І.В. ПИЛЮК, М.П. КОЗЛОВСЬКИЙ

Інститут фізики конденсованих систем НАН України

(Вул. Свєнціцького, 1, Львів 79011; e-mail: piv@icmp.lviv.ua)

УДК 538.9, 537.611.2

КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ТА СПРИЙНЯТЛИВІСТЬ ІЗИНГОВОГО МАГНЕТИКА В ОКОЛІ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДУ

Застосування методу колективних змінних до вивчення поведінки неуніверсальних характеристик тривимірної ізингоподібної системи в критичній області проілюстровано на прикладі кореляційної функції та сприйнятливості. Аналітичну процедуру для розрахунку кореляційної функції та сприйнятливості системи розвинуто в наближенні четвірного розподілу флуктуацій параметра порядку. Показано, що асимптотика кореляційної функції на великих відстанях при критичній температурі ($T = T_c$) якісно відрізняється від випадку $T \neq T_c$ внаслідок наявності ділянки критичного режиму для всіх мод флуктуацій.

Ключові слова: тривимірна ізингоподібна система, точка фазового переходу, негаусовий розподіл, кореляційна функція, сприйнятливість.

1. Вступ

Стаття присвячена розрахунку деяких структурних характеристик тривимірної ізингоподібної системи в околі точки фазового переходу. Математичний опис здійснюється в методі колективних змінних (КЗ) [1–3] з використанням негаусового розподілу флуктуацій параметра порядку. Розрахунки виконано як без врахування поправки на усереднення фур'є-образу потенціалу взаємодії $\tilde{\Phi}(k)$, так і з її врахуванням (тобто з прийняттям до уваги залежності фур'є-образу потенціалу від хвильового вектора).

Врахування залежності $\tilde{\Phi}(k)$ від хвильового вектора при розрахунку статистичної суми системи суттєво впливає на поведінку парної кореляційної функції G. Відомо (див., наприклад, [4]), що при критичній температурі $T = T_c$ ця функція на великих відстанях r характеризується критичним показником η, $G \sim r^{-(d-2+\eta)}$, де d – вимірність простору. Замінюючи в кожному із шарів фазового простору КЗ величину $\tilde{\Phi}(k)$ її середнім значенням, отримуємо $\eta = 0$. Врахування поправки на залежність фур'є-образу потенціалу від хвильового вектора приводить до відмінного від нуля значення η. Змінюються також вирази для парної кореляційної функції та сприйнятливості як при $T = T_c$, так і при відмінних від T_c температурах.

Фур'є-образ кореляційної функції $G(T,k)$ в границі $k \to 0$ зв'язаний із сприйнятливістю системи χ співвідношенням $\lim_{k\to 0} G(T,k) = \beta\chi$. Тут $\beta = 1/(kT)$ – обернена температура.

Вирази для кореляційної функції та сприйнятливості системи одержано для випадків температур $T > T_c$, $T < T_c$ та $T = T_c$. Дана стаття логічно доповнює попередні дослідження [5, 6], де розроблено методику для визначення малого критичного показника кореляційної функції η і знайдено його значення. В результаті такого доповнення створюється цілісна картина досліджень. Вони набувають більш повного характеру (розвинуто спосіб розрахунку не тільки показника кореляційної функції, а й самої функції).

2. Кореляційна функція та сприйнятливість системи вище та нижче від T_c

Обчислення парної кореляційної функції поблизу точки фазового переходу другого роду передбачає дослідження її залежності від відстані між частинками, коли остання прямує до безмежності. В методі КЗ зручно працювати з фур'є-образом кореляційної функції $G(T,k)$, пов'язаним із статистичною сумою системи співвідношенням

$$G(T,k) = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial d(k)}. \quad (1)$$

Надалі будемо користуватися виразом для статистичної суми в наближенні четвірної густини міри (моделі ρ^4)

$$Z = C\int \exp\Biggl\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} d(k)\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} - \\ -\frac{1}{4!}\frac{a_4}{N}\sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_4}\rho_{\mathbf{k}_1}\ldots\rho_{\mathbf{k}_4}\delta_{\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_4}\Biggr\}(d\rho)^N, \quad (2)$$

який приведений в [1, 3, 5].

