Г.Г. РОДЕ

Інститут фізики НАН України

(Просп. Науки, 46, Київ 03680; e-mail: ifanrode@gmail.com)

УДК 53.088.3

ПЕРЕНОС ПОХИБОК ТА СЕРЕДНІХ ВИМІРІВ ФІЗИЧНОЇ ВЕЛИЧИНИ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ $\cos(x)$ ТА $\arccos(x)$

Отримані нові точні "правила переносу похибки та середнього" однієї вимірюваної фізичної величини на іншу, що пов'язана з нею функційним зв'язком типу $\cos(x)$ *або* $\arccos(x)$. *Показано, що добуті співвідношення ідеально працюють при обробці набору даних реального фізичного дослідження. Це пов'язано з тим, що по природі в них неявно вже закладена вагова схема Гауса. Аналітична форма, в якій наведені згадані правила ("аналітичні правила переносу"), а також точний характер їх дозволяє спростити і прискорити процедуру обробки й аналізу експериментальних даних.*

Ключові слова: перенос помилок, перенос похибок, перенос відхилень.

1. Вступ

Найчастіше неможливо безпосередньо виміряти значення певної фізичної величини y, а доводиться визначати його через іншу величину x, через функційний зв'язок $y = h(x)$. Виміри x_i, що отримуються, утворюють ряд випадкових чисел, тобто статистичну множину $\{x_i\}$, яка описується двома числами: середнім значенням x (або "середнім") та середньою "похибкою" (або "точністю") $|\Delta x|$, що пов'язана з середньоквадратичним відхиленням Δx^2. Ці середні числа (або просто середні) і визначають фізичну величину x.

Якщо тепер побудувати множину значень функції $\{y_i = h(x_i)\}$, яка теж має статистичну природу, і так само описується двома числами: середнім y та "похибкою" $|\Delta y|$, що, в свою чергу, теж визначають обчислену фізичну величину y. Проте, далеко не завжди є змога побудувати множину $\{y_i\}$ і визначити через неї $y_{\text{сер}}$ та $|\Delta y|$. Тому доводиться шукати зв'язок $x_{\text{сер}} \to y_{\text{сер}}$ та $|\Delta x| \to |\Delta y|$, використовуючи властивості функційного зв'язку $y = h(x)$. В цьому і полягає задача "переносу похибки" фізичної величини x на нову фізичну величину $y = h(x)$ та обчислення "зміщеного середнього" $y = h(x)$ після обробки серії фізичних вимірів x_i і ця задача є досить актуальною.

Наприклад, за великим рахунком, нас цікавить не точність вимірювання отриманих Брегговських кутів рентгенівського розсіяння від кристала, а параметри елементарної ґратки та їх "перенесена" точність. В простішому випадку для рівняння Вульфа–Брегга:

$$2d \sin\theta = n\lambda,$$

це виглядає, як перенесення точності $\Delta\theta \to \Delta d$. У таких простих випадках можна грубо оцінити Δd через процедуру диференціювання згаданого рівняння, тобто

$$\Delta d = -\cot\theta\, \Delta\theta.$$

Але для більш складних випадків ця процедура ускладнюється і працює погано. Наприклад, для визначення тих самих параметрів елементарної ґратки на практиці користуються перевизначеною системою (50–100 рівнянь Вульфа–Брегга) квадратичного типу:

$$\lambda^2\big(h^2a_*^2+k^2b_*^2+l^2c_*^2+2hka_*b_*\cos\gamma_*+$$

$$+2hla_*c_*\cos\beta_*+2klb_*c_*\cos\alpha_*\big)=4\sin^2\theta_i,$$

де $4\sin 2\vartheta i$ – відомі, експериментально виміряні величини. З цієї системи статистичними методами отримують 6 середніх та 6 відхилень для 6 невідомих: a_*^2, b_*^2, c_*^2, $a_*b_*\cos\gamma_*$, $a_*c_*\cos\beta_*$, $b_*c_*\cos\alpha_*$. Після цього потрібно обчислити середні значення і "перенести" відхилення спочатку на параметри зворотної ґратки a_*, b_*, c_*, α_*, β_*, γ_*. А потім отримати 6 середніх і "перенести" 6 дисперсій для параметрів прямої ґратки: $a_*\to a$, $b_*\to b$, $c_*\to c$, $\alpha_*\to\alpha$, $\beta_*\to\beta$, $\gamma_*\to\gamma$ за складною системою співвідношень (7 рівнянь) типу:

$$\cos\alpha=\frac{\cos\beta_*\cos\gamma_*-\cos\alpha_*}{\sin\beta_*\sin\gamma_*}.$$

Так само, процедура обчислення середніх та відхилень ускладнюється і працює погано, якщо функція $H(\cos(x),\arccos(x)))$ є ланцюжком функцій $\cos(x)$, $\arccos(x)$ або ж якоюсь іншою сумішшю таких функцій, бо треба диференціювати всю функцію H, тобто обчислювати $\frac{dH}{dx}$. Більш точні результати може дати розклад в ряд [1] в точці $x_0=x_{\text{сер}}$ з урахуванням членів ряду високих порядків, що, відповідно, тягне за собою подальше ускладнення обчислень:

$$H(x)-H(x_0)=\frac{dH}{dx_0}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2H}{d^2x_0}(x-x_0)^2+\dots .$$

