І.С. ДОЦЕНКО, Р.С. КОРОБКА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
(Просп. Академіка Глушкова, 4, Київ 03127; e-mail: ivando@ukr.net)

УДК 530.145

ДЕТЕКТУВАННЯ ЗАПЛУТАНОСТІ БАГАТОКУБІТОВИХ КВАНТОВИХ СИСТЕМ ЗА КРИТЕРІЯМИ МЕРМІНА І АРДЕХАЛІ

У роботі досліджується можливість виявлення заплутаності в n-кубітових узагальнених двопараметричних GHZ-станах, а також в довільних n-кубітових станах за допомогою нерівності Мерміна і нерівності Ардехалі з числа отримавших узагальнену назву нерівностей Мерміна–Ардехалі–Белінського–Клишко. Отримано формули для розрахунку значень кореляційних функцій Мерміна і Ардехалі в довільних квантових n-кубітових станах та критерій порушення відповідних нерівностей конкретними станами. Виявлено сукупність станів, абсолютно нечутливих до операторів Мерміна і Ардехалі. Запропоновано (модифіковані) оператори Мерміна і Ардехалі, сукупність яких дозволяє розширити клас n-кубітових станів, в яких можна виявити наявність квантових кореляцій.

Ключові слова: квантова заплутаність, критерії заплутаності.

1. Вступ

Багаточастинкова заплутаність квантових станів відіграє важливу роль як в концептуальних проблемах квантової теорії, так і в практичних питаннях квантової інформатики, зокрема, в квантових обчисленнях, квантової криптографії і квантової телепортації. Багаточастинкова заплутаність має складну структуру і, отже, є важким об'єктом для досліджень. За останні роки даній темі присвячені численні роботи, однак, побудова теорії багаточастинкової заплутаності все ще перебуває на ранній стадії, і до теперішнього часу детально досліджена структура заплутаності тільки для декількох спеціальних випадків обмежених квантових систем [1, 2]. Посилання на статті, присвячені проблемам багаточастинкової заплутаності, зацікавлений читач може знайти, наприклад, в [3–5].

Одним з важливих напрямків досліджень в теорії багаточастинкових заплутаностей є побудова кореляційних функцій та аналогів нерівностей Белла для багаточастинкових систем, за допомогою яких можна було б, в тому числі і експериментально, виявляти наявність заплутаності в квантовій системі. Згідно з теоремою Гісіна [6, 7] будь-який чистий двочастинковий заплутаний стан порушує нерівність Белла для двочастинкової кореляційної функції у формі Клаузера–Хорна–Шимоні–Холта (CHSH–Clauser–Horne–Shimony–Holt) [8].

В роботі [9] сформульовані дві теореми – узагальнення теореми Гісіна на випадок трикубітових систем: Теорема 1: Усі узагальнені GHZ-стани трикубітових систем порушують нерівності Белла з ймовірністю. Теорема 2: Всі чисті двочастинкові заплутані стани трикубітових систем порушують нерівності Белла з ймовірністю.

В ролі узагальнення CHSH-нерівності Белла на випадок багатокубітових квантових систем була запропонована серія однотипних нерівностей, що отримали назву нерівностей Мерміна–Ардехалі–Белінського–Клишко (Mermin–Ardehali–Belinskii–Klyshko або MABK) [10–12]. Перевагою MABK є те, що порушення цих нерівностей n-частинковими GHZ-станами [13] експоненційно зростає зі збільшенням n-числа кубітів в системі, тим самим демонструючи, що в загальному випадку не існує обмеження на величину, яка показує у скільки разів квантові кореляції можуть перевищувати граничні значення кореляцій, розрахованих в рамках теорії локального реалізму. Ця властивість має велике значення, оскільки експериментальна перевірка порушень нерівностей MABK остаточно вирішує питання про безпідставність так званих "реалістичних локальних теорій з прихованими параметрами".

При спробі застосувати MABK-нерівності до багатокубітових систем Скарані і Гісін (Scarani and Gisin [14]) помітили (із здивуванням), що узагальнені GHZ-стани

$$|\Psi\rangle = \cos\alpha|00\ldots0\rangle + \sin\alpha|11\ldots1\rangle \tag{1}$$

не порушують MABK-нерівності при значеннях параметра α, що задовольняють нерівності $\sin 2\alpha \leq \leq \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$. Даний результат було отримано чисельно для $n = 3, 4, 5$ і було зроблено припущення, що він є вірним і для $n > 5$. Наведений факт здавався несподіваним, оскільки стан (1) при $n = 2$ порушує CHSH-нерівності при всіх можливих значеннях α. На основі даного факту Скарані та Гісін зробили висновок, що можливо MABK-нерівності, і більш того нерівності з двома можливими значеннями вимірювань для кожного кубіта, не являють собою природне узагальнення CHSH-нерівностей на випадок систем з числом кубітів $n > 2$.

У даній роботі ми повертаємося до MABK нерівностей, щоб *остаточно* розділити всі чисті n-кубітові стани на дві групи: стани, які порушують MABK нерівності і стани, які ці нерівності не порушують, хоча вони, можливо, є заплутаними. Використовуючи простий прозорий формалізм для опису операторів відповідних кореляційних функцій, спочатку дослідження проводяться в класі узагальнених GHZ-станів, а потім вони поширюються на довільні n-кубітові стани. При цьому під узагальненими GHZ-станами, на відміну від однопараметричних станів (1) буде розглянуто більш широкий клас, а саме двопараметричні стани

$$|\chi\rangle = \cos\frac{\Theta}{2}|00\ldots0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\Theta}{2}|11\ldots1\rangle,$$

або

$$|\chi\rangle = \cos\frac{\Theta}{2}|\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\Theta}{2}|\downarrow\downarrow\ldots\downarrow\rangle. \tag{2}$$

Параметризація станів (2) подібна параметризації однокубітових станів, де кожним значенням пари (Θ, ϕ) відповідає точка на сфері Блоха. Стан (2) в теорії корекцій помилок при проходженні кубітів по квантових каналах часто називають "логічним кубітом".

Говорячи узагальнено про MABK нерівності, в даній роботі ми досліджуємо конкретно нерівність Мерміна, як вона запропонована в роботі [10], а також нерівність, запропоновану Ардехалі [11]. Дані нерівності схожі між собою, хоча і відрізняються конкретними виразами операторів кореляційних функцій і видами GHZ-станів, до яких вони будуть застосовані.

Наше завдання полягає в тому, щоб на основі квантової теорії:

1. Упорядкувати структуру операторів кореляційних функцій Мерміна та Ардехалі для отримання результатів в аналітичному вигляді.

2. Розрахувати значення кореляційних функцій Мерміна і Ардехалі в узагальнених GHZ-станах (2).

3. Порівняти отримані результати з розрахунками, проведеними в межах так званої теорії локального реалізму, і з'ясувати при яких значеннях параметрів Θ та ϕ і в якій мірі відповідні нерівності порушуються.

4. Провести відповідні дослідження для випадку, коли замість станів (2) розглядаються довільні n-кубітові стани.

