П.С. КОСОБУЦЬКИЙ

Національний університет "Львівська політехніка"
(Львів 79012; e-mail: petkosob@gmail.com)

УДК 539

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИХ ДАНИХ ІЗ ОБМЕЖЕНИМ ІНТЕРВАЛОМ РОЗСІЯННЯ ЗНАЧЕНЬ, ПЕРЕТВОРЕНИХ ПРЯМИМИ $g(x) = x^2$; $\cos x$; a^x ТА ОБЕРНЕНИМИ ДО НИХ ФУНКЦІЯМИ

Робота присвячена теоретичному аналізу коректного застосування моделі неперервної нормально розподіленої випадкової величини при обґрунтуванні так званих формул перенесення похибок в задачі статистичного опрацювання експериментальних даних. Звернуто увагу на роль обмеження інтервалу розсіяння значень випадкової величини, підданої нелінійним прямим $g(X)$ перетворенням елементарними функціями X^2; a^X та $\cos X$, і оберненими до них $g^{-1}(X) = \sqrt{X}$, $\arccos X$, $\log_a X$. Досліджено закономірності статистичного усереднення даних, одержаних шляхом розкладу функцій перетворення в ряд Тейлора. Для підтвердження правомірності одержаних результатів використано метод оптимізації квадратичного функціонала.

Ключові слова: нормальний розподіл, математичне сподівання, дисперсія, перенесення похибок, перетворення випадкової змінної елементарними функціями.

1. Вступ

Відомо, що алгоритм опрацювання експериментальних даних обов'язково включає оцінку статистичної похибки Δx відновленої кривої або перенос похибок [1], як пряму задачу теорії похибок. Суть його полягає у тому, що за заданими похибками аргументу, одержують оцінку дисперсії D_X і стандартного відхилення (середньо квадратичне відхилення) σ_X функції перетворення $\varphi(X)$ випадкової змінної (ВЗ) X. Встановлення дисперсії похибок аргументів за заданою дисперсією похибки функції, відноситься до оберненої задачі. Відомо також, що якщо ВЗ X перетворюється функцією $\varphi(X)$, то справджуються наближені співвідношення [2, 3]

$$m_{\varphi(X)} \cong \varphi(m_X), \quad D_{\varphi(X)} \cong \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=m_X} D_X^2. \tag{1}$$

Як випливає із (1), математичне сподівання m_X стійкіше до перетворень, тому більш інформативною оцінкою Δx перетворення функцією $\varphi(X)$ є $\sigma_X = +\sqrt{D_X}$.

Перенос похибок перетворень особливо актуальний для нормально $N_X(m_X, \sigma_X)$ розподіленої ВЗ X із функцією щільності [1]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\left(\frac{x-m_X}{\sqrt{2}\sigma_X}\right)^2}. \tag{2}$$

Це пов'язано з тим, що розподіл (2) граничний, до якого прямують усі решта розподіли, якщо кількість експериментальних вимірювань за однакових умов зростає. Функція (2) нелінійна, має максимум в точці m_X, тому для обчислення m_X, σ_X часто застосовують наближений розклад в степеневий ряд Тейлора в інтервалі, межі якого з достатньою точністю визначаються за правилом "трьох сигм": $m_X \pm 3\sigma_X$.

Алгоритми обчислення похибок наближеними методами переважно складні в практичній реалізації, тому інтерес становлять аналітичні співвідношення, так звані "формули перенесення похибок (ФПП)". Саме такі формули були запропоновані автором [5–7] для елементарних функцій прямих $g(X) = X^2; \cos X; a^X$ і обернених $g^{-1}(X) = \sqrt{X}; \arccos X; \log_a X$ перетворень нормально розподіленої ВЗ X. Незважаючи на те, що стосовно алгоритму обґрунтування ФПП були висловлені критичні зауваження [8, 9], поява робіт [5, 4] свідчить про необхідність знову повернутись до дослідження відповідної статистичної задачі, чому присвячена дана робота. Одержані в роботі висновки, піддані перевірці методом одновимірної оптимізації квадратичного функціонала дисперсії D_X.

