І.В. СИМЕНОГ, Б.Є. ГРИНЮК, М.В. КУЗЬМЕНКО
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14b, Київ 03143; e-mail: bgrinyuk@bitp.kiev.ua)

УДК 530.145

ПРО НЕЕФЕКТИВНІСТЬ ВІДШТОВХУВАЛЬНИХ δ-ПОТЕНЦІАЛІВ У БАГАТОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Показано, що δ-подібні відштовхувальні потенціали взаємодії при повному врахуванні кореляцій є неефективними для будь-якої N-частинкової квантової системи у D-вимірному просторі при $D \geq 2$.

Ключові слова: N-частинкова система; D-вимірний простір; δ-подібний потенціал взаємодії; енергетичний спектр; хвильові функції.

1. Вступ

Починаючи з Фермі та Геперт–Майєр, в різних областях теоретичної фізики використовуються спрощені варіанти взаємодії у формі δ-подібних потенціалів взаємодії. Проблематичним свого часу було обговорення ролі поправок на релятивізм у вигляді δ-потенціалів до кулонівської взаємодії в КЕД при розгляді квазірелятивістичних потенціалів типу Брейта [1]. В наш час актуальні дослідження ефектів бозе-конденсації ґрунтуються на використанні самоузгодженого поля Гроса–Пітаєвського [2, 3] та використанні ідеї δ-подібних потенціалів (див. [4]). Взагалі різноманітні D-вимірні нелінійні еволюційні рівняння типу нелінійного рівняння Шрьодінгера часто розглядаються як такі, що пов'язані з багаточастинковими системами з δ-подібними потенціалами взаємодії. В ядерній фізиці продовжують бути популярними деякі варіанти ефективних сил Скірма [5] (див. [6, 7]) у формі суперпозиції дво- та тричастинкових δ-подібних потенціалів як моделі взаємодії між нуклонами, яка використовується для опису структурних властивостей атомних ядер, від легких і середніх ядер до найважчих, у найпростішому наближенні одночастинкового середнього самоузгодженого поля.

Зауважимо, що під час розгляду задач із δ-потенціалами дуже часто обмежуються розрахунком у першому порядку за теорією збурень (який зручно обчислювати саме з такими потенціалами), припускаючи, що точний розв'язок задачі не змінить якісної картини. Однак таке припущення нічим не обґрунтоване. У даній роботі ми досліджуємо питання щодо можливості і ефективності використання δ-потенціалів у багаточастинкових системах різної вимірності і роль послідовного врахування парних кореляційних ефектів у таких задачах.

2. Постановка проблеми і її попередній аналіз

Розглянемо у D-вимірному просторі квантову систему N частинок, взаємодія між якими містить парні δ-подібні потенціали взаємодії на додачу до деяких стандартних парних потенціалів $U(r_{ij})$. Крім того, система може бути поміщена у деяке зовнішнє потенціальне поле $V(\mathbf{r})$:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right) + \sum_{j>i=1}^{N} U(r_{ij}) + + g \sum_{j>i=1}^{N} \delta_\varepsilon (\mathbf{r}_{ij}). \quad (1)$$

Тут і у подальшому δ-функції визначаються через послідовність δ_ε-подібних функцій, зокрема, у вигляді

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,\varepsilon)^D}\, e^{-\mathbf{x}^2/\varepsilon^2}, \quad \delta_\varepsilon(\mathbf{x}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \delta(\mathbf{x}), \tag{2}$$

де $\mathbf{x}^2 \equiv \sum_{k=1}^{D} x_k^2$ – квадрат інтервалу у D-вимірному просторі. Взагалі кажучи, конкретна форма δ_ε не є суттєвою і вибрана у вигляді (2) для зручності. Важливо, що граничний перехід $\varepsilon \to 0$ слід розуміти як такий, що повинен виконуватися в кінцевих розв'язках задачі, отриманих при всякому фіксованому ε.