Аналітичні правила для "переносу похибки" й обчислення "зміщеного середнього" набагато спрощували б такі розрахунки, але вони досі були відомі лише для лінійної функції $y=kx$ [1]. Слід зауважити, що перенос похибок за допомогою розкладу в ряд Тейлора ("диференціювання") процедурно носить більш загальний характер, оскільки може працювати з будь-якою безперервною функцією. "Аналітичний" же підхід, навпаки, звужує його до конкретних розглянутих функцій (в даному розгляді це – $\cos(x)$ та $\arccos(x)$). Тому всі сучасні теоретичні й практичні застосування, методики й розробки перенос похибок будують виключно на основі "дифференціювання" [3–11]. Проблематика "аналітичного" переносу похибок найкраще окреслена в [1].

2. Нові правила обчислення середніх та переносу похибок для елементарних функцій $\cos(x)$ та $\arccos(x)$

Для отримання аналітичних правил для двох вибраних функцій ($\cos(x)$, $\arccos(x)$ середнє $x_{\text{сер}}$ та "похибка" $k(\Delta x)^2_{\text{сер}}$ були прив'язані (формалізовані) до базових понять математичної статистики:

$$x_{\text{сер}}\approx E_x;\quad k(\Delta x)^2_{cep}\approx D_x,$$

де E_x і D_x – відповідно, математичне очікування й дисперсія вимірюваної величини x. При такій формалізації вважається, що при вимірюванні фізичної величини x окремі значення x_i з'являються у відповідності з деякою функцію $f(x)$ розподілу ймовірності появи x_i. Ця функція, природно, має бути пов'язана з умовами вимірів (неявно залежить від приладу, вибраної методики, тощо). Зазвичай $f(x)$ нормують і тоді вона зветься функцією щільності (або "щільності" або "густини") ймовірності появи фізичної величини x з безперервним розподілом [1]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1. \tag{1}$$

У цьому випадку справжнє значення фізичної величини cos або, як кажуть, її математичне очікування можна обчислити за відомою функцією $f(x)$:

$$\mu=E_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{2}$$

Рівняння (2) є також визначенням математичного очікування $E(x)$ [1]. Одночасно $f(x)$ визначає також дисперсію фізичної величини x [1] (розкид її значень при вимірах, зумовлених $f(x)$):

$$D_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-E_x)^2f(x)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx;\qquad \mu=E_x. \tag{3}$$

Найважливішим серед розподілів $f(x)$ вважається т. зв. нормальний (гаусів) розподіл ймовірності [1]:

$$f(x)=\frac{p}{\sqrt{\pi}}\exp[-p^2(x-\mu)^2], \tag{4}$$

де
$$p^2 = \frac{1}{2D_x}, \quad \mu = E_x.$$

У випадку функційного зв'язку $y = h(x)$, математичне очікування й дисперсія для функції $h(x)$ будуть [1] (у різних записах):

$$\chi = E_h = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx, \tag{5}$$

$$D_h = \int_{-\infty}^{\infty} [h(x) - E_h]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [h(x) - \chi]^2 f(x)dx. \tag{6}$$

Вираз (6) можна переписати у більш зручному для нас вигляді (згідно з [1]):

$$D_h = \int_{-\infty}^{\infty} [h^2(x) - 2h(x)E_h + E_h^2] f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)f(x)dx - E_h^2. \tag{7}$$

У рівняннях (4)–(7) $\mu = E_x$ та D_x входять до $f(x)$ як параметри, тому, строго кажучи, $f(x)$ можливо записати як $f(x, E_x, D_x)$:

$$E_h = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f(x, E_x, D_x)dx, \tag{8}$$

$$D_h + E_h^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)\, f(x, E_x, D_x)dx. \tag{9}$$

Можна помітити, що (8) та (9) – інтегральні рівняння, вирішивши які можна отримати бажаний аналітичний зв'язок між E_h, D_h (аналогами середніх для функції $h(x)$) з одного боку та E_x, D_x (аналогами виміряних середніх) з іншого.

Виявилося, що можливо підібрати табличні інтеграли [2], подібні до (8) та (9) і, таким чином, вирішити задачу для двох елементарних функцій ($\cos(x)$, $\arccos(x)$) (див. Додаток).

Згадані співвідношення для функції $\cos(x)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} E_{\cos} &= \exp\left(-\frac{D_x}{2}\right)\cos E_x; \\ D_{\cos} &= \frac{1}{2}[1 - \exp(-D_x)][1 - \exp(-D_x)\cos 2E_x], \end{aligned} \tag{10}$$

де E_x і D_x – відповідають середньому та похибці виміряних даних, а $E_{\cos}$, $D_{\cos}$ – середньому та похибці переносу результатів вимірів через функцію $\cos(x)$.