2. Основні результати роботи

На рис. 1, приведені гістограми розподілів значень експериментальних значень сталої ґратки a, квадрата її значення a^2 [5], кута елементарної ґратки α, $\cos X$ [6], значень аргументів для функцій e^x та натурального логарифма [7]. Бачимо із рис. 1, що всупереч твердженням [5–7], вибірки експериментальних даних, що використовувались для апробації ФПП, не підпорядковуються нормальному розподілу. На рис. 2, наведені результати одновимірної оптимізації функціонала D_X як функції m_X для прямого $g(X) = X^2$ і оберненого $g^{-1}(X) = \sqrt{X}$ перетворень

$$D(x, \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha)^2 f(x) dx. \quad (3)$$

Результати, що представлені на рис. 1 і рис. 2, систематизовані у вигляді табл. 1 і табл. 2. Із них можна зробити висновок про те, що якщо обчислені методом оптимізації і обчислені за ФПП [5–7], значення m_Y більше-менше узгоджуються між собою, що не протирічить (1), то для середньо квадратичного відхилення спостерігаються розбіжності.

3. Дискусія

В [5–7] для апробації ФПП не використовувались експериментальні дані із нормальним розподілом ймовірностей, що не дозволило при складанні ФПП виявити дискусійність формальної заміни індексів в розв'язках біквадратного рівняння. Тому обґрунтуємо перші два моменти перетворення нормально розподіленої ВЗ X функціями X^2, $\cos X$, $\exp X$ та оберненими до них.

ФПП [5–7], прямі та обернені перетворення застосовувались до одної і тої ж RV X з параметрами m_X, σ_X. Так, в роботі [5] для обчислення середньо квадратичного відхилення ВЗ X із нормальним розподілом, перетворених функцією Y квадратного радикала, використане квадратне рівняння для дисперсії $\sigma_Y^2 = \overline{Y^2} - \overline{Y}^2$. В цьому випадку, із середнього [10]:

$$\overline{X^4} = 3\sigma_X^4 + 6m_X^2\sigma_X^2 + m_X^4, \quad (4)$$

в інтервалі значень $X \in (-\infty \langle X \langle +\infty)$ аргументу X маємо два рівноправні розв'язки:

$$\sigma_X^2 = m_{X^2} \pm \sqrt{m_{X^2}^2 - \frac{1}{2}\sigma_{X^2}^2}. \quad (5)$$

Оскільки за означенням $\sigma_X^2 = m_{X^2} - m_X^2$, то в (5) береться розв'язок із знаком мінус і до нього застосовується схема заміни індексів

$$X^2 \to X, \quad X \to \sqrt{X} \quad (6)$$

в результаті чого отримуються ФПП у вигляді співвідношень (5) в [5]).

Але за умовою задачі, множиною значень нормально розподіленої ВЗ X є необмежений інтервал $X \in (-\infty, +\infty)$ і саме для нього обчислені статистичні середні і дисперсія, тоді як множина значень аргументу функції $g^{-1}(X) = \sqrt{X}$ обмежена напівобмеженим інтервалом $[0 \leqslant X \langle +\infty)$. Тому, алгоритм перетворення (6) некоректний. Дійсно, інтегрування функції $\sqrt{X}$ в області значень

$$[0 \leqslant X,\ m_X,\ \sigma_X \langle +\infty) \quad (7)$$

супроводжується появою спеціальної неаналітичної (табульованої) функції похибок $\mathrm{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ [11, 12]. Тоді, внаслідок обмеження інтервалу значень ВЗ $X \in (0, x)$, стала нормування C_X є рівною $C_X = \frac{2}{\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{m_X}{\sqrt{2}\sigma_X}\right)\right)}$ і статистичні середні будуть дорівнювати:

$$\overline{X} = m_X + \sigma_X \Lambda, \quad \overline{X^2} = m_X^2 + \sigma_X^2 + \sigma_X m_X \Lambda,$$
$$\Lambda = \frac{\sqrt{2/\pi}}{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{m_X}{\sqrt{2}\sigma_X}\right)} e^{-m_X^2/2\sigma_X^2}. \quad (8)$$