Спочатку для простоти аналізу проблеми розглянемо модель двох частинок, які взаємодіють через осциляторний плюс відштовхувальний δ-потенціал (в системі центра мас, з одиничною зведеною масою та одиничною частотою осцилятора):

$$\left(-\frac{1}{2}\triangle + \frac{1}{2}\mathbf{r}^2 + g\delta(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Які фізичні наслідки матиме наявність δ-потенціалу в (3) у D-вимірному просторі? Можна переконатись, що в одновимірному випадку, завдяки дії відштовхувального δ-потенціалу, всі осциляторні рівні додатної парності повинні зсуватися вгору, і при $g \to \infty$ вони повинні досягти сусідніх непарних осциляторних рівнів. У той самий час непарні осциляторні рівні не зсуваються під дією δ-потенціалу, який є неефективним для цих станів (бо відповідні хвильові функції рівні нулю там, де зосереджена δ-функція).

Розглянемо тепер нетривіальний тривимірний випадок для рівняння (3) і сферично-симетричний стан системи (оскільки δ-потенціал є неефективним для станів з ненульовими кутовими моментами завдяки множнику $\sim r^l$ у хвильовій функції). Якщо ми розкладемо розв'язок рівняння Шрьодінгера (3) в ряд за власними осциляторними функціями нульової (незбуреної δ-потенціалом) задачі,

$$\psi(r) = \sum_k c_k \psi_k(r), \tag{4}$$

то отримаємо явний розв'язок

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{K} \frac{|\psi_i(0)|^2}{(E-E_i)^2}}} \sum_{k=0}^{K} \frac{\psi_k^*(0)}{E-E_k}\psi_k(r), \tag{5}$$

який наближається до точного зі зростанням K, і при $K \to \infty$ він був би точним, якби ряд збігався. Рівні енергії для задачі (5) у D-вимірному просторі визначаються із секулярного рівняння:

$$\frac{1}{g} = \sum_{k=0}^{K} \frac{|\psi_k(0)|^2}{E-E_k} = \\ = \frac{1}{\pi^{D/2}\Gamma(D/2)} \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{\Delta - 2k} \frac{\Gamma(k+D/2)}{\Gamma(k+1)}, \tag{6}$$

де $\Delta \equiv E - D/2$ – зсув енергії, а $\Gamma(z)$ – гамма-функція Ойлера. При фіксованому K трансцендентне рівняння (6) має розв'язок Δ_0 для зсуву енергії основного стану вгору, очевидно, в інтервалі $0 < \Delta_0 < 2$. Зсув Δ_1 першого збудженого стану лежить в інтервалі $2 < \Delta_1 < 4$, зсув наступного рівня Δ_2 – в межах $4 < \Delta_2 < 6$, і так далі. Доданки $b_k = \frac{1}{\Delta-2k}\frac{\Gamma(k+D/2)}{\Gamma(k+1)}$ в сумі (6) при великих k мають асимптотику

$$b_k \approx C\, k^{D/2-2}, \tag{7}$$

і при розширенні базису ($K \to \infty$) сума в (6) розбігається для $D \geq 2$. Для граничного двовимірного випадку ряд (6) логарифмічно розбігається, тоді як для вищих розмірностей він розбігається за степеневим законом. Можна переконатись, що в результаті у випадку $D \geq 2$ енергетичні рівні основного і збуджених рівнів наближаються при $K \to \infty$ все ближче і ближче до відповідних осциляторних (незбурених) рівнів, тобто зсуви рівнів стають нульовими. Зокрема, енергія основного стану прямує до незбуреного рівня енергії як

$$\begin{aligned} &E_0 \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \frac{D}{2} + \frac{(D-2)\,\Gamma(D/2)}{(K+D/2)^{(D-2)/2}}, \quad D \geq 2; \\ &E_0 \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 1 + \frac{2}{\ln K + \gamma}, \quad D = 2, \end{aligned} \tag{8}$$

де $\gamma = 0{,}5772\ldots$ – константа Ойлера. Одночасно і хвильова функція прямує до незбуреної осциляторної функції на всіх відстанях, крім точки $r = 0$, де вона стає $\psi(0) = 0$.

Для ілюстрації того, що відбувається із хвильовою функцією (5) при розширенні базиса, на рис. 1 ми наводимо послідовні наближення для функції основного стану, обчислені для різних K у тривимірному випадку (для конкретності взято $g = 1$).