Для функції $\arccos(x)$ співвідношення виглядають як:

$$\begin{aligned} E_{\arccos} &= \arccos \frac{E_x}{\pm\sqrt{E_x^2 + \sqrt{(1 - E_x^2)^2 - 2D_x}}}; \\ D_{\arccos} &= \ln \frac{1}{E_x^2 + \sqrt{(1 - E_x^2)^2 - 2D_x}}, \end{aligned} \tag{11}$$

де E_x і D_x – відповідають середньому та похибці виміряних даних, а $E_{\arccos}$, $D_{\arccos}$ – середньому та похибці переносу результатів вимірів через функцію $\arccos(x)$.

Таким чином, ми отримали (див. Додаток) бажані правила "переносу похибки" та обчислення "зміщеного середнього" типу $E_h = E_h(E_x, D_x)$ та $D_h = D_h(E_x, D_x)$ для функцій $h(x) = \cos(x)$ та $\arccos(x)$.

3. Застосування нових правил до експериментальних даних

Набір експериментальних даних являє собою сукупність окремих випадкових значень x_i виміряної фізичної величини x, т. зв. "вибірку" $\{x_i\}$. Величина x може мати безперервний розподіл [1] (іншими словами, працюють з величинами, що випадково "вибрані приладом" з безперервної множини).

Розглянемо як будуть виконуватись отримані співвідношення саме у випадку вибірок. Для цього обчислюємо середні звичайним способом (який ми беремо за взірець) по 4-м вибіркам: за 2-ма наборами експериментальних даних $\{x_i\}$ та за 2-ма наборами обчислених функцій $\cos(x)$ і $\arccos(x)$. Далі порівняємо їх з результатами, отриманими із співвідношень (10), (11), а також отриманими через розклад в ряд (диференціювання) [1].

3.1. Приклад для $\cos(x)$

За приклад для x візьмемо вибірку $\{x_i\}$ з 20 вимірів одного з кутів елементарної ґратки. Тут і далі нижче вибірки побудовані на основі даних вимірювань, отриманих за допомогою 3-кружного дифрактометра [12, 13]:

$\{x_i\}$ = 70,5, 70,58, 70,66, 70,74, 70,82, 70,9, 70,98, 71,06, 71,14, 71,22, 70,5, 70,42, 70,34, 70,26, 70,18, 70,1, 70,02, 69,94, 69,86, 69,78 (град). Арифметичні середні (обчислені по цій виборці зі сталою ймовірністю $w_i = 1/20$) дадуть нам такі значення:

$$E_n = 70{,}5; \quad D_n = 0{,}1824, \quad \Delta_n = 0{,}42708.$$

Використавши ці значення як 1-ше наближення, обчислюємо вже гаусові середні (2–3 ітерації) згідно із ваговою схемою Гауса:

$$E_x = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}, \quad D_x = \frac{\sum (x_i - E_x)^2 w_i}{\sum w_i}, \quad \Delta_x = \sqrt{D_x}, \tag{12}$$

де

$$w_i = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp[-p^2(x_i - \mu)^2], \quad p^2 = \frac{1}{2D_x}. \tag{13}$$

Отримуємо $E_x = 70{,}5$; $D_x = 0{,}11736$; $\Delta_x = 0{,}34258$. Іншими словами, по цій виборці маємо $E_x = 70{,}5 \pm \pm\, 0{,}3$ (град).

Для правильного обчислення середніх для функції $\cos(x)$ необхідно побудувати нову статистичну вибірку $\{\cos x_i\}$ і вже по ній обчислити потрібні середні.

Нова вибірка буде:

$\{\cos x_i\}$ = 0,33381, 0,33249, 0,33117, 0,32986, 0,32854, 0,32722, 0,3259, 0,32458, 0,32326, 0,32194, 0,33381, 0,33512, 0,33644, 0,33775, 0,33907, 0,34038, 0,341690, 0,343, 0,34432, 0,34563.

Використавши значення E_x, D_x та Δ_x і "покрутившись" згідно з (12) та (13) отримаємо бажані середні для функції $\cos(x)$ звичайним способом (їх беремо за "взірець"):

$$E_{\cos} = 0{,}3338, \quad D_{\cos} = 3{,}17649 \cdot 10^{-5},$$
$$\Delta_{\cos} = 0{,}00564.$$

"Перенос похибок" за аналітичними співвідношеннями (10) одразу дає такі значення:

$$E_{\cos} = 0{,}33381, \quad D_{\cos} = 3{,}18104 \cdot 10^{-5},$$
$$\Delta_{\cos} = 0{,}00564.$$

Тут і далі ми навмисне залишили на розгляд більше знаків, ніж потрібно (D_x – 2 знаки; Δ_x – взагалі 1), щоб мати змогу повніше відслідкувати усі обчислення. Зважаючи на це, можна стверджувати що у випадку функції $\cos(x)$ стандартні відхилення $\Delta_{\cos(x)}$ повністю збігаються. Іншими словами, "перенос похибок" за співвідношеннями (10) для функції $\cos(x)$ – правильний і добре працює для вибірок.

3.2. Приклад для $\arccos(x)$

Розглянемо ще один приклад для функції $\arccos(x)$. Використаємо вибірку $\{\cos x_i\}$ вимірів кута α елементарної ґратки [12, 13]:

$\{y_i\} = \{\cos x_i\}$ = 0,18224, 0,17674, 0,17399, 0,16436, 0,16436, 0,16298, 0,16298, 0,1616, 0,1616, 0,16023, 0,18224, 0,18772, 0,19047, 0,20005, 0,20005, 0,20142, 0,20142, 0,20279, 0,20279, 0,20415.