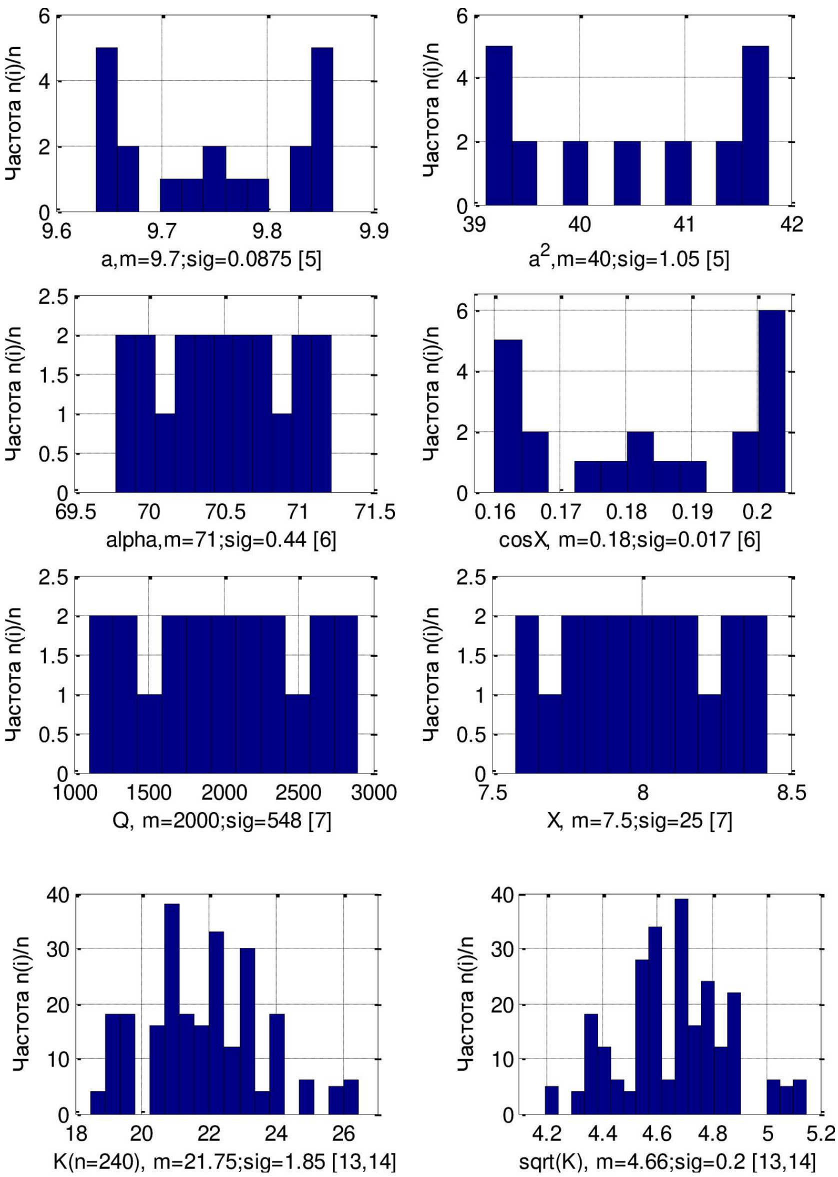


Рис. 1. Гістограми розподілів значень експериментальних даних a, a^2 сталої ґратки [5], кута елементарної ґратки $\alpha, \cos X$ [6], та значень аргументів для функцій e^x і натурального логарифма [7]