По суті кореляційна функція Мерміна або Ардехалі визначає постановку експеримента по реєстрації станів частинок, і, отже, наші розрахунки дають відповідь на питання: чи можуть такі експерименти в принципі з'ясувати наявність або відсутність заплутаності в приготованому багатокубітовому квантовому стані.

По відношенню до кожної запропонованої нерівності Белла для багатокубітових систем цілком природним є прагнення отримати вичерпну відповідь на питання: що може і чого не може виявити оператор кореляційної функції (оператор $\hat{A}$) відповідної нерівності, або більш докладно:

- Чи можна дати простий критерій, які стани зі всієї множини багатокубітових станів порушують дану нерівність, а які ні? І якщо даний стан порушує нерівність, то який степінь цього порушення?

• Чи можна виявити клас хвильових функцій кубітів, для яких оператор $\hat{A}$ не здатний виявити кореляції, хоча вони насправді існують?

• Чи можна вказати множину станів, котрі максимально порушують дану нерівність?

• Чи можна дану нерівність вважати узагальненням нерівності Белла у формі CHSH на багатокубітові системи?

Повні відповіді на сформульовані вище питання дозволять робити висновки щодо доцільності застосування відповідної нерівності до конкретних багатокубітових систем.

2. Нерівність Мерміна

У роботі [10] Давід Мермін запропонував узагальнення нерівності Белла для системи n частинок зі спіном $s = \frac{1}{2}$ і довів, що квантова механіка порушує дану нерівність, причому для станів GHZ величина порушення експоненційно зростає з n – числом частинок в системі. Стан n-кубітової квантової системи, запропонований Мерміном, має вигляд

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle) \qquad (3)$$

або, в більш сучасних позначеннях:

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\dots0\rangle + i|11\dots1\rangle).$$

Стан (3) є частковим випадком (2) при значеннях параметрів $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, що на сфері Блоха відповідає точці перетину осі Oy зі сферою.

Кореляційній функції в нерівності Мерміна $\langle\hat{A}\rangle < 1$ в квантовій механіці відповідає ермітівський оператор:

$$\hat{A} = \frac{1}{2i}\left\{\prod_{j=1}^{n}(\sigma_x^j + i\sigma_y^j) - \prod_{j=1}^{n}(\sigma_x^j - i\sigma_y^j)\right\}, \qquad (4)$$

де σ_x, σ_y – оператори Паулі, а індекс j – номер кубіта (частинки).

У термінах реального експерименту Мермін описав ситуацію таким чином [10]: n-частинок розлітаються від деякого спільного джерела, в якому квантова система частинок приготовлена в стані (3). Стан кожної частинки розглядається у власній системі координат, де в ролі осі Z можна взяти напрямок руху частинки, а осі X та Y – два довільних напрямки ортогональних один до одного і також ортогональні до напрямку руху частинки (можна також вважати, що стан кожної частинки розглядається в довільній власній декартовій системі координат). Для кожної частинки існує прилад, що вимірює значення проекції спіну на вісь X або на вісь Y. За результатами вимірювань обчислюється кореляційна функція, котрій в квантовій механіці відповідає оператор (4).

Мермін показав [10], що значення кореляційної функції F за абсолютною величиною в рамках теорії локального реалізму задовільняє нерівність

$$F \le \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ – парне}, \\ 2^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ – непарне}, \end{cases}$$

$$F_{\max} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ – парне}, \\ 2^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ – непарне}, \end{cases}$$

в той час як розрахунок отриманий за правилами квантової теорії дає значення

$$F_{\Phi_1} = |\langle\Phi_1|\hat{A}|\Phi_1\rangle| = 2^{n-1},$$

тобто для всіх $n > 2$ має місце нерівність $F_{\Phi_1} > F_{\max}$, а відношення цих величин

$$K = \frac{F_{\Phi_1}}{F_{\max}} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}-1}, & n \text{ – парне}, \\ 2^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ – непарне}, \end{cases}$$

експоненційно зростає зі збільшенням n.

У даній роботі результати Мерміна стосовно значень F, $F_{\max}$ сприймаються як факт, і надалі порівнюються з результатами, отриманими за допомогою квантової механіки.

З метою розрахунку значення кореляційної функції в узагальнених GHZ та довільних станах, а також для більшої компактності виразів і зручності обчислень введемо такі позначення:

$$\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y, \quad \sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y,$$

$$\Sigma_+ = \prod_{j=1}^{n}\sigma_+^j, \qquad \Sigma_- = \prod_{j=1}^{n}\sigma_-^j,$$

$$|\Uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle, \ |\Downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle.$$

Зазначимо, що з ортонормованості одночастинкових станів $|\uparrow\rangle$ та $|\downarrow\rangle$ випливає ортонормованість станів $|\Uparrow\rangle$ та $|\Downarrow\rangle$:

$$\langle\Uparrow|\Uparrow\rangle=\langle\Downarrow|\Downarrow\rangle=1,\quad \langle\Downarrow|\Uparrow\rangle=\langle\Uparrow|\Downarrow\rangle=0.$$

В нових позначеннях стан $|\Phi_1\rangle$ (3) і оператор $\hat{A}$ (4) набирають вигляду:

$$|\Phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle+i|\Downarrow\rangle),$$
$$\hat{A}=\frac{1}{2i}(\Sigma_+-\Sigma_-)$$

з властивостей операторів σ_+ і σ_-:

$$\sigma_+|\uparrow\rangle=0,\quad \sigma_-|\uparrow\rangle=2|\downarrow\rangle,$$
$$\sigma_+|\downarrow\rangle=2|\uparrow\rangle,\quad \sigma_-|\downarrow\rangle=0$$

випливає:

$$\Sigma_+|\Uparrow\rangle=\prod_{j=1}^{n}(\sigma_+^j|\uparrow_j\rangle)=0,$$
$$\Sigma_+|\Downarrow\rangle=\prod_{j=1}^{n}(\sigma_+^j|\downarrow_j\rangle)=2^n|\Uparrow\rangle,$$
$$\Sigma_-|\Uparrow\rangle=2^n|\Downarrow\rangle,\quad \Sigma_-|\Downarrow\rangle=0.$$

Тепер неважко показати, що $|\Phi_1\rangle$ є власним вектором оператора $\hat{A}$, що відповідає власному значенню $\lambda=2^{n-1}$:

$$\hat{A}|\Phi_1\rangle=\frac{1}{2i}(\Sigma_+-\Sigma_-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle+i|\Downarrow\rangle)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\Sigma_+|\Downarrow\rangle+i\Sigma_-|\Uparrow\rangle)=2^{n-1}|\Phi_1\rangle.$$

Отже, значення відповідної кореляційної функції в стані $|\Phi_1\rangle$:

$$|F_{\Phi_1}|=|\langle\Phi_1|\hat{A}|\Phi_1\rangle|=2^{n-1},$$

що збігається з результатом, отриманим Мерміном іншим способом.