Подібні розрахунки можна було б навести для різних $D \geq 2$ та різних констант g. Чим більше K, тим менше значення хвильової функції в точці $r = 0$, тому все меншою стає роль відштовхувального δ-потенціалу, інтеграл від якого з квадратом модуля хвильової функції прямує до нуля. У границі $K \to \infty$ внесок відштовхувального δ-потенціалу стає точно рівним нулю (для $D \geq 2$). Зауважимо також, що в інших точках послідовні наближення прямують до незбуреної функції, хоча і нерівномірно.

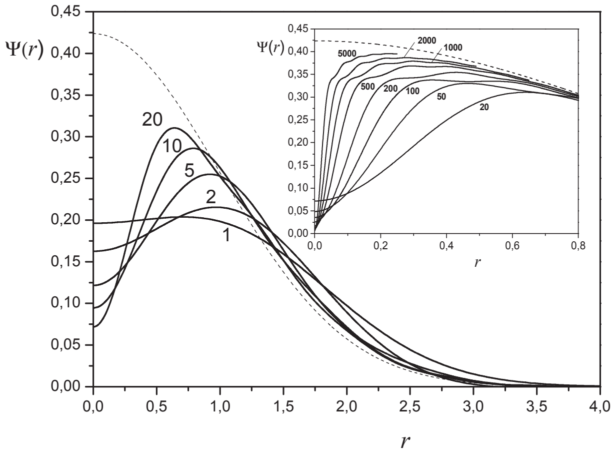
Таким чином, відштовхувальний δ-потенціал з довільною константою g не зсуває рівні енергії і майже скрізь, за виключенням точки розриву в початку координат, не змінює хвильові функції незбуреної задачі, тобто є неефективним у випадку $D \geq 2$.

Необхідно ще раз підкреслити, що розглядати задачу (3) для $D \geq 2$, обмежуючись першими наближеннями за теорією збурень по δ-потенціалу, не має ніякого сенсу. Зокрема, в першому порядку для рівнів енергії $E_n^{(1)}$ маємо

$$E_n^{(1)} = 2n + \frac{D}{2} + g\left|\psi_n(0)\right|^2, \tag{9}$$

тоді як вищі поправки складають розбіжні ряди. А точна відповідь для зсуву енергії – нуль, тобто відштовхувальний δ-потенціал є неефективним для $D \geq 2$, що надійно демонструє лише непертурбативний аналіз. В наступному розділі ми наводимо доведення цього факту на основі варіаційного принципу, без використання теорії збурень.

Для підтвердження загальних висновків щодо ролі δ-подібних потенціалів продемонструємо подібні результати у випадку $D = 3$ для іншої форми зовнішнього поля (замість осцилятора в (3)) – для сферичної прямокутної ями радіуса R, коли $V(r) = 0$ для $r < R$ і $V(r) \to \infty$ для $r > R$. Крім того, замість послідовності δ_ε у вигляді (2) виберемо потенціал δ_ε у вигляді сферичної сходинки радіуса ε (потенціал відмінний від нуля для $r < \varepsilon$, де він рівний константі $\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}g$). До границі $\varepsilon \to 0$ перейдемо у розв'язках, які знаходяться у явному вигляді. Можна безпосередньо показати, що енергія основного стану цієї системи при $\varepsilon \to 0$ наближається до енергії $E_0 = \frac{\pi^2}{R^2}$ незбуреної задачі для сферичної потенціальної ями як $E_\varepsilon \equiv k^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{(R-\varepsilon)^2}\left(1 - 2\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{3g}}\frac{\varepsilon}{R} + ...\right)$. Відповідна



Послідовні наближення для хвильової функції (5) основного стану задачі (3) у тривимірному випадку. Цифри біля кривих означають кількість K врахованих базисних функцій. На вставці – область малих відстаней для великих K. Пунктиром показана хвильова функція незбуреної задачі