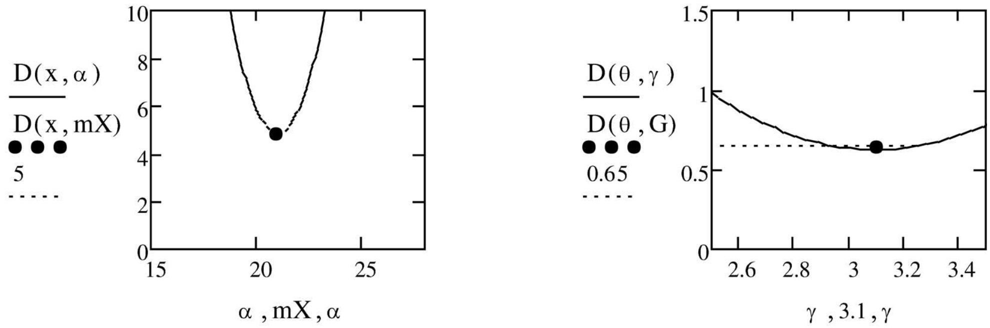
Таблиця 1. **Обчислені оптимізацією дисперсії та за ФПП [5] значення m_Y, σ_Y функцій Y перетворень ВВ X**

Y	X	X^2	X^2 [5]	$\sqrt{X}$	$\sqrt{X}$ [5]
m_Y	21	445	446	4,65	4,58
σ_Y	2,24	89,5	94,2	0,285	0,06

Таким чином, дисперсія ВЗ $X \in (0, x)$ при даному перетворенні буде дорівнювати:

$$D_X = \sigma_X^2 + \left(m_X - \overline{X}\right)^2 + \sigma_X(2(m_X - \overline{X}) - m_X)\Lambda. \quad (9)$$

Отже, в обмеженому інтервалі (7), статистичне середнє $\overline{X^4} \neq 3\sigma_X^4 + 6m_X^2\sigma_X^2 + m_X^4$ і задача (4)–(5) з



a *b*

Рис. 2. Ілюстрація визначення середнього і дисперсії функцій перетворень $g(X) = X$ (*a*) та $g^{-1}(X) = \sqrt{X}$ (*b*) методом оптимізації функціонала (3)

Таблиця 2. **Визначені із рис. 2 та обчислені із ФПП [5–7] значення** $\frac{\sigma_Y}{m_Y}$

Y	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\cos\left(X\frac{\pi}{180}\right)$	$\alpha\cos\left(X\frac{\pi}{180}\right)$	$e^{X/5}$	$\ln(X/5)$
m_Y	22	474	4,65 4,68 (7) [5]	0,93	1,18 1,183	83	1,466 1,535 (13) [7]
σ_Y	1,9	86,5	0,2 0,245 (7) [5]	0,013	0,042 0,001 (11) [6]	33,3	0,0868 0,0037 (13) [7]
$V = \frac{\sigma_Y}{m_Y}$	0,086	0,18	0,043 0,05	0,014	0,036 0,001	0,4	0,06 0,0024

подальшою заміною індексів (6), точного аналітичного розв'язку не має.

В принципі, параметри $m_{\sqrt{X}}, \sigma_{\sqrt{X}}$ можна обчислити, використовуючи табличні інтеграли (2.3.15(6)) [13, 14]. Але їх застосування вимагає інші спеціальні циліндричні функції. Тому наведемо ще статистичне обґрунтування формули для обчислення середньоквадратичного відхилення для перетворення $\sqrt{X}$, для чого приймемо до уваги рівність $\overline{(\sqrt{X})^2} = \overline{X}$:

$$D_{\sqrt{X}} = \overline{(\sqrt{X})^2} - (\overline{\sqrt{X}})^2 = m_X + \Lambda\sigma_X - (\overline{\sqrt{X}})^2. \quad (10)$$