Можна також легко переконатися в тому, що стан

$$|\Phi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle-i|\Downarrow\rangle)$$

також є власним вектором оператора $\hat{A}$, що відповідає власному значенню $\lambda=-2^{n-1}$:

$$\hat{A}|\Phi_2\rangle=-2^{n-1}|\Phi_2\rangle$$

і, отже

$$|F_{\Phi_2}|=|\langle\Phi_2|\hat{A}|\Phi_2\rangle|=2^{n-1}.$$

Розглянемо тепер середнє значення оператора $\hat{A}$ в довільному узагальненому GHZ-стані (2):

$$F_\chi=\bar{A}_\chi=\langle\chi|\hat{A}|\chi\rangle=$$
$$=(\cos\frac{\Theta}{2}\langle\Uparrow|+e^{-i\phi}\sin\frac{\Theta}{2}\langle\Downarrow|)\frac{1}{2i}(\Sigma_+-\Sigma_-)\times$$
$$\times(\cos\frac{\Theta}{2}|\Uparrow\rangle+e^{i\phi}\sin\frac{\Theta}{2}|\Downarrow\rangle)=2^{n-1}\sin\Theta\sin\phi.\quad (5)$$

З отриманого загального виразу випливають отримані вище окремі випадки:

$$\text{при } \Theta=\frac{\pi}{2},\phi=\frac{\pi}{2},\ |\chi\rangle\to|\Phi_1\rangle,\ F_\chi\to F_{\Phi_1}=2^{n-1},$$
$$\text{при } \Theta=\frac{\pi}{2},\phi=\frac{3\pi}{2},\ |\chi\rangle\to|\Phi_2\rangle,\ F_\chi\to F_{\Phi_2}=-2^{n-1}.$$

Розглянемо тепер стани GHZ:

$$|\chi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle+|\Downarrow\rangle),$$
$$|\chi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle-|\Downarrow\rangle),$$

які є окремими випадками стану (2), що відповідають значенням параметрів $\Theta_1=\frac{\pi}{2}$, $\phi_1=0$ та $\Theta=\frac{\pi}{2}$, $\phi_2=\pi$. Отже з (5) маємо

$$F_{\chi_1}=\langle\chi_1|\hat{A}|\chi_1\rangle=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}\sin 0=0,$$
$$F_{\chi_2}=\langle\chi_2|\hat{A}|\chi_2\rangle=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}\sin\pi=0.$$

Значення F також дорівнює нулю для всіх значень Θ, якщо $\phi=0$ і $\phi=\pi$. Зараз можна зробити перші висновки:

1. Квантово-механічні значення кореляційних функцій Мерміна в узагальненому GHZ-стані (2) визначаються формулою (5).

2. У класі всіх узагальнених GHZ-станів максимальні (за модулем) значення кореляційна функція Мерміна приймає в станах

$$|\Phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle+i|\Downarrow\rangle),$$
$$|\Phi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle-i|\Downarrow\rangle).$$

3. Оператор Мерміна абсолютно не "відчуває" наявність кореляцій у станах (2) при $\phi = 0$ та $\phi = \pi$.

Для стану (2) область значень Θ і ϕ, для яких нерівність Мерміна порушується, визначається нерівностями

$$|\sin\Theta\sin\phi| > \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}},\ n - \text{непарне},$$
$$|\sin\Theta\sin\phi| > \frac{1}{\sqrt{2^{n-2}}},\ n - \text{парне}. \qquad (6)$$

Слід зауважити, що для двох значень n, що відрізняються на одиницю $n_1 = 2k - 1$ і $n_2 = 2k$ нерівність (6) приймає однаковий вигляд

$$|\sin\Theta\sin\phi| > \frac{1}{\sqrt{2^{2(k-1)}}}.$$

Зокрема, для $n = 3$ і $n = 4$ нерівності (6) приймають однаковий вигляд

$$|\sin\Theta\sin\phi| > \frac{1}{2}.$$

Якщо декартові координати точок M на сфері Блоха позначити через $\{x_m, y_m, z_m\}$, то з (6) випливає, що нерівність Мерміна порушується при

$$|y_m| > \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}},\ n - \text{непарне},$$
$$|y_m| > \frac{1}{\sqrt{2^{n-2}}},\ n - \text{парне},$$

тобто для непарних n площини $y_m = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$ і $y_m = -\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$ відсікають від сфери Блоха області, точкам яких відповідають стани (2), що порушують нерівність Мерміна. Для парних n такими площинами є $y_m = \frac{1}{\sqrt{2^{n-2}}}$ і $y_m = -\frac{1}{\sqrt{2^{n-2}}}$.

На рис. 1, 2 і 3 на сфері Блоха зображені відповідні області для $n = 3$ і $n = 4$; $n = 5$ і $n = 6$; $n = 9$ і $n = 10$. З порівняння рисунків видно, що виділені області з ростом n збільшуються і при $n \to \infty$ вони заповнюють всю сферу Блоха.

Якщо узагальнені GHZ-стани представити у вигляді

$$|\chi\rangle = \alpha|\Uparrow\rangle + \beta|\Downarrow\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \qquad (7)$$

де α вважаємо дійсним числом, то значення кореляційної функції приймає вигляд

$$F_\chi = \langle\chi|\hat{A}|\chi\rangle = 2^n \alpha\, \mathrm{Im}(\beta),$$

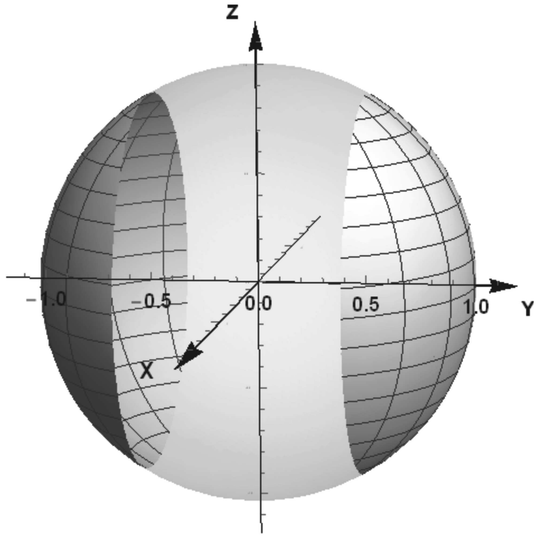

Рис. 1. Область точок на сфері Блоха, яким відповідають стани, що порушують нерівність Мерміна для випадку 3 і 4 кубітів

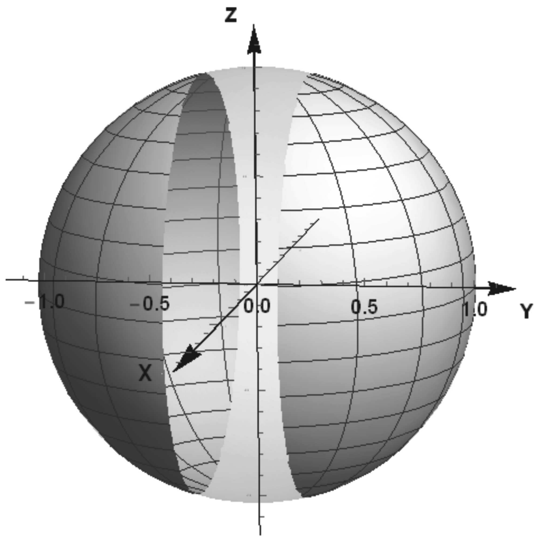

Рис. 2. Область точок на сфері Блоха, яким відповідають стани, що порушують нерівність Мерміна для випадку 5 і 6 кубітів

тобто F_χ відмінно від нуля лише при наявності у β уявної частини.