хвильова функція для $\varepsilon < r < R$ також наближається до незбуреної: $\psi_\varepsilon(r) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \psi_0(r) = \frac{\sin(k_0 r)}{r}$, де $k_0 = \pi/R$. І лише всередині області дії відштовхувального потенціалу хвильова функція швидко спадає при наближенні до початку координат по закону $\psi_\varepsilon(r) = c\frac{\mathrm{sh}(\lambda r)}{r}$ (де $\lambda = \sqrt{\frac{3g}{4\pi\varepsilon^3} - k^2}$), приймаючи в нулі експоненційно мале значення $\psi_\varepsilon(0) = c\lambda \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{2\pi}{R}\exp\left(-\sqrt{\frac{3g}{4\pi\varepsilon}}\right)$. Навіть для випадку $g \to \infty$ (для відштовхувального кора) як енергія основного стану $E_\varepsilon = k^2 = \frac{\pi^2}{(R-\varepsilon)^2}$, так і хвильова функція $\psi_\varepsilon(r) = \frac{1}{r}\sin\left(\pi\frac{(R-r)}{(R-\varepsilon)}\right)$ наближаються (в області $r > \varepsilon$) до незбурених значень в границі $\varepsilon \to 0$. А якщо цей висновок справедливий навіть для твердого кора, то він тим більше правильний для більш слабкого відштовхувального потенціалу скінченного радіуса ε довільної форми. Відзначимо, що для швидкоспадних відштовхувальних потенціалів, зокрема таких як (2), всі основні результати також не залежать від конкретної їхньої форми.

Зауважимо, що для $D < 2$ сума в (6) збігається як для відштовхувальних, так і для притягувальних δ-потенціалів. Отже, для $D < 2$ (зокрема, для одновимірного випадку, що часто використовується) маємо скінченні зсуви енергетичних рівнів (вгору – для відштовхувальних δ-потенціалів), і суттєво змінені хвильові функції. У випадку притягувального δ-потенціалу для $D < 2$ енергія основного стану зсувається вниз ($\Delta_0 < 0$), так само як і збуджені рівні, зсуви яких однак залишаються в межах інтервалів $2\,(n-1) < \Delta_n < 2n$. Отже, завдяки притягувальному δ-потенціалу у випадку $D < 2$ в системі (3) може виникнути лише один зв'язаний стан з від'ємною енергією у відповідності з тим фактом, що δ-потенціал – оператор першого рангу.

Особливу роль відіграє притягувальний δ-потенціал для випадку $D \geq 2$, коли задача (3), як відомо, не має сенсу завдяки колапсу в системі. Із загальної точки зору, для $D \geq 2$ сума стандартного гамільтоніана, що має розподілений у просторі звичайний потенціал взаємодії, і притягувального δ-потенціалу стає оператором, не обмеженим знизу, і основний стан системи стає невизначеним. В цьому випадку немає ніякого сенсу користуватися розкладами типу (5), (6), які стають невизначеними. В той самий час розгляд цієї задачі у першому порядку за теорією збурень також не має сенсу, бо знову дає для енергії результат (9), який не має ніякого відношення до кінцевої відповіді. Відзначимо також відомий важливий приклад задачі трьох частинок у границі нульового радіуса сил [8]. Зауважимо, що границю нульового радіуса сил на мові потенціалів можна було б інтерпретувати як притягування між частинками із δ-подібними (типу (2)) потенціалами взаємодії, але такої інтенсивності притягування, яка при $\varepsilon \to 0$ також прямує до нуля по закону, який дозволяє зафіксувати скінченну (наперед задану) енергію зв'язаного стану двох частинок. Але навіть для такого "послабленого" варіанта δ-подібного потенціалу притягання в системі трьох (а тим паче більшого числа) частинок спостерігатиметься колапс. Детально колапс в системі трьох частинок у границі нульового радіуса сил у тривимірному просторі досліджено в роботах [9, 10], в яких навіть встановлено, по якому закону рівні енергії (кількість яких стає нескінченною) прямують до мінус безмежності, і передбачені основні співвідношення сформульованого пізніше відомого ефекту Єфімова.