Згідно з розкладом (3), для нормального розподілу справджується наближення $\overline{\sqrt{X}} \cong \sqrt{m_X} - \frac{1}{4}\frac{\sigma X^2}{m X^{3/2}}$, тому

$$\sigma_{\sqrt{X}} = m_X + \Lambda\sigma_X - \left(\sqrt{m_X} - \frac{1}{4}\frac{\sigma_X^2}{m_X^{3/2}}\right)^2. \quad (11)$$

Для параметрів ВЗ X $m_X \cong 21$ та $\sigma_X \cong 1{,}85$, середньоквадратичне відхилення $\sigma_{\sqrt{X}} \cong 0{,}77$, тоді як визначене із гістограми на рис. 1, $\sigma_{\sqrt{X}} \cong 0{,}2$. Значення $\sigma_{\sqrt{X}} \cong 0{,}2$ граничне, до якого прямує середньоквадратичне відхилення $\sigma_{\sqrt{X}}$ (6) при $m_X \to \to \infty$, оскільки за законом великих чисел, середнє арифметичне сходиться за ймовірністю до свого математичного сподівання.

Обмеження на множину значень аргументу стосуються також функції натурального логарифма $\ln X$ та $a\cos X$-перетворення. Крім цього, у випадку степеневого перетворення e^X, при обчисленні середніх $\overline{\exp X}$ і $\overline{(\exp X)^2}$, в [7] у формулі (13) на с. 737, була допущена некоректність:

$$1 + \frac{\sigma_X^2}{m_X^2} m_{\ln X} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_X^4}{\sigma_X^2 + m_X^2}\right). \quad (12)$$

Суть її полягає в тому, що середнє $\overline{\exp X}$ для нормально розподіленої ВЗ X не дорівнює інтегралу

$$\overline{\exp X} \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_0^{+\infty} e^x e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx. \quad (13)$$

В представленні (13), підінтегральний вираз складається добутку двох степеневих функцій, в одній з яких степінь не виражена у відносних одиницях, як це має місце для експоненти Гауса. Тому для забезпечення коректності обчислень, нормально розподілену ВЗ X, треба виразити у відносних одиницях:

$$X \to \frac{X}{\sigma_X}, \tag{14}$$

де прийнято до уваги, що $\sigma_X \neq 0$. Тоді статистичні середні $\overline{\exp X}$ і $\overline{(\exp X)^2}$ в інтервалі $[0 \leqslant X\langle +\infty)$ будуть дорівнювати:

$$\overline{\exp\left(\frac{X}{\sigma_X}\right)} = \frac{C_X}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{x}{\sigma_X}}\, e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}\, dx =$$

$$= \frac{C_X}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{m_X+\sigma_X}{\sqrt{2}\sigma_X}\right)\right)\exp\left(\frac{m_X}{\sigma_X} + \frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

$$\overline{\left[\exp\left(\frac{X}{\sigma_X}\right)\right]^2} = \frac{C_X}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{2x}{\sigma_X}}\, e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}\, dx =$$

$$= \frac{C_X}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{m_X+2\sigma_X}{\sqrt{2}\sigma_X}\right)\right)\exp\left[2\left(\frac{m_X}{\sigma_X} + 1\right)\right]. \tag{16}$$

Крім цього зауважимо, що одночасне застосування функцій $\cos X$ і $a\cos X$ перетворень ВЗ X, також вимагає представлення аргументу X у відносних одиницях, наприклад, у вигляді $X \to \frac{X}{\max(X)}$ враховуючи, що область зміни аргументу функції $[-1, +1]$. У відповідності до стандарту для нормально розподілених ВЗ X, в даному випадку можна обмежитись наближенням $\max(X) \cong m_X + 3\sigma_X$.