Згідно з використаною вище стандартною схемою обчислень середніх для вибірки:

а) обчислюємо спочатку арифметичні середні (ймовірність $w_i = 1/20$) –

$$E_n = 0{,}18221; \quad D_n = 2{,}80422 \cdot 10^{-4}; \quad \Delta_n = 0{,}01675;$$

б) далі обчислюємо гаусові середні (з ваговою схемою (13)):

$$E_y = 0,18222; \quad D_y = 1{,}9731 \cdot 10^{-4}; \quad \Delta_y = 0{,}00444;$$

в) утворюємо масив-вибірку (згідно з функцією $\arccos y$):

$\{\arccos y_i\}$ = 79,5, 79,82, 79,98, 80,54, 80,54, 80,62, 80,62, 80,7, 80,7, 80,78, 79,5, 79,18, 79,02, 78,46, 78,46, 78,38, 78,38, 78,3, 78,3, 78,22 (град).

Робимо статистичну обробку цієї вибірки звичайним способом ("взірець"), використавши значення E_y, D_y та Δ_y:

$$E_{\arccos} = 79{,}5; \quad D_{\arccos} = 0{,}67007;$$
$$\Delta_{\arccos} = 0{,}81858.$$

Розрахунки за співвідношеннями (11) дають такі значення (слід звернути увагу, що друге рівняння (11), для $D_{\arccos}$ дає значення в радіанах, які ми переводимо в кутові одиниці згідно з [1]):

$$E_{\arccos} = 79{,}4998; \quad D_{\arccos} = 0{,}66995;$$
$$\Delta_{\arccos} = 0{,}81851.$$

Ми бачимо, що і в цьому випадку збігання майже ідеальне. Тобто для функції $\arccos(x)$ "перенос похибок" за співвідношеннями (10), (11) – також правильний і добре працює для вибірок.

"Перенос похибок" за розкладом в ряд (диференціювання) дає такі значення:

$$E_{\arccos} = 79,5009; \quad D_{\arccos} = 0,066939;$$
$$\Delta_{\arccos} = 0,25872.$$

Числові значення трьох методів легко порівнюються.

4. Деякі загальні риси отриманих співвідношень

Аналітичний вигляд отриманих правил переносу дозволяє легко виділити особливості відповідних співвідношень і, навіть, побудувати графічні залежності, що дуже корисно для планування фізичного експерименту та його аналізу:

1. Слід наголосити, що величини E_h, D_h, E_x, D_x взаємно пов'язані, а також те, що E_h й D_h – функції 2-х змінних, а не однієї:

$$E_h = E_h(E_x, D_x); \quad D_h = D_h(E_x, D_x).$$

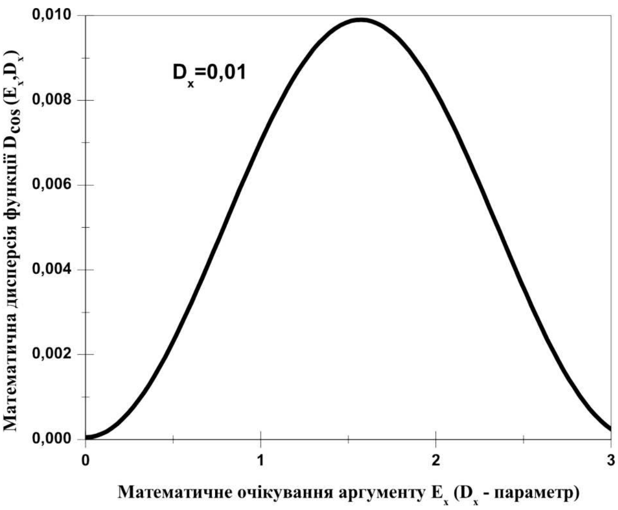

Рис. 1. Залежність дисперсії функції $D_{\cos}(E_x, D_x)$ від E_x

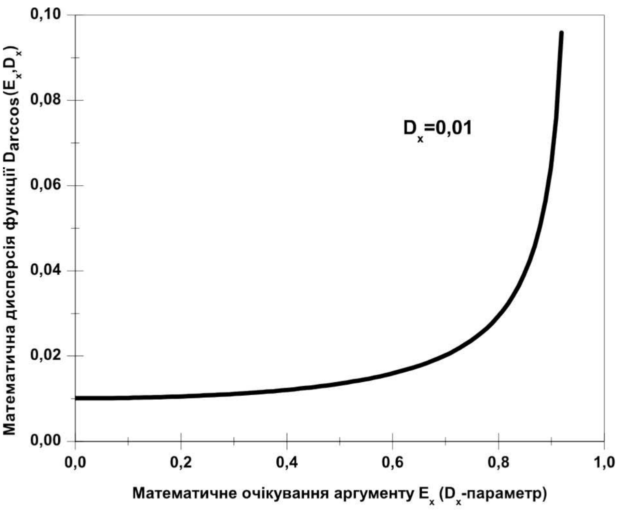

Рис. 2. Залежність дисперсії функції $D_{\arccos}(E_x, D_x)$ від E_x

До цього буває важко звикнути, як, наприклад, до факту, що похибки функцій $h(x)$ $\Delta_{\cos}$ або $\Delta_{\arccos}$ залежать від виміряного середнього значення $x_{\text{сер}}$.

