А.С. СІЖУК, С.М. ЄЖОВ
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
(Просп. Академіка Глушкова, 2, Київ 03022; e-mail: cannabiss@mail.univ.kiev.ua)

УДК 539

ОДНОФОТОННЕ РОЗСІЮВАННЯ АТОМНИМ ЛАНЦЮГОМ В ОДНО- ТА ДВОМОДОВОМУ РЕЗОНАТОРАХ

Досліджено систему N ідентичних дворівневих невзаємодіючих атомів, що приготовлена в однофотонному фоківському стані електромагнітного поля. Показано, що при нехтуванні взаємодією між атомами отримані динамічні рівняння для амплітуд ймовірностей дозволяють інтерпретацію динаміки станів у класичному стилі, а саме, в термінах суперпозиції коливальних мод досліджуваної системи. Отримані рівняння розкривають вплив відносного просторового розташування атомів на динаміку станів, зокрема розпад як окремих атомів, так і системи в цілому.

Ключові слова: однофотонне розсіювання, система атомів, фоківський стан, рівняння Шредінгера.

1. Вступ

Колективні випромінювальні та поглинальні властивості атомних систем інтенсивно досліджувались ще з середини минулого століття. З того часу багато фундаментальних та цікавих у прикладному сенсі властивостей систем атоми–електромагнітне поле були розкриті теоретично та виявлені експериментально. Наприклад, колективне самовільне випромінювання хмариною N атомів було досліджено в [1]. Як було в ній показано, якщо збуджені атоми розташовані таким чином, що середня відстань між ними менша за довжину хвилі резонансного переходу, то система може віддати енергію у електромагнітне поле значно швидше у порівнянні з окремо взятим атомом. Існуючі кореляції між атомами на таких відстанях спричинюють когерентні атомні переходи. Останнє є причиною пропорціональності вихідної інтенсивності квадрата кількості частинок N^2. У результаті система випромінює "свою енергію у N разів швидше за поодинокий атом" (див., наприклад, аналіз у роботі [2]). Ця особлива поведінка при самовільному випромінюванні властива системі навіть, якщо початково тільки один атом або фоківський стан збуджений в системі хмаринка–поле (див., наприклад, [3]). При деяких умовах, крім вже згаданих колективних ефектів, багатоатомна система може сповільнити перевипромінювання, що було пояснено у "наочних" термінах віртуального багаторазового обміну фотонами (віртуальні ефекти в [4]). Можливим застосуванням таких специфічно приготовлених атомних станів є оптичні квантові накопичувачі (див. [5]).

У цій роботі представлено дослідження системи N однакових дворівневих атомів та поля у однофотонному фоківському стані. Головною метою є отримання інформації про стан електромагнітного поля і атомів у часі.

У таких типових роботах, як [6–8], досліджується розсіювання фотонів великою системою рівномірно розподілених атомів, що зв'язані із континуумом мод квантованого електромагнітного поля. На відміну від такого підходу в нашій роботі береться до уваги резонатор та обмежена кількість допустимих мод у виділеному напрямку. Але запропонована тут модель затухання збуджених станів системи також пов'язується із загальноприйнятим підходом переходу до континууму мод квантованого електромагнітного поля у всіх "інших доступних" напрямках. При цьому, автори даної статті показують деякі труднощі, пов'язані із застосуванням певних наближень. Зокрема, показано, що загально вживане "релаксаційне" наближення, яке часто асоціюють із "термалізацією" системи атоми–поле, не виникає безпосередньо при переході до континууму мод квантованого електромагнітного поля. Тому залишається відкритим питання про механізми розпаду станів системи. Наприклад, можливо, слід мати на увазі певну "відкритість" системи атоми–моди поля, що може привести до необхідності розгляду статистичного розподілу за модами. Останнє може стати причиною експоненціального закону релаксації у часі.

За допомогою параметра розпаду D, що введений у цілком визначеному наближенні четвертої частини статті для отриманого загального формалізму у другій частині, ми зробили спробу досягнути такої форми динамічних рівнянь для амплітуд ймовірностей, яка дозволяє інтерпретувати отриману у третій частині систему рівнянь на класичний манер як таку, що описує коливальний рух багатомодової системи.