Аналогічний підхід справджується у випадку перетворення тригонометричними функціями нормально розподіленої випадкової змінної. Однак, при цьому треба врахувати, що функція $Y = \cos X$ при $0 \leqslant X \leqslant \pi$ взаємно обернена функції $Y = a\cos X$ в тому розумінні, в якому взаємно обернені степенева і логарифмічна при $X\rangle 0$ та функції піднесення в квадрат і взяття квадратного кореня при $X \geqslant 0$. Тоді в інтервалі $[0;\pi]$, перетворення $a\cos$ за числовим значенням дорівнює куту, косинус якого дорівнює X, то із визначення функцій $\cos X$ і $a\cos X$ випливає, що $\cos(a\cos X) = X$ при $X \leqslant 1$ та $a\cos(\cos X) = X$ при $0 \leqslant X \leqslant \pi$.

4. Висновки

Дана робота є продовженням раніше виконаних автором досліджень [8, 9], в якій додатково загострена увага на проблемах, якими супроводжується некоректне застосування моделей теорії ймовірностей та математичної статистики із обмеженим інтервалом розсіяння значень для статистичного аналізу експериментальних даних в фізичних системах з флуктуаціями. Інші проблеми, які виникають при цьому, детально описані в роботі [15].

1. Д. Худсон. *Статистика для физиков* (Мир, 1970).
2. З. Павловський. *Введение в математическую статистику* (Статистика, 1967).
3. И.М. Кодолов, С.Т. Худяков. *Теоретические основы вероятностных методов в инженерно-экономических задачах. Функциональные преобразования случайных величин и случайные функции* (МАДИ, 1985).
4. В.І. Романенко, Н.В. Корніловська. Про точність розрахунку перенесення похибок за аналітичними формулами для оберненого перетворення. *УФЖ* **64**, 215 (2019).
5. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій x^2 та $\sqrt{x}$. *УФЖ* **62**, 184 (2017).
6. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій $\cos(x)$ та $\arccos(x)$. *УФЖ* **61**, 355 (2016).
7. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій a^x та $\log_a x$. *УФЖ* **65**, 369 (2019).
8. П.С. Кособуцький. Стосовно моделювання математичного сподівання і дисперсії вибірок гаусово розподілених величин. *УФЖ* **62**, 823 (2017).
9. П.С. Кособуцький. Аналітичні співвідношшня обчислення математичного сподівання і середньої квадратичної похибки стандартно розподіленої випадкової величини, підданої перетворенню $\sqrt{X}$. *УФЖ* **63**, 215 (2018).
10. І.І. Горбань. *Теорія ймовірностей і математична статитсика для наукових працівників і інженерів* (НАН України, ІППММіС, 2003).
11. E. Ng, M. Geller. A table of integrals of the error functions. *J. Research of the National Bureau of Standerds-B. Math. Sci. B* **73** (1), 1 (1969).
12. From Web Resource: Table of Integrals. 2014 From http://integral-table.com
13. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (Наука, 1981).
14. From Web Resource: http://mathworld.wolfram.com /GaussianIntegral.html
15. T. Lang. Twently errors even you can find in biomedical research articles. *Croatian Medical J.* **45** (4), 361 (2004).

Одержано 28.10.19

P. Kosobutskyy

STATISTICAL ANALYSIS
OF NORMALLY DISTRIBUTED DATA
WITH A LIMITED SCATTERING INTERVAL
OF VALUES CONVERTED BY DIRECT
$g(x) = x^2$; $\cos x$; a^x AND INVERSE FUNCTIONS

The work is devoted to the theoretical analysis of the correct application of the model of a continuous normally distributed random variable in the substantiation of the so-called error transfer formulas in the problem of a statistical processing of experimental data. Attention is paid to the role of limiting the scattering interval of values of a random variable subjected to nonlinear direct $g(X)$ transformation by elementary functions X^2; a^X and $\cos X$, as well as the inverse $g^{-1}(X) = \sqrt{X}$, $\arccos X$, $\log_a X$ to them. The regularities of the statistical averaging of the data obtained by the disorder of the Taylor transform functions are studied. To confirm the validity of the obtained results, the method of quadratic functional optimization is used.

K e y w o r d s: normal distribution, mathematical expectation, variance, random variables, calculation and transfer of errors, transformation of a random variable with elementary functions.