamma_1}]|O\rangle = 0,$$
$$F_{\alpha\beta}A^\dagger_{\gamma_1}A^\dagger_{\gamma_2}|O\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad [[F_{\alpha\beta}, A^\dagger_{\gamma_1}], A^\dagger_{\gamma_2}]|O\rangle = 0.$$

Рівняння $[F_{\alpha\beta}, A^\dagger_{\gamma_1}]|O\rangle = 0$ можна переписати у вигляді умови на матриці Φ_α. Використовуючи дану умову, для першого комутатора отримуємо:

$$[F_{\alpha\beta}, A^\dagger_{\gamma_1}] = (1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})A^\dagger_\beta \left[F_{\alpha\gamma_1} + (1 - q^{\delta_{\alpha\gamma_1}})A^\dagger_{\gamma_1}A_\alpha\right].$$

Обчислимо подвійний комутатор:

$$[[F_{\alpha\beta}, A^\dagger_{\gamma_1}], A^\dagger_{\gamma_2}] = (1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})A^\dagger_\beta[F_{\alpha\gamma_1}, A^\dagger_{\gamma_2}] +$$
$$+ (1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})(1 - q^{\delta_{\alpha\gamma_1}})A^\dagger_\beta A^\dagger_{\gamma_1}[A_\alpha, A^\dagger_{\gamma_2}].$$

Звідси, для того, щоб виконувалося співвідношення $[[F_{\alpha\beta}, A^\dagger_{\gamma_1}], A^\dagger_{\gamma_2}]|O\rangle = 0$, знаходимо

$$(1 - q^{\delta_{\alpha\beta}})(1 - q^{\delta_{\alpha\gamma_1}})\delta_{\alpha\gamma_2}A^\dagger_\beta A^\dagger_{\gamma_1}|O\rangle = 0.$$

Таким чином, приходимо до протиріччя: при $\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2$ і $q \neq 1$ маємо

$$(A^\dagger_\alpha)^2|O\rangle = 0,$$

тобто, парадоксальний факт нільпотентності "бозонних" операторів.

Отже, АК-тип деформації (див. [4]) приводить до протиріччя з бозонним характером системи, складеної з двох ферміонів. Однак, як далі буде видно, існують деформації, для яких ситуація інакша.

4. Квазібозони і загальний вигляд деформації

Дослідимо систему незалежних квазібозонів, реалізованих деформованими осциляторами, *без уточнення конкретної моделі деформації*. В цьому розділі ми отримаємо необхідні умови для для такої реалізації в термінах структурної функції та матриць Φ_α.

Нехай ϕ – структурна функція деформації. Квазібозонний оператор числа частинок вводимо так:

$$N_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \phi^{-1}(A^\dagger_\alpha A_\alpha).$$

Зауважимо, що це визначення не єдине. Можна дати інше, еквівалентне визначення у вигляді $N_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \phi^{-1}(A_\alpha A^\dagger_\alpha) - 1$. Нижче нам буде потрібне поняття слабкої рівності, яке будемо позначати символом $\cong$. А саме, якщо G – деяка операторна функція, то слабка рівність визначається наступним чином:

$$G(A, A^\dagger, N; ...) \cong 0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} GA^\dagger_{\gamma_m} ... A^\dagger_{\gamma_1}|O\rangle = 0 \tag{5}$$

для $m = 0, 1, 2, \ldots$.

4.1. Виведення необхідних умов

Будемо вимагати виконання таких слабких рівностей для комутаторів:

$$[N_\alpha, A^\dagger_\alpha] \cong A^\dagger_\alpha, \quad [N_\alpha, A_\alpha] \cong -A_\alpha,$$
$$[A_\alpha, A^\dagger_\beta] \cong 0 \quad \text{при } \alpha \neq \beta, \tag{6}$$
$$[A_\alpha, A^\dagger_\alpha] \cong \phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha).$$

Підкреслимо, що для будь-якого визначення N_α повинні виконуватись такі імплікації:

$$\phi(N_\alpha) \cong A^\dagger_\alpha A_\alpha \qquad \Rightarrow \quad \phi(0) = 0,$$
$$\phi(N_\alpha + 1) \cong A_\alpha A^\dagger_\alpha \qquad \Rightarrow \quad \phi(1) = 1.$$