Тепер розглянемо більш загальну ситуацію. Нехай задано довільний n-кубітовий стан $|\Psi\rangle$. Чому дорівнює значення кореляційної функції Мерміна $F_\Psi = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$ у даному стані? Чи порушує даний стан нерівність Мерміна?

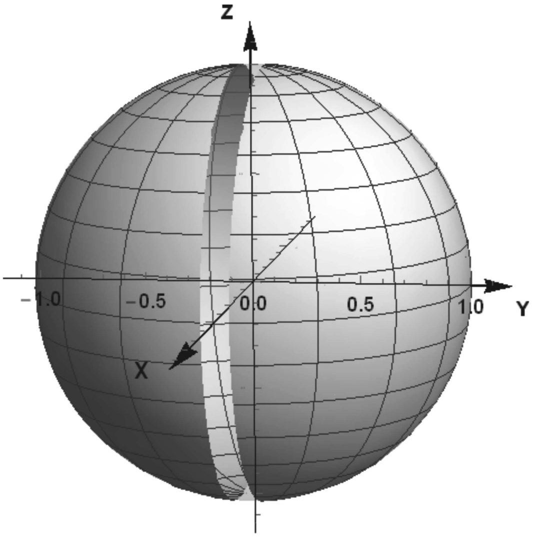

Рис. 3. Область точок на сфері Блоха, яким відповідають стани, що порушують нерівність Мерміна для випадку 9 і 10 кубітів

У 2^n-вимірному гільбертовому просторі станів n кубітів виберемо базис, у якому кожний базисний стан являє собою добуток однокубітових станів $|\uparrow\rangle$ та $|\downarrow\rangle$ (або $|0\rangle, |1\rangle$):

$$\begin{array}{lcl} |\xi_1\rangle = |\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\rangle, & & |\xi_1\rangle = |00\dots 00\rangle, \\ |\xi_2\rangle = |\uparrow\uparrow ... \uparrow\downarrow\rangle, & & |\xi_2\rangle = |00\dots 01\rangle, \\ |\xi_3\rangle = |\uparrow\uparrow ... \downarrow\uparrow\rangle, & \text{або} & |\xi_3\rangle = |00\dots 10\rangle, \\ \dots & & \dots \\ |\xi_{2^n}\rangle = |\downarrow\downarrow ... \downarrow\downarrow\rangle & & |\xi_{2^n}\rangle = |11\dots 11\rangle. \end{array}$$

Такий базис зазвичай називають “стандартним” або “обчислювальним” базисом.

Розклад довільного вектора $|\Psi\rangle$ стану n кубітів за даним повним базисом можна представити у вигляді

$$|\Psi\rangle = a|\chi\rangle + b|\tilde{\chi}\rangle, \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} &|\chi\rangle = \alpha|\uparrow\uparrow ... \uparrow\rangle + \beta|\downarrow\downarrow ... \downarrow\rangle = \alpha|\Uparrow\rangle + \beta|\Downarrow\rangle, \\ &|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \end{aligned} \tag{9}$$

а

$$|\tilde{\chi}\rangle = \sum_{i=2}^{2^n-1} \gamma_i|\xi_i\rangle, \quad \sum_{i=2}^{2^n-1} |\gamma_i|^2 = 1,$$

причому, якщо $|a|^2 + |b|^2 = 1$, то $|\Psi\rangle$ нормовано на одиницю. У всіх базисних станах $|\xi_i\rangle, i = 2, 3, ..., 2^n - 1$ “проекція спіну” принаймні однієї частинки, протилежна “проекції спіну” інших частинок, і як наслідок маємо:

$$\Sigma_+|\xi_i\rangle = 0, \quad \Sigma_-|\xi_i\rangle = 0, \quad i = 2, 3, ..., 2^n - 1.$$

і, тому:

$$\Sigma_+|\tilde{\chi}\rangle = \Sigma_-|\tilde{\chi}\rangle = \hat{A}|\tilde{\chi}\rangle = 0.$$

Тоді очевидно, маємо:

$$\begin{aligned} &\hat{A}|\Psi\rangle = a\hat{A}|\chi\rangle, \text{ і} \\ &F_\Psi = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = |a|^2\langle\chi|\hat{A}|\chi\rangle. \end{aligned}$$

Представляючи $|\chi\rangle$ у вигляді (2), отримуємо

$$F_\Psi = |a|^2 2^{n-1} \sin\Theta \sin\phi, \quad a = \langle\chi|\Psi\rangle.$$

Стан $|\Psi\rangle$ можна також представити у вигляді:

$$|\Psi\rangle = a_1|\Uparrow\rangle + a_2|\Downarrow\rangle + b|\tilde{\chi}\rangle,$$

де

$$a_1 = \langle\Uparrow|\Psi\rangle = |a_1|e^{i\phi_1}, \quad a_2 = \langle\Downarrow|\Psi\rangle = |a_2|e^{i\phi_2}. \tag{10}$$

Тоді:

$$|\Psi\rangle = e^{i\phi_1}(|a_1|\cdot|\Uparrow\rangle + e^{i(\phi_2-\phi_1)}|a_2|\cdot|\Downarrow\rangle) + b|\tilde{\chi}\rangle \tag{11}$$

Порівняння (11) з (8) з урахуванням (2), (9), (10) дозволяє записати співвідношення між різними параметрами:

$$\begin{aligned} &\phi = \phi_2 - \phi_1, \quad a = e^{i\phi_1}\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}, \\ &\alpha = \frac{|a_1|}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}, \quad \beta = e^{i\phi}\frac{|a_2|}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}, \\ &\cos\frac{\Theta}{2} = \frac{|a_1|}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}, \quad \sin\frac{\Theta}{2} = \frac{|a_2|}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}, \\ &\sin\Theta = \frac{2|a_1a_2|}{|a_1|^2 + |a_2|^2}. \end{aligned}$$

Тепер безпосередньо представимо простий алгоритм обчислення кореляційної функції Мерміна для довільного вектора n-кубітового стану $|\Psi\rangle$:

1. По заданому $|\Psi\rangle$ знаходимо

$$a_1 = \langle\Uparrow|\Psi\rangle, \quad a_2 = \langle\Downarrow|\Psi\rangle.$$

2. Знаходимо $|a_1|$, $|a_2|$, $\phi_1 = \arg(a_1)$, $\phi_2 = \arg(a_2)$, $\phi = \phi_1 - \phi_2$.

3. Отримуємо $\sin\Theta = \frac{2|a_1 a_2|}{|a_1|^2+|a_2|^2}$.
4. Розраховуємо F_Ψ:

$$F_\Psi = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = (|a_1|^2 + |a_2|^2)2^{n-1}\sin\Theta\sin\phi = \\ = 2^n|a_1 a_2|\sin\phi.$$

Тоді умова порушення нерівності Мерміна даний станом $|\Psi\rangle$ представляється у вигляді:

$$\left|\frac{F_\Psi}{F_{\max}}\right| > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}|a_1 a_2 \sin\phi| > 1, & n - \text{непарне}, \\ 2^{\frac{n}{2}}|a_1 a_2\sin\phi| > 1, & n - \text{парне}. \end{cases} \tag{12}$$

Отримані співвідношення повністю вичерпують тему про можливість виявляти заплутаність (або нелокальність) в n-кубітових системах за допомогою нерівності Мерміна.