Розрахунок кореляційних функцій поблизу точки фазового переходу є предметом багатьох досліджень [1, 7, 8]. Зазвичай, вони виконуються з використанням гаусової міри як базисної у техніці функцій Гріна та з допомогою інших методів [9–12]. Особливість описаного нижче підходу до обчислення кореляційних функцій полягає у використанні негаусового розподілу флуктуацій як базисного. Поведінка $G(T,k)$ при $k \to 0$, що відповідає великим відстаням, найважливіша при дослідженні критичних властивостей системи. У випадку $T > T_c$ для обчислення $G(T,k)$ зручно представляти статистичну суму у вигляді

$$Z = Z_0 Z_{CR} Z_{TR} Z'. \quad (3)$$

Тут Z_0 – статистична сума системи невзаємодіючих спінів, Z_{CR} відповідає внеску негаусових флуктуацій. Множники Z_{TR} і Z' описують довгохвильові флуктуації, причому гранично великим відстаням ($k \to 0$) відповідає складова Z', вираз для якої приведений в [5]. Отже, при розрахунку фур'є-образу парної кореляційної функції (1) для великих відстаней $r \to \infty$ зручно скористатись формулою

$$G(T,k)\big|_{k\to 0} = -\frac{1}{Z'}\frac{\partial Z'}{\partial \tilde{d}_{p_\tau+1}(k)}, \quad (4)$$

в якій функціональна похідна за $\tilde{d}_{p_\tau+1}(k)$ відноситься до довгохвильової частини статистичної суми (3). Позначення $p_\tau = m_\tau + m'' + 1$ (див. [3]) введено для скорочення запису.

Запишемо вираз для фур'є-образу парної кореляційної функції й сприйнятливості системи при використанні четвірного базисного розподілу флуктуацій. На першому етапі обчислень будемо нехтувати поправкою на усереднення фур'є-образу потенціалу взаємодії, вважаючи $\Delta\tilde{\Phi}(k) = 0$ (див. [5]). Тоді величина $\alpha^{(0)}$ (формула (45) із [5]), через яку визначається критичний показник кореляційної функції η, перетворюється на нуль. Це веде до умови $\eta = 0$. При $T > T_c$ вираз (4) набуває вигляду

$$G(T,k) = \left[\tilde{d}_{p_\tau+1}(k)\right]^{-1}, \quad (5)$$

де величина $\tilde{d}_{p_\tau+1}(k)$ визначена в [3,5]. Використовуючи явний вираз для $\tilde{d}_{p_\tau+1}(k)$ як функцію температури і хвильового вектора, отримуємо ($k \to 0$)

$$G(T,k) = \frac{1}{D\tau^{2\nu} + D_1 k^2}. \quad (6)$$

Тут ν – критичний показник кореляційної довжини,

$$D = \left(\frac{c_{1k}}{f_0}\right)^{2\nu} s^{-2m''}\beta\tilde{\Phi}(0)g_0[1 + (g_1 - 2\nu m_2)\tau^{\Delta}], \\ D_1 = 2\beta\tilde{\Phi}(0)b^2. \quad (7)$$

Через b позначено радіус дії експоненційно спадного потенціалу взаємодії, s – параметр поділу фазового простору КЗ на шари, а $\tau = (T - T_c)/T_c$ – відносна температура. Інші величини із (7), зокрема $m_2 = -c_{2k}(c_{1k}/f_0)^{\Delta}\Phi_0$, означені в [3]. Зобразимо (6) у вигляді

$$G(T,k) = \frac{D_1^{-1}}{\varkappa_+^2 + k^2} \quad (8)$$

і ототожнимо величину $\varkappa_+$ з оберненим кореляційним радіусом ξ_+. Для останнього знаходимо вираз

$$\xi_+ = \xi_+^{(0)}\tau^{-\nu}(1 + a_\xi^+\tau^{\Delta}). \quad (9)$$

Тут величина

$$\xi_+^{(0)} = \left(\frac{f_0}{c_{1k}}\right)^{\nu} b s^{m''}\left(\frac{2}{g_0}\right)^{1/2} \quad (10)$$

– основна критична амплітуда, а

$$a_\xi^+ = \nu m_2 - \frac{g_1}{2} \quad (11)$$

– амплітуда кореляційної довжини, яка визначає поправку до скейлінгу (конфлуентну поправку). Показник поправки до скейлінгу Δ залежить від власних значень матриці лінійного перетворення ренормгрупи [3]. Сприйнятливість системи при $T > T_c$ може бути одержана із співвідношення

$$\chi_+ = kT\lim_{k\to 0} G(T,k) \quad (12)$$

і наведена у вигляді

$$\chi_+ = \chi_+^{(0)} \tau^{-2\nu}(1 + a_\chi^+ \tau^\Delta), \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned} \chi_+^{(0)} &= kT \left(\frac{f_0}{c_{1k}}\right)^{2\nu} \frac{s^{2m''}}{\beta\tilde{\Phi}(0) g_0}, \\ a_\chi^+ &= 2\nu m_2 - g_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Зазначимо, що наша оцінка