2. Все це добре видно на рис. 1 та рис. 2, де наведено залежності дисперсій функцій

$$D_h = D_{\cos}(E_x, D_x); \quad D_h = D_{\arccos}(E_x, D_x);$$

від значень вимірюваних "середніх" відповідних аргументів E_x (D_x – параметр).

3. Крім того, сама можливість мати графічний вигляд отриманих співвідношень дає змогу обговорювати характер майбутніх вимірів, планувати їх.

4. Стає зрозумілим, чому підкореневий вираз у другому рівнянні (11) завжди буде $\geqslant 0$, тобто:

$$(1 - E_x^2)^2 \geqslant 2D_x.$$

5. Зауважимо, що в граничному випадку при $D_x = 0$

$$E_h = E_{\cos} = \cos E_x; \quad D_h = D_{\cos} = 0;$$

$$E_h = E_{\arccos} = \arccos \pm E_x, \quad D_h = D_{\arccos} = 0,$$

тому при цьому можна користуватись "звичайними" правилами переносу:

$$E_{\cos} = \cos E_x; \quad E_{\arccos} = \arccos \pm E_x.$$

6. В інших випадках, коли D_x мають помітну величину, вирази для $E_{\cos}$ і $E_{\arccos}$ (10), (11) дадуть більш правильні значення.

5. Висновки

1. Співвідношення (10), (11) дають правильний результат для виборок і можуть бути широко застосовані для скорочення і суттєвого спрощення обчислювальних процедур обчислень для функцій $\cos(x)$ та $\arccos(x)$.

2. У випадку відсутності початкового масиву експериментальних даних є чи не єдиним простим і правильним способом отримання E_h, D_h і похибки σ зазначених функцій.

3. Оскільки D_h та похибки σ для обох розглянутих функцій практично збігаються з дійсними значеннями, можливий точний перенос похибок для ланцюжка функцій типу $\cos(\arccos(\cos(\arccos(...))))$ або ж іншою сумішшю вказаних функцій.

4. На основі отриманих аналітичних співвідношень можливо побудувати два простих універсальних програмних алгоритми (загального призначення) для обчислення пар окремих значень ($E_{\cos}$; $D_{\cos}$) та ($E_{\arccos}$; $D_{\arccos}$), що можуть бути вбудовані, як окремі модулі (підпрограми), в будь-які програмні процедури. При цьому цей алгоритм буде прозорим (легким для читання). Це принципово неможливо при інших методах переносу, оскільки в них потрібно розкладати в ряд або диференціювати всю суперпозицію функцій як єдине ціле. І для кожної задачі треба будувати окрему процедуру.

5. Можливо передбачити величину похибки функції і побудувати її графічну залежність від планованої області вимірів фізичної величини.

6. Цікавою є можливість отримати точне значення зміщення середнього для $E_{\cos}$ та $E_{\arccos}$. В наведених прикладах це зміщення ніяк не впливає на значення цих середніх і не відіграє ніякої ролі, але воно існує і в деяких застосуваннях його значення може використовуватись.

7. Оскільки аналітичні значення середніх ($E_{\cos}$; $D_{\cos}$) та ($E_{\arccos}$; $D_{\arccos}$) генетично пов'язані з розподілом Гауса, то обчислене значення дозволяє порівнювати їх зі значеннями таких же величин, обчислених за іншими розподілами. По мінімуму $D_{\cos}$ або $D_{\arccos}$ вирішувати, що краще підходить.

ДОДАТОК

В цьому додатку наведений математичний доказ правильності отриманих співвідношень для 2-х функцій $E_{\cos}$ та $E_{\arccos}$, тобто шлях зведення інтегральних рівнянь (8) і (9) до табличних інтегралів і приведення отриманих співвідношень до зручного вигляду (10) та (11).

1. Математичне очікування E_h для функції $h(x) = \cos(x)$

Якщо в рівнянні (8) з урахуванням гаусового розподілу $f(x)$ (4), зробити заміну $y = x - \mu$, то отримаємо:

$$\chi = E_h = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\, \exp[-p^2(x-\mu)^2]dx =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(y+\mu) \exp[-p^2y^2]dy = \frac{p}{\sqrt{\pi}}\, J. \tag{14}$$

Інтегральний вираз J є, по суті, табличний интеграл T_2 (3.896.2) [2], який при $p \leftrightarrow q$, має вигляд:

$$T_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos q(y+\lambda) \exp[-p^2y^2]dy = \frac{\sqrt{\pi}}{p}\, \exp\left(-\frac{q^2}{4p^2}\right) \cos\lambda.$$

Легко помітити, що $J = T_2$ при $q = 1$ і $\lambda = \mu$. Тоді відразу отримаємо

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(-\frac{q^2}{4p^2}\right) \cos\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(-\frac{1}{4p^2}\right) \cos\mu. \tag{15}$$

Згадавши, що $\mu = E_x$ і підставивши це значення у вираз (14), маємо остаточний зв'язок інтеграла $E_{\cos}$ з інтегралами E_x та D_x, який з урахуванням (4 , $p^2 = \frac{1}{2D_x}$) виглядає як:

$$\chi = E_{\cos} = \exp\left(-\frac{D_x}{2}\right) \cos E_x. \tag{16}$$

Це – очікуваний результат. При невеликих D_x існує невеличке зміщення, що зумовлене множником $\exp(-\frac{D_x}{2}) \approx 1$, який при певних умовах, можна ігнорувати, але (16) – це точна робоча формула для $h(x) = \cos(x)$.