З (12) випливає, що при достатньо великих n усі стани $|\Psi\rangle$ з $\phi \neq 0$ або $\phi \neq \pi$ і одночасно $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ порушують нерівність Мерміна. Якщо ж має місце хоча б одна рівність: $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $a_1 = 0$ або $a_2 = 0$, то оператор Мерміна (4) не може виявити наявність кореляцій.

Стани $|\Phi_1\rangle$ і $|\Phi_2\rangle$ порушують нерівність Мерміна в найбільшому степені серед усіх n-кубітових станів.

Якщо деякий стан $|\Psi\rangle$ не порушує нерівність Мерміна, то це не свідчить про відсутність в ньому заплутаності, а свідчить тільки про те, що оператор Мерміна $\hat{A}$ в принципі не може виявити наявність (або відсутність) заплутаності в даному стані.

3. Нерівність Ардехалі

В роботі Ардехалі [11] запропонована нерівність для багатокубітових систем, що має схожість з розглянутою вище нерівністю Мерміна. Внаслідок такої схожості в даному розділі будуть опущені деякі подробиці, щоб уникнути повторень. При цьому умовні позначення з попереднього розділу будуть збережені. Метою досліджень, як і у попередньому розділі, є пошук критеріїв порушення нерівності Ардехалі спочатку в класі узагальнених GHZ-станів, а потім і для довільного n-кубітового стану.

Оператор n-кубітової кореляційної функції Ардехалі має вигляд:

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2,$$

де

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 = (&-\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_x^3 \dots \sigma_x^{n-1} + \sigma_y^1\sigma_y^2\sigma_x^3 \dots \sigma_x^{n-1} + \dots - \\ &- \sigma_y^1\sigma_y^2\sigma_y^3\sigma_y^4\sigma_x^5 \dots \sigma_x^{n-1} - \dots + \\ &+ \sigma_y^1 \dots \sigma_y^6\sigma_x^7 \dots \sigma_x^{n-1} + \dots - \dots)(\sigma_a^n - \sigma_b^n), \\ \hat{A}_2 = (&\sigma_y^1\sigma_x^2 \dots \sigma_x^{n-1} + \dots - \sigma_y^1\sigma_y^2\sigma_y^3\sigma_x^4 \dots \sigma_x^{n-1} - \dots + \\ &+ \sigma_y^1 \dots \sigma_y^5\sigma_x^6 \dots \sigma_x^{n-1} + \dots - \\ &- \sigma_y^1 \dots \sigma_y^7\sigma_x^8 \dots \sigma_x^{n-1} - \dots + \dots)(\sigma_a^n + \sigma_b^n), \end{aligned} \tag{13}$$

де зміст знаків “+...” та “−...” пояснюється у додатку, σ_x^j, σ_y^j – оператори Паулі, j – номери частинок, а σ_a, σ_b визначаються такими виразами:

$$\sigma_a = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\sigma_b = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\sigma_a + \sigma_b = \sqrt{2}\sigma_y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\sigma_+ - \sigma_-),$$

$$\sigma_a - \sigma_b = \sqrt{2}\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_+ + \sigma_-),$$

де $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y$, $\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y$ – оператори, властивості яких представлено в попередньому розділі, а $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ – вектори, що знаходяться в площині Oxy, мають одиничну довжину і утворюють з віссю Ox кути, відповідно 45° та 135° тобто

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Така структура оператора $\hat{A}$ відповідає експерименту, в якому над $n-1$ частинками виконується вимірювання проекцій спіну на напрямки осей X та Y, а у n-ї частинки вимірюються проекції на напрямки, що задаються одиничними векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

У роботі Ардехалі розглядається n-кубітовий стан, що відповідає вектору

$$|\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle),$$

або в прийнятих вище позначеннях:

$$|\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle - |\Downarrow\rangle). \tag{14}$$

Ардехалі показав, що в межах теорії локального реалізму кореляційна функція, що відповідає оператору $\hat{A}$ (13), обмежена значеннями

$$F \leq \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & n - \text{парне}, \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$F_{\max} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & n - \text{парне}, \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n - \text{непарне}, \end{cases}$$

тоді як розрахунки за правилами квантової механіки для стану (14) приводять до результату

$$F_{\chi_2} = \langle\chi_2|\hat{A}|\chi_2\rangle = 2^{n-\frac{1}{2}}.$$

Отже, квантово-механічне значення F_{χ_2} перевищує значення F в K разів:

$$K = \frac{F_{\chi_2}}{F_{\max}} = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n - \text{парне}, \\ 2^{\frac{n}{2}-1}, & n - \text{непарне}. \end{cases} \quad (15)$$

Далі послідовно виконаємо такі дії:

1. Приведемо оператор (13) до вигляду, схожого з виглядом оператора Мерміна в попередньому розділі і потім простим способом покажемо, що дійсно $F_{\chi_2} = 2^{n-\frac{1}{2}}$.

2. Обчислимо квантове значення кореляційної функції в узагальненому GHZ-стані (2), (7):

$$\begin{cases} |\chi\rangle = \alpha|\Uparrow\rangle + \beta|\Downarrow\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\chi\rangle = \cos\dfrac{\Theta}{2}|\Uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\dfrac{\Theta}{2}|\Downarrow\rangle. \end{cases}$$

3. Знайдемо значення кореляційної функції в довільних n-кубітових станах $|\Psi\rangle$.

4. Знайдемо множину n-кубітових станів, що порушують нерівність Ардехалі і знайдемо ступінь цього порушення.

Тепер оператори $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ (13) можна представити в наступному вигляді (дивіться додаток в кінці даної статті):

$$\hat{A}_1 = -\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j + \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_+^n + \sigma_-^n\right),$$

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{2i}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j - \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right)\frac{1}{i\sqrt{2}}(\sigma_+^n - \sigma_-^n),$$

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j + \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right)\times\right.$$
$$\left.\times(\sigma_+^n + \sigma_-^n) + \left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j - \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right)(\sigma_+^n - \sigma_-^n)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\prod_{j=1}^{n}\sigma_+^j + \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\sigma_+^n + \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j\sigma_-^n +\right.$$
$$+\prod_{j=1}^{n}\sigma_-^j + \prod_{j=1}^{n}\sigma_+^j - \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\sigma_+^n -$$
$$\left.-\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j\sigma_-^n + \prod_{j=1}^{n}\sigma_-^j\right\}.$$

Після скорочень отримуємо:

$$\hat{A} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\prod_{j=1}^{n}\sigma_+^j + \prod_{j=1}^{n}\sigma_-^j\right),$$

або в прийнятих вище позначеннях:

$$\hat{A} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma_+ + \Sigma_-),$$

Такий простий вираз для оператора $\hat{A}$ дозволяє легко переконатись в тому, що вектор стану $|\chi_2\rangle$ (14) дійсно є власним вектором оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A}|\chi_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma_+ + \Sigma_-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle - |\Downarrow\rangle) =$$
$$\frac{1}{2}(\Sigma_+|\Downarrow\rangle - \Sigma_-|\Uparrow\rangle) = 2^{n-1}(|\Uparrow\rangle - |\Downarrow\rangle) = 2^{n-\frac{1}{2}}|\chi_2\rangle,$$

і як наслідок маємо: $F_{\chi_2} = \langle\chi_2|\hat{A}|\chi_2\rangle = 2^{n-\frac{1}{2}}$ – тобто маємо результат Ардехалі, отриманий іншим способом.