Висновки, отримані для задачі (3) як для відштовхувального, так і для притягувального δ-потенціалів, цілком підтверджуються іншими прикладами подібних задач (зокрема, крім згаданого вище прикладу взаємодії в зовнішній області у вигляді сферичної ями, можна взяти інші приклади, що розв'язуються точно, такі як D-вимірний кубічний ящик з нескінченними стінками, кулонівський потенціал, на чому ми не зупиняємося заради економії місця). В усіх подібних випадках розбіжність (при $D \geq 2$) рядів типу (6) приводить до результатів, аналогічних до (8). Основний висновок доцщо неефективності відштовхувального δ-потенціалу у випадку $D \geq 2$ залишається справедливим. Зауважимо, що для задач із зовнішніми потенціалами, які породжують скінченну кількість дискретних рівнів плюс неперервний спектр, при розгляді узагальнених виразів типу (6) з додатковим (до суми по дискретному спектру) інтегралом по неперервному спектру, всі основні висновки щодо неефективності δ-потенціалу залишаються в силі.

В наступному розділі ми дамо доведення наведених вище попередніх міркувань на основі варіаційного принципу при досить загальних припущеннях щодо гамільтоніана, що містить відштовхування у вигляді δ-потенціалу.

3. Доведення на основі варіаційного принципу

Ми розглянемо детально спочатку найбільш тонкий для доведення випадок $D = 2$ (він є "критичним" випадком, оскільки для $D < 2$ відштовхувальний δ-потенціал стає ефективним і впливає на фізичні спостережувані та змінює хвильові функції). Щодо гамільтоніана системи, незбуреного δ-потенціалом, ми залишаємо найзагальніші припущення, аби хвильові функції незбуреної задачі були обмеженими при $r = 0$, що справедливо для широкого класу звичайних потенціалів $V\,(r)$. Нехай у системі є основний зв'язаний стан з енергією E_0 та хвильовою функцією $\psi_0\,(r)$, існування якого зумовлене наявністю потенціалу $V\,(r)$. Маючи на увазі попередній розгляд можливого впливу δ-потенціалу на систему і розуміючи, що принципово важливим є врахування поведінки хвильової функції на малих відстанях, для варіаційної оцінки енергії основного стану будуємо пробну функцію $\psi\,(r)$ у вигляді

$$\psi\,(r) = f\,(r)\,\psi_0\,(r), \tag{10}$$

де кореляційний фактор виберемо у формі $f\,(r) \equiv \equiv 1 - \exp\Big(-\,(\beta r)^{1/\alpha}\Big)$, в якому параметр $\alpha = = \alpha(\beta)$ – необмежено зростаюча функція від β

(тобто $\alpha(\beta) \xrightarrow[\beta\to\infty]{} \infty$). Опускаючи загальний аналіз можливих залежностей $\alpha = \alpha(\beta)$, ми обмежимося одним прикладом $\alpha \equiv \ln(\ln\beta)$, достатнім для доведення нашого твердження. Позначимо через E_0 енергію, а через $\psi_0(r)$ – відповідну хвильову функцію основного стану незбуреної (δ-потенціалом) задачі. Варіаційну оцінку на хвильових функціях (10) для енергії основного стану, що відповідає гамільтоніану з додатковим відштовхувальним δ-потенціалом, можна подати у вигляді:

$$E \le \frac{\int \psi^*(r)\left(-\frac{1}{2}\triangle + V(r) + g\delta(\mathbf{r})\right)\psi(r)\,d\mathbf{r}}{\int |\psi(r)|^2\,d\mathbf{r}} \equiv$$
$$\equiv E_0 + \frac{\frac{1}{2}\int |\psi_0(r)|^2 (\nabla f(r))^2\,d\mathbf{r}}{\int |\psi_0(r)|^2 f^2(r)\,d\mathbf{r}}, \tag{11}$$

де інтегрування ведеться по двовимірному простору. Зауважимо, що δ-потенціал сам по собі дає нульовий внесок в чисельнику (11) завдяки властивості кореляційного фактора $f(0) = 0$. Але, завдяки тому ж кореляційному фактору, в (11) виникає додатковий до E_0 доданок від оператора кінетичної енергії. Якщо нормована хвильова функція незбуреної задачі обмежена, $|\psi_0(r)|^2 \le C_0$ (що справедливо для будь-якого несингулярного гамільтоніана), то інтеграл нормування в знаменнику в (11) при $\beta\to\infty$ прямує до одиниці:

$$\int |\psi(r)|^2\,d\mathbf{r} \xrightarrow[\beta\to\infty]{} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha\Gamma(2\alpha)}{\beta^2}\right) \xrightarrow[\beta\to\infty]{} 1, \tag{12}$$