$$a_\xi^+ / a_\chi^+ = 0{,}5 \tag{15}$$

для відношення амплітуд конфлуентних поправок кореляційного радіуса a_ξ^+ і сприйнятливості a_χ^+ узгоджується з даними інших авторів. Так, наприклад, в рамках польової теорії при $d = 3$ отримано $a_\xi^+/a_\chi^+ = 0{,}65 \pm 0{,}05$ [13]. Використання високотемпературного розкладу приводить до результату $0{,}70 \pm 0{,}03$ [14], а метод ϵ-розкладу (до другого порядку за ϵ) залежно від апроксимант Паде дає значення в інтервалі 0,43–0,71 [13, 15].

Розглянемо випадок, коли температура системи менша за критичну. Тоді статистичну суму моделі запишемо у вигляді

$$Z = Z_0 Z_{CR} 2^{(N_{\mu_\tau+1}-1)/2} [Q(P_{\mu_\tau})]^{N_{\mu_\tau+1}} Z_{\mu_\tau+1}. \tag{16}$$

Для розрахунку фур'є-образу кореляційної функції $G'(T,k)$ важливо знати $Z_{\mu_\tau+1}$, оскільки

$$G'(T,k)\big|_{k\to 0} = -\frac{1}{Z_{\mu_\tau+1}} \frac{\partial Z_{\mu_\tau+1}}{\partial \bar{d}_{\mu_\tau+1}(k)}. \tag{17}$$

Вираз для $Z_{\mu_\tau+1}$ приведений в [3]. Використовуючи (17), знаходимо

$$G'(T,k) = \left[\bar{d}_{\mu_\tau+1}(k)\right]^{-1}. \tag{18}$$

Скориставшись результатом розрахунку $\bar{d}_{\mu_\tau+1}(k)$ (див. [3]), отримуємо

$$G'(T,k) = \frac{1}{D'|\tau|^{2\nu} + D_1 k^2}, \tag{19}$$

де

$$\begin{aligned} D' &= 4f_0 \left(\frac{c_{1k}}{f_0}\right)^{2\nu} \beta\tilde{\Phi}(0) \left[1 - c_{2k}\left(\frac{c_{1k}}{f_0}\right)^{\Delta} 2\nu\Phi_0 |\tau|^\Delta\right], \\ D_1 &= 2\beta\tilde{\Phi}(0) b^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Приймаючи до уваги наведений вище вираз для $G'(T,k)$, знаходимо кореляційний радіус при $T < T_\mathrm{c}$:

$$\xi_- = \xi_-^{(0)} |\tau|^{-\nu} (1 + a_\xi^- |\tau|^\Delta). \tag{21}$$

Тут ν і Δ ті самі, що і в (9),

$$\begin{aligned} \xi_-^{(0)} &= b\left(\frac{f_0}{c_{1k}}\right)^{\nu} (2f_0)^{-1/2}, \\ a_\xi^- &= c_{2k}\left(\frac{c_{1k}}{f_0}\right)^{\Delta} \nu\Phi_0. \end{aligned} \tag{22}$$

Для сприйнятливості системи при $T < T_\mathrm{c}$ запишемо

$$\chi_- = \chi_-^{(0)} |\tau|^{-2\nu} (1 + a_\chi^- |\tau|^\Delta), \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned} \chi_-^{(0)} &= kT\left(\frac{f_0}{c_{1k}}\right)^{2\nu} \frac{1}{\beta\tilde{\Phi}(0)} (4f_0)^{-1}, \\ a_\chi^- &= 2c_{2k}\left(\frac{c_{1k}}{f_0}\right)^{\Delta} \nu\Phi_0. \end{aligned} \tag{24}$$

Як і у випадку $T > T_\mathrm{c}$, приходимо до співвідношення

$$a_\xi^- / a_\chi^- = 0{,}5. \tag{25}$$

Критичні амплітуди $\xi_\pm^{(0)}$, $\chi_\pm^{(0)}$, а також $a_\xi^\pm$, $a_\chi^\pm$, на відміну від критичних показників ν і Δ, залежать від мікроскопічних параметрів гамільтоніана. Ця залежність зумовлена множниками c_{1k} і c_{2k}, вирази для яких приведені в [3]. Однак, відношення критичних амплітуд вище і нижче від T_c є універсальними величинами. Крім рівностей (15) і (25), маємо

$$\xi_+^{(0)}/\xi_-^{(0)} = 2s^{m''}\left(\frac{f_0}{g_0}\right)^{1/2}, \tag{26}$$