Із другого співвідношення в (6) випливає рівність

$$\sum_{\mu'\nu'} \left(\Phi_\beta^{\mu\nu'}\overline{\Phi}_\alpha^{\mu'\nu'}\Phi_\gamma^{\mu'\nu} + \Phi_\gamma^{\mu\nu'}\overline{\Phi}_\alpha^{\mu'\nu'}\Phi_\beta^{\mu'\nu}\right) = 0, \quad \alpha \neq \beta, \tag{7}$$

яка може бути записана в матричній формі

$$\Phi_\beta\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\gamma + \Phi_\gamma\Phi^\dagger_\alpha\Phi_\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{8}$$

Оскільки $A^\dagger_\alpha A_\alpha \cong \phi(N_\alpha)$ та $A_\alpha A^\dagger_\alpha \cong \phi(N_\alpha + 1)$, маємо

$$[A^\dagger_\alpha A_\alpha, A_\alpha A^\dagger_\alpha] \cong 0 \qquad \text{та} \qquad [\Delta_{\alpha\alpha}, N_\alpha] \cong 0.$$

Перше із співвідношень можна еквівалентно переписати так:

$$[A^\dagger_\alpha A_\alpha, \Delta_{\alpha\alpha}] \cong 0.$$

Після обчислення цей комутатор набуває вигляду

$$[A^\dagger_\alpha A_\alpha, \Delta_{\alpha\alpha}] = 2A^\dagger_\alpha \sum_{\mu\nu} \left(\Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha\right)^\dagger_{\nu\mu} b_\nu a_\mu -$$
$$- 2\sum_{\mu'\nu'} \left(\Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha\right)_{\mu'\nu'} a^\dagger_{\mu'} b^\dagger_{\nu'} A_\alpha \cong 0. \quad (9)$$

Для матриці в круглих дужках введемо позначення

$$\Psi_\alpha \equiv \Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha.$$

Аби слабка рівність (9) була вірною, необхідно, щоб комутатор із оператором народження на вакуумі давав нуль:

$$\Big[(\overline{\Psi}^{\mu\nu}_\alpha \Phi^{\mu'\nu'}_\alpha - \overline{\Phi}^{\mu\nu}_\alpha \Psi^{\mu'\nu'}_\alpha) a^\dagger_{\mu'} b^\dagger_{\nu'} b_\nu a_\mu, \Phi^{\lambda\rho}_\alpha a^\dagger_\lambda b^\dagger_\rho\Big] |O\rangle =$$
$$= \Big(\Phi^{\mu'\nu'}_\alpha \cdot \mathrm{Tr}(\Psi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha) - \Psi^{\mu'\nu'}_\alpha\Big) a^\dagger_{\mu'} b^\dagger_{\nu'} |O\rangle = 0. \quad (10)$$

Це приводить до умови

$$\Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha = \mathrm{Tr}(\Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha) \cdot \Phi_\alpha, \quad (11)$$

яка є також і достатньою. У результаті приходимо до двох незалежних умов (8), (11) на матриці Φ_α.

4.2. Зв'язок Φ_α із структурною функцією деформації $\phi(n)$

Тепер виведемо співвідношення, в які входить структурна функція ϕ. Для комутатора $[A_\alpha, A^\dagger_\alpha]$ маємо

$$[A_\alpha, A^\dagger_\alpha] = 1 - \Delta_{\alpha\alpha} \cong \phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha).$$

Звідси випливає,

$$F_{\alpha\alpha} \equiv \Delta_{\alpha\alpha} - 1 + \phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha) \cong 0.$$

Якщо умови (див. (6))

$$[N_\alpha, A^\dagger_\alpha] \cong A^\dagger_\alpha, \quad [N_\alpha, A_\alpha] \cong -A_\alpha \quad (12)$$

виконуються (це означає, що для цих умов ще потрібна буде перевірка, див. розділ 4.3 нижче), то

$$\phi(N_\alpha) A^\dagger_\alpha \cong A^\dagger_\alpha \phi(N_\alpha + 1) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ [\phi(N_\alpha), A^\dagger_\alpha] \cong A^\dagger_\alpha \big(\phi(N_\alpha + 1) - \phi(N_\alpha)\big).$$