Простою перевіркою можна переконатись в тому, що $|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\rangle + |\Downarrow\rangle)$ також є власним вектором оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A}|\chi_1\rangle = -2^{n-\frac{1}{2}}|\chi_1\rangle$$

і, отже, значення кореляційної функції в цьому стані дорівнює

$$F_{\chi_1} = \langle\chi_1|\hat{A}|\chi_1\rangle = -2^{n-\frac{1}{2}}\ ,$$

а в узагальненому GHZ-стані (2)

$$F_\chi = \langle\chi|\hat{A}|\chi\rangle = -2^{n+\frac{1}{2}}\alpha\mathrm{Re}\beta = -2^{n-\frac{1}{2}}\sin\Theta\cos\phi.$$

Вектори $|\chi_1\rangle$ та $|\chi_2\rangle$ є частинними випадками стану $|\chi\rangle$:

$$\text{при } \Theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \pi \quad |\chi\rangle \to |\chi_2\rangle,$$
$$F_\chi \to F_{\chi_2} = -2^{n-\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi = 2^{n-\frac{1}{2}};$$
$$\text{при } \Theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0 \quad |\chi\rangle \to |\chi_1\rangle,$$
$$F_\chi \to F_{\chi_1} = -2^{n-\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\cos 0 = -2^{n-\frac{1}{2}}.$$

Умова порушення нерівності Ардехалі станами $|\chi\rangle$ набуває вигляду:

$$K = \left|\frac{F_\chi}{F_{\max}}\right| > 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}|\sin\Theta\cos\phi| > 1, & n \text{ – парне,} \\ 2^{\frac{n}{2}-1}|\sin\Theta\cos\phi| > 1, & n \text{ – непарне.} \end{cases}$$

Області на сфері Блоха, точкам котрих відповідають стани $|\chi\rangle$, які порушують нерівність Ардехалі, відсікаються площинами, перпендикулярними до осі Ox, на відміну від попереднього випадку нерівності Мерміна (рис. 1, 2, 3), де такі області відсікаються площинами, перпендикулярними до осі Oy. Із зростанням числа частинок n відповідні області розширюються і при $n \to \infty$ займають всю сферу Блоха.

Знайдемо тепер значення $F_\Psi = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$, для довільного n-кубітового стану $|\Psi\rangle$.

Представляючи вектор $|\Psi\rangle$ у вигляді (8) і враховуючи, що $\hat{A}|\tilde{\chi}\rangle = 0$ і беручи до уваги співвідношення (11) між параметрами, отримаємо:

$$F_\Psi = -2^{n+\frac{1}{2}}|a_1 a_2|\cos\phi$$

або те саме записане інакше

$$F_\Psi = -2^{n-\frac{1}{2}}(|a_1|^2 + |a_2|^2)\sin\Theta\cos\phi.$$

Тоді умова порушення нерівності Ардехалі даним n-кубітовим станом набуває вигляду:

$$\left|\frac{F_\Psi}{F_{\max}}\right| > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}|a_1 a_2\cos\phi| > 1, & n \text{ – парне,} \\ 2^{\frac{n}{2}}|a_1 a_2\cos\phi| > 1, & n \text{ – непарне} \end{cases}$$

або інакше

$$\begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}(|a_1|^2 + |a_2|^2)|\sin\Theta\cos\phi| > 1, & n \text{ – парне,} \\ 2^{\frac{n}{2}-1}(|a_1|^2 + |a_2|^2)|\sin\Theta\cos\phi| > 1, & n \text{ – непарне.} \end{cases} \tag{16}$$

Висновки, що випливають з нерівностей (15) і (16) подібні висновкам, зробленим вище для нерівності Мерміна: при достатньо великих значеннях n всі стани $|\Psi\rangle$, для яких $Q = (|a_1|^2 + |a_2|^2)|\sin\Theta\cos\phi| \neq \neq 0$ порушують нерівність Ардехалі. В станах зі значенням $Q = 0$, оператор Ардехалі взагалі не може виявити наявність кореляцій. Серед усіх n-кубітових станів $|\chi_1\rangle$ та $|\chi_2\rangle$ найбільше порушують нерівність Ардехалі.

Тепер спробуємо розширити клас векторів станів n-кубітових систем, в яких можна виявити кореляції. Для цього в операторі Ардехалі $\hat{A} = = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\prod_{j=1}^n \sigma_+^j + \prod_{j=1}^n \sigma_-^j)$ частину множників σ_+^j треба замінити на σ_-^j в першому доданку виразу, і одночасно відповідні множники σ_-^j замінити на σ_+^j в другому доданку, а також в стані $|\chi_2\rangle$ (14) провести заміну відповідних одночастинкових станів $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$, наприклад:

$$\hat{A} \to \tilde{\hat{A}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\prod_{j=1}^{m}\sigma_-^j \otimes \prod_{j=m+1}^{m}\sigma_+^j + \right.$$
$$\left. + \prod_{j=1}^{m}\sigma_+^j \otimes \prod_{j=m+1}^{m}\sigma_-^j\right),$$
$$|\chi_2\rangle \to |\tilde{\chi}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{|\downarrow\downarrow ... \downarrow\rangle}_{m} \otimes \underbrace{|\uparrow\uparrow ... \uparrow\rangle}_{n-m} -$$
$$- \underbrace{|\uparrow\uparrow ... \uparrow\rangle}_{m} \otimes \underbrace{|\downarrow\downarrow ... \downarrow\rangle}_{n-m}),$$

то очевидно, що

$$\langle\tilde{\chi}_2|\tilde{\hat{A}}|\tilde{\chi}_2\rangle = \langle\chi_2|\hat{A}|\chi_2\rangle = 2^{n-\frac{1}{2}}.$$

Повний стандартний базис в 2^n-вимірному гільбертовому просторі n-кубітових систем розіб'ємо на упорядковані пари $\{|\eta_k\rangle$ і $|\bar{\eta}_k\rangle\}$, де вектор $|\eta_k\rangle$ отримується з $|\eta_1\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\rangle$ заміною деякої сукупності $m \le 2^{n-1}$ одночастинкових станів $|\uparrow\rangle$ з номерами $j_1, j_2, ..., j_m$ на протилежні стани $|\downarrow\rangle$, а вектор $|\bar{\eta}_k\rangle$ отримується з $|\eta_k\rangle$ заміною в ньому всіх одночастинкових станів на протилежні: $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$, наприклад:

$$|\eta_1\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\rangle \to |\bar{\eta}_1\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow ... \downarrow\downarrow\rangle,$$
$$|\eta_2\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\downarrow\rangle \to |\bar{\eta}_2\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow ... \downarrow\uparrow\rangle \text{ і т.д.}$$

При таких позначеннях k – це набір номерів кубітів $j_1, j_2, ..., j_m$ зі станами яких було виконано заміну. Очевидно, що таким чином з повного базису утворюється 2^{n-1} пар базисних станів. Відповідно через $\hat{A}_k$ позначимо оператор, котрий утворюється з оператора $\hat{A}_1$ заміною одночастинкових операторів з номерами $j_1, j_2, ... j_m$ на протилежні $\sigma_+^j \leftrightarrow \sigma_-^j$. Оператори $\hat{A}_k$ умовно назвемо модифікованими операторами Ардехалі.