а також

$$\chi_+^{(0)}/\chi_-^{(0)} = 4s^{2m''}\frac{f_0}{g_0}. \tag{27}$$

Слід зазначити, що універсальними є також відношення [16–20]

$$\frac{a_\xi^+}{a_\xi^-}, \quad \frac{a_\chi^+}{a_\chi^-}, \quad \frac{a_\xi^+}{a_c^+}, \quad \frac{a_\xi^-}{a_c^-} \tag{28}$$

і ціла низка інших комбінацій критичних амплітуд. Універсальність відношень амплітуд конфлуентних поправок типу (28) в методі КЗ забезпечується скороченням неуніверсального множника $c_{2k}(c_{1k}/f_0)^{\Delta}$.

Приведені вище співвідношення одержані в наближенні $\eta = 0$. Врахування залежності фур'є-образу потенціалу $\tilde{\Phi}(k)$ від хвильового вектора при інтегруванні статистичної суми за КЗ дає змогу виконати аналогічні обчислення при $\eta \neq 0$. В цьому випадку вирази (5), (18) залишаються без змін. Іншими стають величини $d_n(k)$. Нехтуючи конфлуентною поправкою, у випадку $T > T_c$ знаходимо ($k \to 0$)

$$\tilde{G}(T,k) = \frac{1}{\tilde{D}\tau^{\tilde{\gamma}} + \tilde{D}_1 k^2}, \tag{29}$$

де $\tilde{\gamma} = (2-\eta)\tilde{\nu}$, а

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \left(\frac{\tilde{c}_{1k}}{\tilde{f}}\right)^{\tilde{\gamma}} \beta\tilde{\Phi}(0)s^{-2m''}\tilde{g}_0, \\ \tilde{D}_1 &= 2\beta\tilde{\Phi}(0)b^2\left(\frac{\tilde{c}_{1k}}{\tilde{f}}\right)^{-\eta\tilde{\nu}}\tau^{-\eta\tilde{\nu}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Показник $\tilde{\nu}$ та інші величини із (30) означені в [3, 5]. Кореляційний радіус $\tilde{\xi}_+$, отриманий з врахуванням поправки на усереднення потенціалу, набуває вигляду

$$\tilde{\xi}_+ = \tilde{\xi}_+^{(0)}\tau^{-\tilde{\nu}}. \tag{31}$$

Критична амплітуда $\tilde{\xi}_+^{(0)}$ визначається рівністю

$$\tilde{\xi}_+^{(0)} = \left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{c}_{1k}}\right)^{\tilde{\nu}} bs^{m''}\left(\frac{2}{\tilde{g}_0}\right)^{1/2}. \tag{32}$$

Сприйнятливість системи, розраховану із виразу (29) в границі $k \to 0$, можна представити у вигляді

$$\tilde{\chi}_+ = \tilde{\chi}_+^{(0)}\tau^{-\tilde{\gamma}}. \tag{33}$$

Тут критична амплітуда

$$\tilde{\chi}_+^{(0)} = 2kT\tilde{\gamma}_4^+ \tag{34}$$

характеризується коефіцієнтом

$$\tilde{\gamma}_4^+ = \left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{c}_{1k}}\right)^{\tilde{\gamma}} \frac{s^{2m''}}{2\beta\tilde{\Phi}(0)\tilde{g}_0}. \tag{35}$$

Вирази (32) і (34) переходять у відповідні співвідношення із (10) і (14), якщо поправку, пов'язану з врахуванням залежності фур'є-образу потенціалу від хвильового вектора, спрямувати до нуля.

У випадку $T < T_c$ і $\eta \neq 0$ фур'є-образ кореляційної функції задається формулою

$$\tilde{G}'(T,k) = \frac{1}{\tilde{D}'|\tau|^{\tilde{\gamma}} + \tilde{D}_1 k^2}, \tag{36}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{D}' &= 4\tilde{f}\left(\frac{\tilde{c}_{1k}}{\tilde{f}}\right)^{\tilde{\gamma}}\beta\tilde{\Phi}(0), \\ \tilde{D}_1 &= 2\beta\tilde{\Phi}(0)b^2\left(\frac{\tilde{c}_{1k}}{\tilde{f}}\right)^{-\eta\tilde{\nu}}|\tau|^{-\eta\tilde{\nu}}. \end{aligned} \tag{37}$$

Виходячи із (36), для кореляційного радіуса $\tilde{\xi}_-$ та сприйнятливості $\tilde{\chi}_-$ одержуємо

$$\tilde{\xi}_- = \tilde{\xi}_-^{(0)}|\tau|^{-\tilde{\nu}}, \quad \tilde{\chi}_- = \tilde{\chi}_-^{(0)}|\tau|^{-\tilde{\gamma}}. \tag{38}$$

Вирази для основних критичних амплітуд $\tilde{\xi}_-^{(0)}$ і $\tilde{\chi}_-^{(0)}$ аналогічні приведеним у (22) та (24) співвідношенням для $\xi_-^{(0)}$ і $\chi_-^{(0)}$, де замість f_0, c_{1k} і ν слід підставити перенормовані внаслідок $\Delta\tilde{\Phi}(k) \neq 0$ величини $\tilde{f}$, $\tilde{c}_{1k}$ і $\tilde{\nu}$.