2. Дисперсія D_h для функції $h(x) = \cos x$

З рівняння (7) маємо "перенос похибки":

$$D_{\cos} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos^2(x)\, f(x)dx - E_h^2 = J_0 - E_h^2. \tag{17}$$

Перетворюємо J_0 до табличного вигляду:

$$J_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos^2(x)\, f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+\cos 2x)/2\, f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos 2x\, f(x)dx\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, J_{01}.$$

І далі при ($y = x - \mu$) отримаємо вираз для J_{01}:

$$J_{01} = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos 2x\, \exp[-p^2(x-\mu)^2]dx =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos 2(y+\mu)\, \exp[-p^2y^2]dx = \frac{p}{\sqrt{\pi}}\, J_{02}.$$

Інтеграл J_{02} при $q = 2$ і $\lambda = \mu$ збігається з табличним интегралом T_2 (3.896.2) [2], який при $p \leftrightarrow q$ має вигляд:

$$T_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos q(y+\lambda)\, \exp[-p^2y^2]dy = \frac{\sqrt{\pi}}{p}\, \exp\left(-\frac{q^2}{4p^2}\right) \cos q\lambda.$$

Тому, знову використавши заміни $\mu = E_x$ та $p^2 = \frac{1}{2D_x}$, остаточно маємо для J_0:

$$J_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, J_{01} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \frac{p}{\sqrt{\pi}}\, J_{02} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \frac{p}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\sqrt{\pi}}{p}\, \exp\left(-\frac{1}{p^2}\right) \cos 2\mu =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \exp(-2D_x)\, \cos 2E_x.$$

Підставляючи J_0 в (17), маємо "сирий" вираз для $D_{\cos}$, оскільки він вміщує $E_{\cos}^2$:

$$D_{\cos} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \exp(-2D_x)\, \cos 2E_x - E_{\cos}^2.$$

Заміною $E^2_{\cos}$ (16), отримаємо явну залежність $D_{\cos}(E_x, D_x)$:

$$D_{\cos} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(-2D_x)\cos 2E_x - \exp(-D_x)\cos^2 E_x. \quad (18)$$

Тобто це і буде правило "переносу похибок" для $h(x) = \cos x$. Вираз (11) можна переписати у більш однорідному вигляді:

$$D_{\cos} = \frac{1}{2}\left[1 - \exp(-D_x)\right]\left[1 - \exp(-D_x)\cos 2E_x\right], \quad (19)$$

якщо врахувати співвідношення

$$\cos^2 E_x = \frac{1}{2}[1 + \cos 2E_x]. \quad (20)$$

Слід зауважити, що всі ці процедури (розкриття підінтегральних виразів у суму інтегралів, винос констант, тощо) коректні з погляду правил статистики [1].

3. Середнє E_h та дисперсія D_h для функції $h(x) = \arccos x$

Безпосередній шлях обчислення $E(\arccos x)$ та $D(\arccos x)$ через табличні інтеграли – справа досить проблематична. Бажані співвідношення можна отримати, розглядаючи функцію $\arccos x$, як зворотну до $\cos x$, використавши співвідношення (10).

Дійсно, рівняння (10) дають нам явний зв'язок між 4-ма інтегралами $E_{\cos}$, $D_{\cos}$, E_x, D_x. Грубо кажучи, між 4-ма числами $E_{\cos}$, $D_{\cos}$, E_x, D_x:

$$E_{\cos} = E_{\cos}(E_x, D_x); \; D_{\cos} = D_{\cos}(E_x, D_x). \quad (21)$$

Якщо з рівнянь (10) та (21) визначити функції $E_x = E_x(E_{\cos}, D_{\cos})$ і $D_x = D_x(E_{\cos}, D_{\cos})$, обернені до функцій (10) та (21), то вони також повинні правильно описувати математичні зв'язки між інтегралами $E_x, D_x, E_{\cos}, D_{\cos}$.

При цьому, якщо $E_{\cos}$ та $D_{\cos}$ будуть отримані в якийсь інший спосіб (наприклад, виміряні) і будуть мати ті самі числові значення, що й обчислені за (10), то вони знов-таки задовольнять рівнянням зв'язку 4-х інтегралів (10) тоді і тільки тоді, коли E_x та D_x матимуть ті самі значення, що задані в (10).

Іншими словами, якщо $y = \cos x$ і, відповідно, $x = \arccos y$, то співвідношення типу $E_x = E_x(E_y, D_y)$ і $D_x = D_x(E_y, D_y)$, обернені рівнянням (10) та (21), дадуть нам вірні значення інтегральних виразів математичного очікування E_x і дисперсії D_x, визначених згідно з (8) та (9) для функції випадкової величини y, яка зв'язана зі змінною x сінусовим законом $y = \cos x$ або $x = \arccos y$.