Це приводить до співвідношення

$$[F_{\alpha\alpha}, A^\dagger_\alpha] \cong 2(\Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha)^{\mu\nu} a^\dagger_\mu b^\dagger_\nu +$$
$$+ A^\dagger_\alpha \Big(\phi(N_\alpha + 2) - 2\phi(N_\alpha + 1) + \phi(N_\alpha)\Big). \quad (13)$$

Із умови, що даний комутатор на вакуумі зануляється, отримуємо (зауважимо, що $\phi(0) = 0$):

$$\Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha = \Big(\phi(1) - \frac{1}{2}\phi(2)\Big)\Phi_\alpha = \frac{f}{2}\Phi_\alpha,$$

де нами введено (деформаційний) параметр f:

$$\frac{f}{2} \equiv \phi(1) - \frac{1}{2}\phi(2) = \mathrm{Tr}(\Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha \Phi^\dagger_\alpha \Phi_\alpha) \quad \text{для всіх } \alpha.$$

Тоді рівність (13) набуває вигляду

$$[F_{\alpha\alpha}, A^\dagger_\alpha] \cong f \cdot A^\dagger_\alpha + A^\dagger_\alpha \big(\phi(N_\alpha + 2) - 2\phi(N_\alpha + 1) + \phi(N_\alpha)\big).$$

За індукцією можна довести рівність для n-кратного комутатора (C^k_n – біноміальні коефіцієнти):

$$[...[F_{\alpha\alpha}, A^\dagger_\alpha]...A^\dagger_\alpha] \cong (A^\dagger_\alpha)^n \left\{\sum_{k=0}^{n+1} C^k_{n+1} \phi(N_\alpha + k)(-1)^{n+1-k}\right\}.$$

Із умови, що n-кратний комутатор зануляється на вакуумі, виводимо рекурентне співвідношення

$$\phi(n+1) = \sum_{k=0}^{n} C^k_{n+1} \phi(k)(-1)^{n-k}, \quad n \geq 2. \quad (14)$$

Таким чином, усі значення $\phi(n)$ для $n \geq 3$ визначаються однозначно двома значеннями $\phi(1)$ і $\phi(2)$, які в загальному випадку залежать від деякого набору параметрів деформації.

Неважко показати, що недеформована структурна функція $\phi(n) \equiv n$ задовольняє (14). Подібним чином доводимо наступні природні початкові умови коли параметр(и) деформації прямує(ють) до недеформованих значень:

$$\phi(1) \to 1, \quad \phi(2) \to 2 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) \to k, \quad k > 2.$$

Беручи до уваги рівність [22]:

$$\sum_{k=0}^{n} C^k_n k^m (-1)^{n-k} = \begin{cases} 0, & m < n, \\ n!, & m = n, \end{cases}$$

ми бачимо, що єдиними незалежними розв'язками рекурентного співвідношення (14) є n та n^2, а також і їх лінійна комбінація

$$\phi(n) = \left(1 + \frac{f}{2}\right) n - \frac{f}{2} n^2. \quad (15)$$

Ця формула задовольняє як початкові умови, так і рекурентні співвідношення (14). З огляду на єдиність розв'язку при фіксованих початкових умовах формула (15) дає загальний розв'язок співвідношення (14).

4.3. Верифікація співвідношень (12)

Як уже згадувалося, залишилось задовольнити співвідношення (12). Зауважимо, що друге з них випливає через взяття спряження від першого,

$$[N_\alpha, A_\alpha^\dagger] \cong A_\alpha^\dagger. \tag{16}$$

З огляду на *незалежність* різних мод, див. (7), достатньо покласти $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \alpha$ справа в (5).