Зауважимо, що формули для сприйнятливостей χ_+ (13) (випадок $T > T_c$ з врахуванням конфлуентної поправки) та $\tilde{\chi}_+$ (33) (випадок $T > T_c$ з врахуванням поправки на усереднення фур'є-образу потенціалу взаємодії), які отримані за допомогою фур'є-образу кореляційної функції системи, співпадають з точністю до множника $(kT)^2/\mu_B^2$ (μ_B – магнетон Бора) із відповідними виразами для сприйнятливостей, знайденими раніше на основі вільної енергії системи (див. [21] та [5]). Вказані сприйнятливості мають різні розмірності. Так, сприйнятливості χ_+ та $\tilde{\chi}_+$ одержано в одиницях kT (або $\tilde{\Phi}(0)$), а сприйнятливості, визначені на основі вільної енергії, розраховано в одиницях $\mu_B^2/\tilde{\Phi}(0)$. Тут $\tilde{\Phi}(0)$ – фур'є-образ потенціалу взаємодії при нульовому значенні хвильового вектора.

3. Парна кореляційна функція при $T = T_c$

У проведених обчисленнях для кореляційної функції вище і нижче від T_c суттєвим чином використовувалась наявність в системі ділянки граничного гаусового режиму (при $T > T_c$) або інверсного гаусового режиму (при $T < T_c$). Кожний з них характеризується гаусовою базисною мірою. Особливістю цієї міри є неаналітична залежність дисперсії від температури.

У випадку $T = T_c$ в системі існують сильні кореляції між спінами на як завгодно великих відстанях. При цьому ділянки гаусового режиму не виникає. При $T = T_c$ область критичного режиму, що характеризується наявністю ренормгрупової симетрії, має місце для всіх мод флуктуацій, включаючи $k = 0$. Тому тут незастосовний вираз (4) для обчислення $G(T_c, k)$.

Статистичну суму системи ізингових спінів при $T = T_c$ представимо у вигляді

$$Z = Z_0 Z_{CR}. \tag{39}$$

Тут

$$Z_{CR} = \prod_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}_n, \tag{40}$$

а вираз для $\tilde{Q}_n$ приведений в [3, 5]. Обчислення фур'є-образу кореляційної функції виконуватимемо для кожної окремої блочної структури n. Позначимо через G_n середнє значення кореляційної функції для n-ї блочної структури. Введемо замість $G(k) = \langle \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rangle$ величину

$$G_n = \frac{1}{N_n - N_{n+1}} \sum_{B_{n+1} < k \leq B_n} \langle \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rangle, \tag{41}$$

де символ $\langle ... \rangle$ відповідає усередненню за взаємодіючою системою негаусового типу. Величину G_n обчислюватимемо, використовуючи співвідношення

$$G_n = \frac{\beta}{N_n - N_{n+1}} \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{d}_n(B_{n+1}, B_n)}. \tag{42}$$

Вільна енергія системи F_c має вигляд [22]

$$F_c = -kT_c \sum_{n=0}^{\infty} \Big[N_n \ln \tilde{Q}(d_n) + N_{n+1} \ln Q(P_n) \Big]. \tag{43}$$

Особливістю приведених вище виразів для G_n і F_c є специфічна поведінка величин $\tilde{d}_n(B_{n+1}, B_n)$ і $\tilde{a}_4^{(n)}$ як функцій номера блочної структури n (див. [5, 22]). В загальному випадку величини α_n, $\tilde{r}_n$ і $\tilde{u}_n$, через які виражаються $\tilde{d}_n(B_{n+1}, B_n)$ і $\tilde{a}_4^{(n)}$, залежать від номера n. Тільки при $T = T_c$ величина α_n не залежить від n. Використовуючи для $\tilde{r}_n$ і $\tilde{u}_n$ розв'язки рівнянь ренормгрупи при $T = T_c$, отримуємо

$$\begin{aligned} &\tilde{d}_n(B_{n+1}, B_n) = s^{-n(2-\eta)} (\tilde{r} + q + \tilde{c}_2 \tilde{R} \tilde{E}_2^n), \\ &\tilde{a}_4^{(n)} = s^{-2n(2-\eta)} (\tilde{u} + \tilde{c}_2 \tilde{E}_2^n). \end{aligned} \tag{44}$$