завдяки $\alpha = \ln(\ln\beta)$ і асимптотичним властивостям $\Gamma(z)$-функції. Розглянемо тепер інтеграл в чисельнику виразу (11):

$$\frac{1}{2}\int |\psi_0(r)|^2 (\nabla f(r))^2\,d\mathbf{r} \le \frac{1}{2}C_0 \int (\nabla f(r))^2\,d\mathbf{r} =$$
$$= \frac{\pi C_0}{4\alpha}. \tag{13}$$

Отже, ми маємо $E \le E_0 + \frac{\pi C_0}{4\alpha} \xrightarrow[\beta\to\infty]{} E_0$. Оскільки відштовхувальний δ-потенціал міг би зсувати рівень енергії лише вгору, тобто $E \ge E_0$, ми остаточно отримуємо $E = E_0$ у двовимірному випадку.

Для просторів більшої вимірності доведення суттєво спрощується, оскільки чим більше D, тим більш суттєву роль відіграє фазовий множник при інтегруванні на малих відстанях. Вже для $D > 2$ достатньо для пробної хвильової функції у вигляді (10) вибрати більш простий кореляційний множник, наприклад,

$$f(r) = 1 - \exp\left(-(r/b)^2\right), \tag{14}$$

і попрямувати b до нуля в кінцевих виразах. Використовуючи саме такий кореляційний фактор, ми розглянемо проблему ефективності δ-потенціалу у випадку $D > 2$ в задачах за участю N частинок. Для варіаційної оцінки енергії основного стану системи ми використаємо пробну варіаційну функцію у вигляді

$$\Psi = \Psi_0 F(r_{12}, r_{13}, ...) = \Psi_0 \prod_{i>j=1}^{N} f(r_{ij}), \tag{15}$$

де парні кореляційні фактори $f(r_{ij})$ мають вигляд (14), а функція Ψ_0 – хвильова функція основного стану гамільтоніана H_0, який відрізняється від (1) відсутністю доданка $\delta V = g\sum_{i>j=1}^{N}\delta(\mathbf{r}_{ij})$. Для енергії основного стану задачі (1) отримаємо варіаційну оцінку (подібну до (11)):

$$E \le E_0 + \frac{\frac{1}{2m}\sum\limits_{i=1}^{N}\int (d\mathbf{r})^N |\Psi_0|^2 \left((\nabla_i F)^2 + \delta V F^2\right)}{\int (d\mathbf{r})^N |\Psi_0|^2 F^2} =$$
$$= E_0 + \frac{\frac{1}{2m}\sum\limits_{i=1}^{N}\int (d\mathbf{r})^N |\Psi_0|^2 (\nabla_i F)^2}{\int (d\mathbf{r})^N |\Psi_0|^2 F^2}. \tag{16}$$

Потенціал δV зникає з чисельника виразу (16) завдяки властивостям кореляційного фактора, на квадрат якого він домножується: $F = 0$, як тільки якась парна відстань $r_{ij} = 0$. Знову підкреслимо, що доданок до енергії E_0 в (16) виникає за рахунок дії оператора кінетичної енергії на кореляційні фактори. Ми опустимо безпосередні обчислення похідних від F і оцінку інтегралів в (16) при $b \to 0$, а наведемо лише кінцеву оцінку для енергії (у звичайному припущенні, що квадрат хвильової функції незбуреної задачі $|\Psi_0|^2 \le C_0$):

$$E \le E_0 + \mathcal{O}\left(b^{D-2}\right), \tag{17}$$

що при $b \to 0$ прямує до $E \le E_0$, причому тим швидше, чим вища вимірність простору. Оскільки апріорі зрозуміло, що відштовхувальний потенціал δV може привести лише до результату $E \ge E_0$, остаточно маємо $E = E_0$.