Позначимо через I_n такі оператори:

$$I_0 = N \equiv \phi^{-1}(A_\alpha^\dagger A_\alpha),$$
$$I_{n+1} = [I_n, A_\alpha^\dagger] = [...[N_\alpha, A_\alpha^\dagger]...A_\alpha^\dagger]. \tag{17}$$

В термінах цих операторів умову (16) записуємо як

$$I_1|O\rangle = A_\alpha^\dagger|O\rangle, \quad I_n|O\rangle = 0, \quad n > 1. \tag{18}$$

Введемо позначення

$$\varepsilon_\alpha \equiv 1 - \Delta_{\alpha\alpha} = [A_\alpha, A_\alpha^\dagger].$$

Використовуючи допоміжні співвідношення

$$[\Delta_{\alpha\alpha}, A_\alpha^\dagger] = f A_\alpha^\dagger, \quad [\Delta_{\alpha\alpha}, A_\alpha] = -\overline{f} A_\alpha,$$
$$[\varepsilon_\alpha, A_\alpha^\dagger] = -f A_\alpha^\dagger, \quad [\Delta_{\alpha\alpha}, N_\alpha] \cong 0, \quad \Delta_{\alpha\alpha} = \Delta_{\alpha\alpha}^\dagger,$$

приходимо до рівностей

$$\left[(A_\alpha^\dagger A)^n, A_\alpha^\dagger\right] = A_\alpha^\dagger \left[(A_\alpha^\dagger A_\alpha + \varepsilon_\alpha)^n - (A_\alpha^\dagger A_\alpha)^n\right], \tag{19}$$
$$\left[\varepsilon_\alpha^n, A_\alpha^\dagger\right] = A_\alpha^\dagger[(-f + \varepsilon_\alpha)^n - \varepsilon_\alpha^n]. \tag{20}$$

З їх допомогою виводимо потрібні вирази для n-кратних комутаторів (17) ($\alpha_n = n(n-1)/2$):

$$I_n = (A_\alpha^\dagger)^n \phi^{-1}(A_\alpha^\dagger A_\alpha + n\varepsilon_\alpha - \alpha_n f) - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (A_\alpha^\dagger)^{n-k} I_k.$$

Нарешті, умови (18) можна подати у вигляді

$$A_\alpha^\dagger \phi^{-1}(A_\alpha^\dagger A_\alpha + \varepsilon_\alpha)|O\rangle = A_\alpha^\dagger|O\rangle,$$
$$(A_\alpha^\dagger)^n \phi^{-1}(A_\alpha^\dagger A + n\varepsilon_\alpha - \alpha_n f)|O\rangle = n(A_\alpha^\dagger)^n|O\rangle, \ n > 1.$$

Щоб задовольнити першу рівність, потрібно щоб

$$\phi^{-1}(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(1) = 1.$$

Аналогічно, щоб задовольнити другу рівність, потрібно, щоб $\phi^{-1}\Big(n - \frac{n(n-1)}{2} f\Big) = n$. Це дає нам "бонус" у формі виразу (15) для структурної функції.

Зауваження. За допомогою отриманих результатів неважко вивести рекурентні співвідношення

$$\phi(n+1) = \frac{2(n+1)}{n}\phi(n) - \frac{n+1}{n-1}\phi(n-1),$$

$$E_{n+1} = \frac{4n^2 + 4n - 4}{2n^2 - 1} E_n - \frac{2n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 1} E_{n-1}.$$

Ця рівність має типову форму так званого співвідношення квазіфібоначчі [13]. Загальний клас деформованих осциляторів з поліноміальними структурними функціями деформації $\phi(N)$ (вони також мають квазіфібоначчієву природу) досліджували в роботі [15].

5. Допустимі матриці Φ_α

Залишилося знайти допустимі матриці Φ_α. Вони мають задовольняти умову (3) та рівняння

$$\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha = (f/2)\Phi_\alpha, \tag{21}$$
$$\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma + \Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{22}$$

Нехай $f \neq 0$. Якщо $\det \Phi_\alpha \neq 0$ для деякого α, то перше рівняння дає

$$\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger = \frac{f}{2}\mathbf{1}.$$

Із другого рівняння при $\gamma = \alpha$ отримуємо

$$\Phi_\beta = 0, \quad \text{для всіх} \quad \beta \neq \alpha.$$

Тоді можливим є лише одне значення α, для якого $\det \Phi_\alpha \neq 0$. У такому випадку Φ_α є довільна унітарна матриця. Усі інші $\Phi_\beta = 0, \ \beta \neq \alpha$. Це дає частковий невироджений розв'язок системи. Усі інші розв'язки будуть виродженими для всіх α.