Тут $\tilde{r}$ і $\tilde{u}$ – координати фіксованої точки [5], $q = \bar{q} \beta \tilde{\Phi}(0)$ ($\bar{q}$ відповідає середньому значенню k^2 в інтервалі $(1/s, 1]$), $\tilde{R} = \tilde{R}_{12}/(\tilde{E}_2 - \tilde{R}_{11})$, $\tilde{c}_2 = \tilde{c}_{2k} (\beta_c \tilde{\Phi}(0))^2$, $\tilde{R}_{ij}$ і $\tilde{E}_2$ – елементи і одне із власних значень матриці лінійного перетворення ренормгрупи. Запишемо вираз для величини $x_n = \sqrt{3} \tilde{d}_n(B_{n+1}, B_n) (\tilde{a}_4^{(n)})^{-1/2}$ при великих значеннях n. Відповідно до (44) (з врахуванням $\tilde{E}_2 < 1$) маємо

$$x_n = \tilde{x} \left[1 + \left(\frac{\tilde{c}_2 \tilde{R}}{\tilde{r} + q} + \frac{\tilde{c}_2}{2\tilde{u}} \right) \tilde{E}_2^n \right], \tag{45}$$

де $\tilde{x} = \sqrt{3} (\tilde{r} + q)(\tilde{u})^{-1/2}$. Величину $\tilde{E}_2^n$ можна представити у вигляді

$$\tilde{E}_2^n = s^{-n\tilde{\omega}}, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\Delta}/\tilde{\nu}.$$

Показник $\tilde{\nu} = \ln s / \ln \tilde{E}_1$ визначається більшим власним значенням матриці ренормгрупового перетворення ($\tilde{E}_1 > 1$). Він характеризує поведінку кореляційної довжини. Показник $\tilde{\Delta} = -\ln \tilde{E}_2 / \ln \tilde{E}_1$ характеризує поправку до скейлінгу. Таким чином, нехтування пропорційним до $\tilde{E}_2^n$ доданком у виразі (45) означає те, що поправка до скейлінгу не приймається до уваги.

Розглянемо деяку блочну структуру з номером n_0. Згідно з (42) вираз для G_n при $n = n_0$ шукатимемо із співвідношення

$$\begin{aligned} G_{n_0} = \frac{\beta}{N_{n_0} - N_{n_0+1}} \Bigg[&\frac{\partial F_c}{\partial \tilde{d}_{n_0}(B_{n_0+1, B_{n_0}})} + \\ &+ \left(\frac{\partial F_c}{\partial x_{n_0}} + \frac{\partial F_c}{\partial y_{n_0}} \frac{d y_{n_0}}{d x_{n_0}} \right) \frac{\partial x_{n_0}}{\partial \tilde{d}_{n_0}(B_{n_0+1}, B_{n_0})} \Bigg], \end{aligned} \tag{46}$$

враховуючи формули для $\tilde{Q}(d_n)$ і $Q(P_n)$ (див. [3, 22]). Основна проблема при обчисленні G_{n_0} пов'язана з тим, що похідні в (46) відносяться не тільки до величин з індексами n_0, а й до всіх наступних з індексами $n_0 + 1$, $n_0 + 2$, ...

Для похідної із першого доданка правої частини (46) можна записати

$$\frac{\partial F_c}{\partial \tilde{d}_{n_0}} = kT_c \frac{1 - s^{-3}}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} N_n \frac{\partial \ln \tilde{d}_n(B_{n+1}, B_n)}{\partial \tilde{d}_{n_0}}. \quad (47)$$

В границі великих значень n величина $\tilde{E}_2^n$ швидко спадає. З точністю до величин $\tilde{E}_2^{n_0+m}$ на основі (44) отримуємо спрощені співвідношення

$$\begin{aligned} &\tilde{d}_{n_0+m}(B_{n_0+m+1}, B_{n_0+m}) = \\ &= s^{-m(2-\eta)} \tilde{d}_{n_0}(B_{n_0+1}, B_{n_0}), \\ &\tilde{a}_4^{(n_0+m)} = s^{-2m(2-\eta)} \tilde{a}_4^{(n_0)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Використовуючи (47) та (48), у випадку критичної температури приходимо до виразу

$$\frac{1}{2(1 - s^{-3})} \frac{1}{\tilde{d}_{n_0}(B_{n_0+1}, B_{n_0})},$$

який відповідає внескові до G_{n_0} від першого доданка правої частини (46). Два інші доданки із (46) не дають внеску до G_{n_0}, оскільки $x_n \approx \tilde{x}$ не залежить від $\tilde{d}_{n_0}(B_{n_0+1}, B_{n_0})$ ($\tilde{E}_2^{n_0+m} \ll 1$).