Відзначимо, що у випадку $D = 2$ для доведення можна взяти кореляційний фактор, використаний в (10) для задачі двох частинок, і повторити наведені міркування для системи N частинок. Але замість (17) в цьому випадку отримаємо оцінку типу (13).

Зауважимо, що отримані результати щодо неефективності відштовхувального δ-потенціалу у просторах $D \geq 2$ відносно просто узагальнюються на збуджені енергетичні стани. Для цього достатньо прийняти до уваги, що варіаційні хвильові функції n-го збудженого стану повинні бути ортогональними до функцій, що відповідають нижчим рівням. А це для функцій типу (10) або (15) (із заміною Ψ_0 на Ψ_n) у границі, коли радіус кореляцій прямує до нуля, виконується автоматично завдяки ортогональності функцій незбуреної задачі.

Важливо розуміти, що відштовхувальний δ-потенціал не впливає і на інші фізичні спостережувані. Зокрема, в [11] показано, що у двовимірному випадку (найбільш тонкому для доведення) відштовхувальний δ-потенціал не впливає на фази розсіяння. Це означає, що для $D > 2$ отриманий результат справедливий тим паче, що, на жаль, в [11] не підкреслюється. Якщо ж відштовхувальний δ-потенціал не впливає ні на спектр, ні на фази розсіяння, то такий потенціал є неефективним для $D \geq 2$.

4. Висновки

Таким чином, для квантових систем частинок, до взаємодії між якими входять δ-потенціали, у D-вимірному просторі для $D \geq 2$ встановлено неефективність відштовхувальних дельта-потенціалів взаємодії. Розгляд таких задач у першому порядку за теорією збурень дає хибні результати. Послідовне врахування кореляцій на малих відстанях показує, що такі потенціали не впливають на енергетичний спектр і інші фізичні спостережувані. З іншого боку, відомо, що притягувальні дельта-потенціали у випадку $D \geq 2$ призводять до колапсу в системі. Отже, дельта-потенціали ефективні лише для одновимірних задач. А для систем у просторах вимірності $D \geq 2$ і в точній постановці задачі взагалі не має сенсу вживати такого сорту потенціали взаємодії.

Автори вдячні О.С. Бакаю, І.М. Бурбану і П.М. Томчуку за корисні обговорення окремих порушених тут питань.

Робота частково підтримана Програмою фундаментальних досліджень Відділення фізики і астрономії Національної академії наук України (проект № 0112U000056).

1. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1969).
2. E.P. Gross, Nuovo Cimento **XX**, 454 (1961).
3. Л.П. Питаевский, ЖЭТФ **40**, 646 (1961).
4. Б.Б. Кадомцев, М.Б. Кадомцев, УФН **167**, 649 (1997).
5. T.H.R. Skyrme. Nucl. Phys. **9**, 615 (1959).
6. D. Vautherin, D.M. Brink, Phys. Lett. B **32**, 149 (1970).
7. P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer, New York, 1980).
8. Г.В. Скорняков, К.А. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ **31**, 775 (1956).
9. Р.А. Минлос, Л.Д. Фаддеев, Докл. АН СССР **141**, 1335 (1961).
10. Р.А. Минлос, Л.Д. Фаддеев, ЖЭТФ **41**, 1850 (1961).
11. В.В. Бабиков, *Метод фазовых функций в квантовой механике* (Наука, Москва, 1976).

Одержано 17.10.14

И.В. Сименог, Б.Е. Гринюк, Н.В. Кузьменко

О НЕЭФФЕКТИВНОСТИ ОТТАЛКИВАТЕЛЬНЫХ δ-ПОТЕНЦИАЛОВ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р е з ю м е

Показано, что δ-подобные отталкивательные потенциалы взаимодействия при полном учете корреляций являются неэффективными для произвольной N-частичной квантовой системы в D-мерном пространстве при $D \geq 2$.

I.V. Simenog, B.E. Grinyuk, M.V. Kuzmenko

ON INEFFICIENCY OF REPULSIVE δ-POTENTIALS IN MULTIDIMENSIONAL SPACES

Р е з ю м е

A complete account of correlations has been shown to make δ-like repulsive interaction potentials inefficient for any N-particle quantum system in the D-dimensional space with $D \geq 2$.