Тепер щодо випадку вироджених розв'язків. Використавши деякі факти з лінійної алгебри (теорема Фредгольма та ін.), приходимо до такого наслідку:

$$\mathrm{Tr}(\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}\,(\Phi_\alpha) = 2/f \equiv m \text{ для всіх } \alpha.$$

Таким чином, параметр деформації f пробігає дискретний набір значень (якщо множина значень μ, ν скінченна або зліченна):

$$f = \frac{2}{m} \quad \Rightarrow \quad \phi(n) = \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)n - \frac{1}{m}n^2. \tag{23}$$

Множина розв'язків залежить від співвідношення між d та $k{\cdot}m$, де k позначає число незалежних копій (мод) деформованих бозонів, а d – найменша із розмірностей матриць Φ_α. Якщо $d \cdot m > d$, то множина розв'язків є пустою. Якщо ж $k{\cdot}m \le d$, то існують такі унітарні матриці U_1 та U_2, що наступний матричний добуток є блочно-діагональним:

$$U_1^\dagger \Phi_\alpha U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $m \times m$ матриця $\tilde{\Phi}_\alpha$ задовольняє рівняння

$$\tilde{\Phi}_\alpha \tilde{\Phi}_\alpha^\dagger = \frac{f}{2}\mathbf{1},$$

і його загальний розв'язок можна записати через унітарну матрицю

$$\tilde{\Phi}_\alpha = \sqrt{f/2}\; U_\alpha(m).$$

Таким чином, загальний розв'язок вихідної системи (21)–(22) подаємо у вигляді

$$\Phi_\alpha = U_1 \mathrm{diag}\left\{0, \sqrt{\frac{f}{2}} U_\alpha(m), 0\right\} U_2^\dagger, \tag{24}$$

де для будь-якої матриці Φ_α блок $\sqrt{\frac{f}{2}} U_\alpha(m)$ у (24) міститься на α-му місці і має нульовий перетин з відповідним блоком будь-якої іншої матриці Φ_β із $\beta \neq \alpha$.

6. Висновки

Отже, зробимо деяке резюме разом із коментарем стосовно подальших перспектив. Для системи повністю незалежних квазібозонів показано, що їх реалізація в термінах деформованих бозонів типу АК неможлива. Однак, бажану реалізацію можна отримати на основі деякої іншої структурної функції ϕ вигляду (15), тобто із структурною функцією, що *є квадратичною щодо оператора числа частинок* і містить один параметр деформації. Нами також отримано важливі додаткові необхідні і достатні умови на матриці Φ_α, задіяні в конструкції (1) квазібозонів, котрі зумовлюють існування такого представлення. Їх вдається повністю розв'язати, і в результаті маємо загальний розв'язок (24).

Хоча в ролі складових ми використовували звичайні ферміони, аналіз показує, що параметр деформації (яка забезпечує квазібозонну реалізацію, див. (23)), пов'язаний з дискретною характеристикою m (рангом матриці Φ).

Як наступний крок, цікаво дослідити більш складні ситуації. Перш за все, було б цікаво поширити конструкцію квазібозонів, складених з двох частинок, на випадок складових, які є не ферміонами, а певною (частковою чи загальною) деформацією ферміонів. Деякі результати, вже отримані в цьому напрямку, будуть опубліковані окремо. Іншим напрямком узагальнення є аналіз квазінезалежних квазібозонів, і в цьому випадку потрібно стартувати з коректного визначення "фізичного" підпростору квазібозонних станів.

Додано в коректурі. Отримані вище результати недавно було узагальнено на випадок квазібозонів, утворених з двох q-деформованих ферміонів [23]. На основі результатів даної роботи також встановлено зв'язок між заплутуванням у композитних бозонах (типу ферміон+ферміон), реалізованих деформованими бозонами, та власне параметром деформації [24].

Дані дослідження були частково підтримані Грантом 29.1/028 Державного фонду фундаментальних досліджень України та Спеціальною програмою відділення фізики і астрономії НАН України.