Отже, при $T = T_c$ маємо

$$G_{n_0} = \frac{1}{2}(1 - s^{-3})^{-1} [\tilde{d}_{n_0}(B_{n_0+1}, B_{n_0})]^{-1}. \quad (49)$$

Приймаючи до уваги рівність

$$\tilde{d}_{n_0}(B_{n_0+1}, B_{n_0}) = (\tilde{r} + q) s^{-n_0(2-\eta)},$$

знаходимо

$$G_{n_0} = G_0 s^{n_0(2-\eta)}. \quad (50)$$

Тут

$$G_0 = \frac{1}{2} \frac{(1 - s^{-3})^{-1}}{\tilde{r} + q}. \quad (51)$$

Величина G_{n_0} є фур'є-образом кореляційної функції n_0-ї блочної структури.

Кожному інтервалу значень хвильового вектора $k \in (B_{n+1}, B_n]$ ($B_n = B' s^{-n}$, $B' = (b\sqrt{2})^{-1}$) в процесі поетапного інтегрування статистичної суми співставляється середнє значення

$$\langle k^2 \rangle_{B_{n+1}, B_n} = B'^2 \bar{q} s^{-2n}. \quad (52)$$

Вище ми одержали усереднену в n_0-му шарі величину G_{n_0}. Вона виражається через середнє значення хвильового вектора n_0-ї блочної структури. При цьому її асимптотика за n відрізняється від виразу (52) внаслідок врахування поправки на усереднення потенціалу. Саме включення у розгляд поправки приводить до виникнення біля пропорційного до $k^2 \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}}$ доданка (в експоненті функції розподілу) додаткових множників (див. [5])

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1)...(1 + \alpha_{n-1}).$$

При $T = T_c$ $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = \alpha^{(0)}$. Відповідно добуток $(1 + \alpha_0)...(1 + \alpha_{n-1})$ внаслідок малості α_n можна представити як $\exp(n\alpha^{(0)})$. Тоді (52) перепишемо у вигляді

$$(1 + \alpha^{(0)})^n \langle k^2 \rangle_{B_{n+1}, B_n} = s^{-n(2-\eta)} B'^2 \bar{q}. \quad (53)$$

Тут використана рівність $\alpha^{(0)} = \eta \ln s$. Порівнюючи (52) з (53), приходимо до виразу

$$s^{-n(2-\eta)} B'^2 \bar{q} = \langle k^{2-\eta} \rangle_{B_{n+1}, B_n}. \quad (54)$$

Таким чином, врахування поправки на усереднення потенціалу приводить до заміни s^{-2n} на $s^{-n(2-\eta)}$ і відповідає перенормуванню показника степеня з k^2 на $k^{2-\eta}$. В результаті фур'є-образ кореляційної функції n_0-ї блочної структури в границі $n_0 \to \infty$, що відповідає малим значенням хвильового вектора k, при $T = T_c$ представляється у вигляді

$$G_c = \lim_{n_0 \to \infty} G_{n_0} = G^{(0)} \lim_{k \to 0} \langle k^{-2+\eta} \rangle, \quad (55)$$

де

$$G^{(0)} = \frac{\bar{q}}{4b^2} \frac{(1 - s^{-3})^{-1}}{\tilde{r} + q}. \quad (56)$$

Величина η відповідає критичному показнику кореляційної функції.

4. Висновки

Важливу інформацію про поведінку фізичних систем можна отримати, обчислюючи їх кореляційні функції. Ці функції описують основні особливості, що виникають поблизу температури фазового переходу [1,7,8,10]. Особливо актуальна ця проблема при описі тривимірних систем, для яких, як правило, не вдається одержати точного розв'язку.

В даній роботі на основі функціонального диференціювання статистичної суми ізингового магнетика запропонований спосіб аналітичного розрахунку парної кореляційної функції тривимірної спінової системи з однокомпонентним параметром порядку. Розрахунок сприйнятливості системи в околі точки фазового переходу зв'язаний із границею фур'є-образу кореляційної функції при $k \to 0$. Обчислення виконані у високотемпературній ($T > T_c$) і низькотемпературній ($T < T_c$) областях, а також при $T = T_c$. Техніка отримання фур'є-образу кореляційної функції системи при $T = T_c$ відрізняється від випадку температур, відмінних від T_c. Це спричинено існуванням (при критичній температурі) області критичного режиму для всіх мод коливань густини спінового моменту, включаючи моди з хвильовим вектором $k = 0$. Ця область ренормгрупової симетрії відповідає наявності сильних кореляцій між спінами на як завгодно великих відстанях. При $T = T_c$ існує тільки область критичного режиму і, на відміну від $T \neq T_c$, ділянки гаусового режиму не виникає.