Тобто, вирішивши (10) відносно x, ми простим обчисленням можемо отримувати значення E_x і D_x по значенням E_y, D_y, які є середніми для вимірів випадкової величини y, яка пов'язана з x співвідношенням $x = \arccos y$.

Вирішимо (10) відносно E_y, D_y. Для цього перепишемо їх, відповідно, у вигляді:

$$E_y = \exp\left(-\frac{D_x}{2}\right)\cos E_x, \quad (22)$$

$$D_y = \frac{1}{2}\left[1 - \exp(-D_x)\right]\left[1 - \exp(-D_x)\cos 2E_x\right]. \quad (23)$$

Пам'ятаємо, що інтеграли E_y і D_y пов'язані з функцією $y = \cos x$, а інтеграли E_x та D_x з функцією $x = \arccos y$. Вирішимо ці рівняння відносно інтегралів E_x та D_x, тобто отримаємо рівняння, зворотні до (10) та (22) і (23).

З (20) маємо

$$\cos 2E_x = 2\cos^2 E_x - 1.$$

З (22) отримуємо рівняння, оба члена якого позначимо як f, тобто:

$$\frac{E_y^2}{\cos^2 E_x} = \exp(-D_x) = f; \quad Z = \frac{1}{\cos^2 E_x}; \quad f = Z\,E_y^2. \quad (24)$$

Тоді (23) можна записати як

$$\begin{aligned}
2\,D_y &= [1 - \exp(-D_x)][1 - \exp(-D_x)(2\cos^2 E_x - 1)] = \\
&= [1 - f][1 - f\,(2\cos^2 E_x - 1)] = \\
&= [1 - f][1 - 2f\cos^2 E_x + f] = \\
&= 1 - f - 2f\cos^2 E_x + 2f^2\cos^2 E_x + f - f^2 = \\
&= 1 - f^2 + 2f^2\cos^2 E_x - 2f\cos^2 E_x^2.
\end{aligned}$$

Підставляючи позначення (24) в це рівняння, маємо:

$$\begin{aligned}
2\,D_y &= 1 - Z^2\,E_y^4 + 2Z^2\,E_y^4\,\frac{1}{Z} - 2Z\,E_y^2\,\frac{1}{Z} = \\
&= 1 - Z^2\,E_y^4 + 2Z\,E_y^4 - 2E_y^2;
\end{aligned}$$

$$2\,D_y - 1 + Z^2\,E_y^4 - 2Z\,E_y^4 + 2E_y^2 = 0;$$

$$Z^2\,E_y^4 - 2Z\,E_y^4 + 2E_y^2 + 2D_y - 1 = 0;$$

$$Z^2 - 2Z + \frac{[2E_y^2 + 2D_y - 1]}{E_y^4} = 0.$$

Остаточно отримуємо рівняння 2-го порядку:

$$\begin{gathered}
Z^2 - 2Z + B = 0; \quad B = B(E_y, D_y); \\
B = \frac{[2E_y^2 + 2D_y - 1]}{E_y^4}; \quad \frac{1}{\cos^2 E_x} = Z = Z(E_x).
\end{gathered} \quad (25)$$

Тривіальні перетворення дають нам рішення для (25):

$$(Z - 1)^2 = 1 - B; \quad Z = 1 \pm \sqrt{(1 - B)};$$

$$\cos^2 E_x = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{(1 - B)}} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{(2E_y^2 + 2\,D_y - 1)}{E_y^4}\right]}};$$

$$\cos^2 E_x = \frac{E_y^2}{E_y^2 \pm \sqrt{(1 - E_y^2)^2 - 2D_y}}. \quad (26)$$

Оскільки $\cos^2 E_x \leqslant 1$, то в (26) залишається тільки знак "+". Остаточно для E_x маємо

$$E_x = \arccos\frac{E_y}{\pm\sqrt{E_y^2 + \sqrt{(1 - E_y)^2 - 2D_y}}}. \quad (27)$$

Знак "$\pm$" приписуємо для E_x, залежно від "здорового глузду", тобто від очікуваного значення E_x.

Значення для D_x знаходимо з (22) і з (26):

$$\exp(D_x) = \frac{\cos^2 E_x}{E_y^2}; \quad D_x = \ln\left(\frac{\cos^2 E_x}{E_y^2}\right);$$

$$D_x = \ln(\frac{\cos^2 E_x}{E_y^2}) = \ln\left(\frac{1}{E_y^2 + \sqrt{(1-E_y^2)^2 - 2D_y}}\right). \qquad (28)$$

Легко помітити, що має бути $D_x \geqslant 0$, тобто $E_y^2 + \sqrt{(1-E_y^2)^2 - 2D_y} \leqslant 1$. І ця нерівність дійсно завжди виконується, оскільки завжди $E_y \leqslant 1$ і, як наслідок, має виконуватись ланцюжок нерівностей:

$$[(1-E_y^2)^2 - 2D_y \leqslant (1-E_y^2)^2] \to$$
$$\to \left[\sqrt{(1-E_y^2)^2 - 2D_y} \leqslant 1 - E_y^2\right] \to$$
$$\to \left[E_y^2 + \sqrt{(1-E_y^2)^2 - 2\,D_y} \leqslant 1\right].$$