1. W.R. Perkins, Int. J. Th. Phys. **41**, 833 (2002).
2. S.S. Avancini and G. Krein, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 685 (1995).
3. O.W. Greenberg, Phys. Rev. D **43**, 4111 (1991).
4. M. Arik and D.D. Coon, J. Math. Phys. **17**, 524 (1976).
5. L.C. Biedenharn, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 873 (1989); A.J. Macfarlane, J. Phys. A: Gen. **22**, 4581 (1989).
6. K. Odaka, T. Kishi, and S. Kamefuchi, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 591 (1991); S. Chaturvedi, V. Srinivasan, and R. Jagannathan, Mod. Phys. Lett. A **8**, 3727 (1993).
7. A.M. Gavrilik and A.P. Rebesh, Mod. Phys. Lett. A **22**, 949 (2007).
8. A. Chakrabarti and R. Jagannathan, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 711 (1991).
9. A.M. Gavrilik and A.P. Rebesh, Mod. Phys. Let. A **23**, 921 (2008).
10. A. Jannussis, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 233 (1993).
11. S. Meljanac, M. Mileković, and S. Pallua, Phys. Lett. B **328**, 55 (1994).
12. D. Bonatsos and C. Daskaloyannis, Prog. Part. Nucl. Phys. **43**, 537 (1999).
13. A.M. Gavrilik, I.I Kachurik, and A.P. Rebesh, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 245204 (2010) (16pp).
14. V.I. Man'ko *et al.*, Phys. Scripta **55**, 528 (1997).
15. A.M. Gavrilik and A.P. Rebesh, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 095203 (2010) (15pp).

16. L.V. Adamska and A.M. Gavrilik, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 4787 (2004).
17. A.M. Gavrilik, SIGMA **2**, Paper 074 (2006), 12 pages.
18. D. Anchishkin, A. Gavrilik, and N. Iorgov, Eur. Phys. J. A **7**, 229 (2000); A.M. Gavrilik, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **102**, 298 (2001).
19. D. Anchishkin, A. Gavrilik, and N. Iorgov, Mod. Phys. Lett. A **15**, 1637 (2000).
20. C.I. Ribeiro-Silva, E.M.F. Curado, and M.A. Rego-Monteiro, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 145404 (2008).
21. M. Rego-Monteiro, L.M.C.S. Rodrigues, and S. Wulck, Phys. Rev. Lett. **76**, 1098 (1998); Physica A **259**, 245 (1998).
22. G.A. Korn, and T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill Companies, 1967).
23. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, and Yu.A. Mishchenko, "Quasibosons composed of two q-fermions: realization by deformed oscillators", arXiv: 1107.5704.
24. A.M. Gavrilik and Yu.A. Mishchenko, "Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators", arXiv: 1108.0936.

Одержано 04.03.11

КВАЗИБОЗОНЫ, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ ДВУХ ФЕРМИОНОВ, И ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

А.М. Гаврилик, И.И. Качурик, Ю.А. Мищенко

Р е з ю м е

Понятие квазибозонов или составных бозонов имеет широкий спектр физических применений (мезоны, экситоны и т. д.). Однако даже в случае квазибозонов, состоящих из двух обычных фермионов, операторы рождения и уничтожения квазибозонов удовлетворяют нестандартным коммутационным соотношением. Естественно попытаться реализовать квазибозонные операторы операторами рождения и уничтожения деформированных (нелинейных) осцилляторов, так как последние составляют хорошо изученную область современной квантовой физики. В статье показано, что такие деформированные осцилляторы, реализующие квазибозоны, действительно существуют. Выведены необходимые и достаточные условия для реализации. Также доказана единственность семьи возможных деформаций.

TWO-FERMION COMPOSITE QUASI-BOSONS AND DEFORMED OSCILLATORS

A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, Yu.A. Mishchenko

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics,
Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(*14b, Metrolohichna Str., Kyiv 03680, Ukraine;*
e-mail: omgavr@bitp.kiev.ua)

S u m m a r y

The concept of quasi-bosons or composite bosons (like mesons, excitons, *etc.*) has a wide range of potential physical applications. Even composed of two pure fermions, the quasi-boson creation and annihilation operators satisfy non-standard commutation relations. It is natural to try to realize the quasi-boson operators by the operators of a deformed (nonlinear) oscillator, the latter constituting a widely studied field of modern quantum physics. In this paper, it is proven that the deformed oscillators which realize quasi-boson operators in a consistent way really exist. The conditions for such realization are derived, and the uniqueness of the family of deformations under consideration is shown.