Дану роботу виконано за часткової підтримки Європейської Комісії (European Commission) в рамках проекту STREVCOMS PIRSES-2013-612669.

1. И.Р. Юхновский, *Фазовые переходы второго рода. Метод коллективных переменных* (Наукова думка, Киев, 1985).
2. I.R. Yukhnovskii, *Phase Transitions of the Second Order. Collective Variables Method* (World Scientific, Singapore, 1987).
3. І.Р. Юхновський, М.П. Козловський, І.В. Пилюк, *Мікроскопічна теорія фазових переходів у тривимірних системах* (Євросвіт, Львів, 2001).
4. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ϵ-разложение* (Мир, Москва, 1975).
5. І.Р. Юхновський, М.П. Козловський, І.В. Пилюк, УФЖ **57**, 83 (2012).
6. I.R. Yukhnovskii, M.P. Kozlovskii, and I.V. Pylyuk, Int. J. Mod. Phys. B **28**, 1450160 (2014).
7. В.К. Федянин, В сб.: *Статистическая физика и квантовая теория поля,* Под ред. Боголюбова Н.Н. (Наука, Москва, 1973), С. 241.
8. Ю.А. Изюмов, Ф.А. Кассан-Оглы, Ю.Н. Скрябин, *Полевые методы в теории ферромагнетизма* (Наука, Москва, 1974).
9. А.А. Мигдал, ЖЭТФ **59**, 1015 (1970).
10. И.В. Стасюк, ФММ **31**, 699 (1971).
11. С.В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма* (Наука, Москва, 1975).
12. С.В. Сёмкин, В.П. Смагин, ФТТ **56**, 1288 (2014).
13. C. Bagnuls and C. Bervillier, Phys. Rev. B **24**, 1226 (1981).
14. M. Ferer, Phys. Rev. B **16**, 419 (1977).
15. M.-C. Chang and A. Houghton, Phys. Rev. Lett. **44**, 785 (1980).
16. Г.В. Рязанов, ЖЭТФ **54**, 1010 (1968).
17. C. Bervillier and C. Godreche, Phys. Rev. B **21**, 5427 (1980).
18. A. Aharony and M.E. Fisher, Phys. Rev. B **27**, 4397 (1983).
19. C. Bagnuls and C. Bervillier, Phys. Rev. B **32**, 7209 (1985).
20. C. Bervillier, Phys. Rev. B **34**, 8141 (1986).
21. М.П. Козловский, И.В. Пылюк, И.Р. Юхновский, ТМФ **87**, 293 (1991).
22. И.Р. Юхновский, М.П. Козловский, *Препринт Института теоретической физики, ИТФ-89-69Р* (ИТФ, Киев, 1989).

Одержано 13.03.15

И.В. Пылюк, М.П. Козловский

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ
И ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ИЗИНГОВОГО МАГНЕТИКА
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Р е з ю м е

Применение метода коллективных переменных к изучению поведения неуниверсальных характеристик трехмерной изингоподобной системы в критической области проиллюстрировано на примере корреляционной функции и восприимчивости. Аналитическая процедура для расчета корреляционной функции и восприимчивости системы развита в приближении четверного распределения флуктуаций параметра порядка. Показано, что асимптотика корреляционной функции на больших расстояниях при критической температуре ($T = T_c$) качественно отличается от случая $T \neq T_c$ вследствие наличия области критического режима для всех мод флуктуаций.

I.V. Pylyuk, M.P. Kozlovskii

CORRELATION FUNCTION
AND SUSCEPTIBILITY OF ISING MAGNET
IN A VICINITY OF THE PHASE TRANSITION POINT

S u m m a r y

The application of the method of collective variables to study the behavior of non-universal characteristics of a three-dimensional Ising-like system in the critical region has been illustrated by an example of the correlation function and the susceptibility. An analytic procedure for the calculation of those characteristics has been developed in the quartic-distribution approximation for order parameter fluctuations. The asymptotics of the correlation function at large distances obtained for the critical temperature ($T = T_c$) is shown to differ qualitatively from that in the $T \neq T_c$ case because of the presence of the critical regime region for all fluctuation modes.