Підкореневий вираз у (27) має бути $\geqslant 0$, тобто $(1-E_y^2)^2 - 2D_y \geqslant 0$. Це зрозуміло з таких міркувань. Природа $E_y - \cos(x)$, тобто і $E_y \leqslant 1$ і окремі виміри $E_i \leqslant 1$, тобто при довірчому інтервалі $\sqrt{2}\sigma$ середнє відхилення $E_y + \sqrt{2}\sigma$ має бути $E_y + \sqrt{2}\sigma \leqslant 1$ і, відповідно, $\sqrt{2}\sigma \leqslant 1 - E_y \leqslant 1 - E_y^2$; $2D_y \leqslant (1-E_y^2)^2$; остаточно $(1-E_y^2)^2 - 2D_y \geqslant 0$.

На останок перепишемо отримані співвідношення (10), (26) та (27) у більш зрозумілому символічному вигляді, де x – позначена вимірювана фізична величина (аргумент), а h – відповідна функція ($\cos x$; $\arccos x$):

$$E_h = E_{\cos} = \exp\left(-\frac{D_x}{2}\right)\cos E_x;$$
$$D_h = D_{\cos} = \frac{1}{2}[1 - \exp(-D_x)][1 - \exp(-D_x)\cos 2E_x]; \qquad (29)$$

$$E_h = E_{\arccos} = \arccos\frac{E_x}{\pm\sqrt{E_x^2 + \sqrt{(1-E_x^2)^2 - 2\,D_x}}};$$
$$D_h = D_{\arccos} = \ln\left(\frac{1}{E_x^2 + \sqrt{(1-E_x^2)^2 - 2\,D_x}}\right). \qquad (30)$$

Якщо зважити на формалізацію:

$$x \approx E_x; \quad k(\Delta x)^2 \approx D_x,$$

то отримані співвідношення дають нам бажані "правила переносу" середніх та похибок для функцій cos та arccos:

$$X \to H;\ |\Delta X| \to |\Delta H|.$$

1. Д. Худсон, *Статистика для физиков* (Мир, Москва, 1970).
2. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Физматгиз, Москва, 1963).
3. *Propagation of uncertainty* (Wikipedia); https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty.
4. H.H. Ku, J. Res. Nat. Bur. Stand. **70C**, 263 (1966).
5. Ph.R. Bevington and D.K Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* (McGraw-Hill, Boston, 2002).
6. J.R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* (Univ. Sci. Books, Sausalito, CA, 1997).
7. B.N. Taylor and C.E. Kuyatt, *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*, NIST Technical Note 1297 (1994).
8. P.K. Sinervo, in *Proceedings of the PHYSTAT2003 Conference, SLAC, Stanford, CA, September 8–11* (2003), p. 122.
9. J. Denker, *Nonlinear Least Squares*, http://www.av8n.com/physics/nonlinear-least-squares.htm.
10. E.W. Weisstein, *Standard Deviation entry at Mathworld*, http://mathworld.wolfram.com/StandardDeviation.html.
11. *Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" and related documents*, http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_104_2009_E.pdf.
12. Д.М. Хейкер и др., в *Аппаратура и методы рентгеновского анализа* (Машиностроение, Ленинград, 1968), с. 130.
13. Э.Л. Лубе, в *Аппаратура и методы рентгеновского анализа* (Машиностроение, Ленинград, 1968), с. 145.

Одержано 15.05.15

Г.Г. Родэ

ПЕРЕНОС ПОГРЕШНОСТЕЙ
И СРЕДНИХ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН
ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ $\cos(x)$ И $\arccos(x)$

Р е з ю м е

Найдены новые точные "правила переноса погрешности и среднего" одной измеряемой физической величины на другую, связанную с ней функциональной связью типа $\cos(x)$ или $\arccos(x)$. Показано, что полученные соотношения идеально работают при обработке набора данных реального физического исследования. Это сопряжено с тем, что по природе в них неявно уже заложена весовая схема Гаусса. Аналитическая форма, в которой приведены упомянутые правила ("аналитические правила переноса"), а также их точный характер позволяет упростить и ускорить процедуру обработки и анализа экспериментальных данных.

G.G. Rode

PROPAGATION OF MEASUREMENT ERRORS
AND MEASURED MEANS OF A PHYSICAL QUANTITY
FOR THE ELEMENTARY FUNCTIONS $\cos x$ AND $\arccos x$

S u m m a r y

New exact rules have been obtained for the propagation of the error and the mean value for a measured physical quantity onto another one with a functional relation of the $\cos\ x$ or $\arccos\ x$ type between those quantities. The obtained formulas are shown to provide an accurate result, if being applied to a set of data obtained in a real experiment. This is a consequence of the fact that the distribution of experimental data is inherently based on the Gaussian weight scheme. An analytical form used to present the mentioned rules ("analytical propagation rules") and the exact character of the latter allow the processing and the analysis of experimental data to be simplified and accelerated.