Тепер довільний n-кубітовий стан $|\Psi\rangle$ можна представити у вигляді розкладу

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}}(a_{1k}|\eta_k\rangle + a_{2k}|\bar{\eta}_k\rangle),$$

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(|a_{1k}|^2+|a_{2k}|^2)=1. \tag{17}$$

Вводячи позначення

$|\mu_k\rangle = a_{1k}|\eta_k\rangle + a_{2k}|\bar{\eta}_k\rangle$,

і беручи до уваги, що $\langle\mu_k|\hat{A}_{k'}|\mu_k\rangle = 0$, якщо $k \neq k'$, можна записати

$$\langle\Psi|\hat{A}_k|\Psi\rangle = \langle\mu_k|\hat{A}_k|\mu_k\rangle = F_k = -2^{n+\frac{1}{2}}|a_{1k}a_{2k}|\cos\phi_k, \tag{18}$$

де

$a_{1k} = \langle\eta_k|\Psi\rangle = |a_{1k}|e^{i\phi_{1k}}, a_{2k} = \langle\bar{\eta}_k|\Psi\rangle =$
$= |a_{2k}|e^{i\phi_{2k}}, \phi_k = \phi_{2k} - \phi_{1k}.$

Отже, обчисливши всі проекції вектора $|\Psi\rangle$ на базисні стани стандартного базису, можемо знайти всі значення F_k і шляхом порівняння знайдемо найбільше значення F_k. Результат (18) відноситься до $\hat{A}_k$ типу операторів Ардехалі.

Очевидно, що аналогічні вектори $|\mu_k\rangle$ і оператори $\hat{A}_k$ можна ввести при розгляді нерівності Мерміна. Знаходження значень F_k дозволяє додатково виявити кореляції в стані $|\Psi\rangle$.

Таким чином, якщо замість оператора Ардехалі (Мерміна) застосувати всю сукупність модифікованих операторів $\{\hat{A}_k\}$, то можна розширити клас векторів станів n-кубітових систем, в яких можна виявити кореляції з факту порушення відповідних нерівностей.

Однак, слід зауважити, що навіть вся сукупність операторів $\hat{A}_k$ не може виявити всіх видів заплутаності в n-кубітових станах. Так, якщо в (17) усі коефіцієнти a_{1k} або всі коефіцієнти a_{2k} дорівнюють нулю, то вся сукупність узагальнених операторів $\hat{A}_k$ не може виявити кореляцій у таких станах $|\Psi\rangle$. До того ж, оператори $\hat{A}_k$ не можуть виявити кореляцій в узагальненому стані Вігнера:

$$|\Psi_w\rangle = \big(\alpha_1|\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \alpha_2|\uparrow\uparrow ... \uparrow\downarrow\uparrow\rangle + ... +$$
$$+ \alpha_n|\downarrow\uparrow ... \uparrow\uparrow\uparrow\rangle\big).$$

Це говорить про те, що нерівність Ардехалі (як і нерівність Мерміна) не можна розглядати в якості узагальнення нерівності Белла у формі CHSH на випадок n-кубітових квантових систем. Тим не менш дані нерівності є потужним інструментом для виявлення кореляцій для певного класу n-кубітових систем.

4. Висновки

В даній роботі проведено повний аналіз здатності відомих операторів кореляційних функцій Мерміна та Ардехалі виявляти наявність квантових кореляцій (заплутаності) окремо в узагальнених двопараметричних станах n-кубітових GHZ-станах та в довільних n-кубітових станах. Визначено області значень параметрів векторів станів, при яких окремо нерівність Мерміна та нерівність Ардехалі порушуються. Отримано вирази, які визначають степінь такого порушення. Визначена множина векторів станів, до яких оператори Мерміна і Ардехалі зовсім нечутливі, тобто вони (оператори) не можуть виявити наявність кореляцій, які в дійсності присутні. Запропоновано узагальнення операторів Мерміна і Ардехалі, що дозволяє дещо розширити клас n-кубітових станів, в яких можна виявити наявність квантових кореляцій. Вважаємо, що дана робота повністю закриває питання про доцільність використання нерівності Мерміна і Ардехалі до того чи іншого класу багатокубітових станів.

ДОДАТОК

Покажемо, що введений нами оператор кореляційної функції

$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2,$

де

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= -\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j + \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_+^n + \sigma_-^n),\\ \hat{A}_2 &= \frac{1}{2i}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j - \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right)\frac{1}{i\sqrt{2}}(\sigma_+^n - \sigma_-^n)\end{aligned} \tag{19}$$

повністю відповідає оператору Ардехалі (13).

Приведемо тут оператор Ардехалі у формі із оригінальної роботи [11] і проаналізуємо його структуру:

$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2,$

де

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 = (&-\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_x^3 ... \sigma_x^{n-1} + \sigma_y^1\sigma_y^2\sigma_x^3 ... \sigma_x^{n-1} + ... -\\ &- \sigma_y^1\sigma_y^2\sigma_y^3\sigma_y^4\sigma_x^5 ... \sigma_x^{n-1} - ... +\\ &+ \sigma_y^1 ... \sigma_y^6\sigma_x^7 ... \sigma_x^{n-1} + ... - ...)(\sigma_a^n - \sigma_b^n),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_2 = (&\sigma_y^1\sigma_x^2 ... \sigma_x^{n-1} + ... - \sigma_y^1\sigma_y^2\sigma_y^3\sigma_x^4 ... \sigma_x^{n-1} - ... +\\ &+ \sigma_y^1 ... \sigma_y^5\sigma_x^6 ... \sigma_x^{n-1} + ... -\\ &- \sigma_y^1 ... \sigma_y^7\sigma_x^8 ... \sigma_x^{n-1} - ... + ...)(\sigma_a^n + \sigma_b^n).\end{aligned} \tag{21}$$

Розглянемо структуру виразу в першій парі дужок в $\hat{A}_1$. В першому доданку відсутні множники σ_y. У другому доданку присутні два множники σ_y. Далі знак "+..." означає, що слід також записати доданки з двума множниками $\sigma_y^i \sigma_y^j$ зі всіма можливими індексами $i < j$. Число таких доданків рівне числу комбінацій із $n-1$ елементів по 2 елементи (біноміальний коефіцієнт).

Такі доданки в розглянутому виразі містять усі можливі різноманітні комбінації з чотирма множниками $\sigma_y^i \sigma_y^j \sigma_y^k \sigma_y^l$, $i < j < k < l$. Число таких доданків рівне числу комбінацій із $n-1$ елементів по чотири елементи. Зазначимо, що всі доданки з числом множників σ_y кратним 4, $N = 4k$, $k = 0, 1, 2$ входять в $\hat{A}_1$ зі знаком "$-$", усі інші – зі знаком "$+$".

Аналогічно в $\hat{A}_2$ входять доданки – усі можливі комбінації з непарним числом (не перевищуючим значення $n-1$) множників типу σ_y. Причому доданки з числом таких множників $N = 4k + 1$, $k = 0, 1, 2...$ входять зі знаком "$+$" усі інші - зі знаком "$-$".

Як приклад наведемо повні вирази $\hat{A}_1$ та $\hat{A}_2$ для значення $n = 6$ $(n - 1 = 5)$. Для спрощення запису вважаємо, що номера частинок ідуть в порядку зростання і ці номери не будемо писати у явному вигляді, наприклад: $\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 \sigma_x^4 \sigma_x^5 = \sigma_y \sigma_x \sigma_y \sigma_x \sigma_x$. Тоді:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1 = &(-\sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_x + \sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_x + \sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_x + \\
&+ \sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_x + \sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_x + \\
&+ \sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_x + \sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_x + \\
&+ \sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_y - \sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_x - \\
&- \sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_y - \sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_y - \\
&- \sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_y)(\sigma_a^n - \sigma_b^n), \\
\hat{A}_2 = &(+\sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_x + \sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_x + \sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_x + \\
&+ \sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_x + \sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_x - \\
&- \sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_x - \sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_x - \\
&- \sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_y - \sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_x - \\
&- \sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_y\sigma_x\sigma_y\sigma_y - \sigma_x\sigma_x\sigma_y\sigma_y\sigma_y + \\
&+ \sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_y\sigma_y)(\sigma_a^n + \sigma_b^n).
\end{aligned}$$

Розглянемо тепер вираз для $\hat{A}_1$ прийнятий нами. Запишемо його у вигляді:

$$\hat{A}_1 = -\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j + \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_+^n + \sigma_-^n). \tag{22}$$

Вираз у перших дужках:

$$\begin{aligned}
\hat{B} = &\left(\prod_{j=1}^{n-1}\sigma_+^j + \prod_{j=1}^{n-1}\sigma_-^j\right) = \\
= &(\sigma_x^1 + i\sigma_y^1)(\sigma_x^2 + i\sigma_y^2)(\sigma_x^3 + i\sigma_y^3)...(\sigma_x^{n-1} + i\sigma_y^{n-1}) + \\
+ &(\sigma_x^1 - i\sigma_y^1)(\sigma_x^2 - i\sigma_y^2)(\sigma_x^3 - i\sigma_y^3)...(\sigma_x^{n-1} - i\sigma_y^{n-1}).
\end{aligned}$$

Відволічемось поки від істинного значення σ_x та σ_y і будемо вважати ці величини деякими дійсними параметрами. Тоді:

$$\begin{aligned}
\hat{B} = &2\mathrm{Re}\{(\sigma_x^1 + i\sigma_y^1)(\sigma_x^2 + i\sigma_y^2) \times \\
&\times (\sigma_x^3 + i\sigma_y^3)...(\sigma_x^{n-1} + i\sigma_y^{n-1})\}.
\end{aligned}$$

Розкриваючи дужки і беручи дійсну частину від даного виразу, а також враховуючи, що $i^{4k} = (-i)^{4k} = 1$, $k = 0, 1, 2, ...$, а $i^{2(2k+1)} = -1$, отримуємо, що (22) у точності збігається з (20). Аналогічні міркування показують, що $\hat{A}_2$ у вигляді (19) в точності збігається з $\hat{A}_2$ введеним Ардехалі (21).

1. G. Gour, N.R. Wallach. The resource theory of quantum reference frames: Manipulations and monotones. *New J. Phys.* **13**, 073013 (2011) [DOI: 10.1088/1367-2630/10/3/033023].
2. M. Walter, B. Doran, D. Gross, M. Christandl. Entanglement polytopes: Multiparticle entanglement from single-particle information. *Science* **340**, 1205 (2013) [DOI: 10.1126/science.1232957].
3. W. Dür, H.J. Briegel, J.I. Cirac, P. Zoller. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A* **62**, 062314 (2000) [DOI: 10.1103/PhysRevA.62.062314].
4. G. Gour, N.R. Wallach. All maximally entangled four-qubit states. *J. Meth. Phys. (N.Y.)* **51**, 112201 (2010) [DOI: 10.1063/1.3511477].
5. G. Gour, N.R. Wallach. Classification of multipartite entanglement of all finite dimensionality. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 060502 (2013) [DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.060502].
6. N. Gisin. Bell's inequality holds for all non-product states. *Phys. Lett. A* **154**, 201 (1991) [DOI: 10.1016/0375-9601(91)90805-I].
7. N. Gisin, A. Peres. Maximal violation of Bell's inequality for arbitrarily large spin. *Phys. Lett. A* **162**, 15 (1992) [DOI: 10.1016/0375-9601(92)90949-M].
8. J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969) [DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.880].
9. Jing-Ling Chen, Chunfeng Wu, L.C. Kwek, C.H. Oh. Gisin's theorem for three qubits. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140407 (2004) [DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.140407].
10. N.D. Mermin. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1838 (1990) [DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.1838].
11. M. Ardehali. Bell inequalities with a magnitude of violation that grows exponentially with the number of particles. *Phys. Rev. A* **46**, 5375 (1992) [DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5375].
12. A.V. Belinski, D.N. Klyshko. Interference of light and Bell's theorem. *Phys. Usp.* **36**, 653 (1993) [DOI: 10.1070/PU1993v036n08ABEH002299].
13. D.M. Greenberger, M. Horne, A. Shimony, A. Zeilenger. Bell's theorem without inequalities. *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990) [DOI: 10.1119/1.16243].
14. V. Scarani, N. Gisin. Spectral decomposition of Bell's operators for qubits. *J. Phys. A* **34** 6043 (2011) [DOI: 10.1088/ 0305-4470/34/30/314].

Одержано 18.11.15

I.S. Dotsenko, P.S. Korobka

DETECTION OF THE ENTANGLEMENT
IN MANY-QUBIT QUANTUM SYSTEMS ON THE BASIS
OF THE MERMIN AND ARDEHALI CRITERIA

S u m m a r y

A possibility to reveal the entanglement in generalized n-qubit two-parameter GHZ states, as well as in any n-qubit states, with the help of the Mermin and Ardehali inequalities from the collection generally called the Mermin–Ardehali–Belinskii–Klyshko inequalities has been studied. Formulas for the calculation of the Mermin and Ardehali correlation functions in any quantum n-qubit states are derived, and criteria of the violation of corresponding inequalities by specific states are obtained. A set of states that are absolutely insensitive to the Mermin and Ardehali operators is revealed. Modified Mermin and Ardehali operators are proposed, the set of which makes it possible to extend the class of n-qubit states, in which quantum correlations can be revealed.