Зазначимо, що врахування ефекту затухання в реальних системах було зроблено, наприклад, в роботі [9]. В ній використовувалась модель, в якій взаємозв'язок між атомами та резервуаром електромагнітних мод приводить до зменшення заселення збуджених атомних рівнів чи/та відповідних станів поля. В цій моделі припускається, що існує тільки одна мода випромінювання, що описується оператором знищення ([10]). Також припускається достатньо велика кількість трирівневих атомів ($N \gg 1$), що описуються їх власними операторами знищення. При цьому атоми взаємодіють із полем, але не безпосередньо між собою. Взаємний вплив поля і атомів приводить до появи інших мод випромінювання, фононів на стінках порожнини, тощо. В цій моделі зменшення заселеності (розпад) враховується за допомогою введення спеціальних членів, що відповідають переходам індукованими резервуаром мод. Більш ранні спроби досягнути реалістичності моделей лазера (див. [10], стор. 236, 237) можуть також бути відслідковані у [11].

Деякі фундаментальні аспекти процесів розпаду поодинокого атома обговорюються у роботі [12]. У ній опис здійснений у термінах матриці густини ймовірності для такого розрідженого атомного струменя, що тільки один атом може знаходитись у зоні дії поля, пролітаючи резонатор. Показано, що процеси розпаду (атомного випромінювання) можуть бути наслідком деякого дисбалансу між популяціями атомів у збудженому (чи основному) стані та фоківськими станами поля. Особливо, умови розпаду виникають у випадку термічно нерівноважного розподілу між атомними станами та модами у резонаторі. Крім того, доступний для системних переходів неперервний спектр електромагнітних мод може спричинити зсув "резонансних" частот.

На прикладному рівні, якщо ж мова йдеться про надвипромінювальні системи, то причиною затухання (радше, руйнування) когерентних станів може, разом із "термалізацією" системних станів, бути доплерівське розширення резонансних частот атомів чи електронів. Приклади реальних систем та аналіз застосування теорії надвипромінювання можна знайти, наприклад, у [13]. У цій роботі можна знайти розгляд циклотронних хвиль у плазмі як частковий випадок явища надвипромінювання, що має прикладне значення у фізиці "намагніченої" плазми токамаків.

Наприкінці вступу зазначимо також, що цілком визначені відмінності у застосованих термінах для опису скінченної системи атомів у бозонному "полі", у порівнянні з методом виключення бозонних операторів при побудові відповідних кінетичних рівнянь у [14], завдячують нашому інтересу до динаміки. Остання є у певному сенсі лише відправною точкою при побудові кінетики. Більш докладніше дізнатися про застосування згаданої щойно методики та порівняти її із особливостями динамічного опису, скажімо двох атомів, можна у роботах [15] та [16] відповідно.

2. Рівняння руху для амплітуд станів

Таким чином, розглянемо сукупність N однакових атомів, що мають координати $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N$, і які зв'язані з однією модою електромагнітного поля. Припускається, що кожний атом $\alpha = 1, ..., N$ має тільки два стани $|a\rangle_\alpha$ та $|b\rangle_\alpha$, що розділені енергією $E_\alpha = E_{a\alpha} - E_{b\alpha} = \hbar\omega$. У дипольному наближенні гамільтоніан системи має вигляд

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = \hbar\omega \sum_{\alpha=1}^{N} \sigma_\alpha^\dagger \sigma_\alpha + \\ + \sum_{j=1}^{2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\nu_k \hat{a}_{\mathbf{k},j}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},j} - \sum_{\alpha=1}^{N} \hat{\mathbf{p}}_\alpha \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\alpha), \tag{1}$$

де $\hat{H}_0$ – гамільтоніан невзаємодіючих атомів і вільного електромагнітного поля та $\hat{H}_{\text{int}}$ описує взаємодію атомів із електромагнітним полем. Тут $\hat{\sigma}_\alpha \equiv |b\rangle_\alpha \langle a|_\alpha$ – понижуючий (анігіляції збудженого стану) оператор атома α; $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\alpha)$ – оператор напруженості електричного поля в точці $\mathbf{r}_\alpha$, де знаходиться атом α; $\hat{\mathbf{p}}_\alpha$ – оператор дипольного моменту атома α; $\hat{a}_{\mathbf{k},j}^+$ та $\hat{a}_{\mathbf{k},j}$ – оператори народження та знищення фотона моди $(\mathbf{k}, j)$, відповідно, де індекс $j = 1, 2$ визначає площину поляризації.

У представленні взаємодії рівняння Шредінгера має вигляд

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{V}_{\rm int}\Psi, \qquad (2)$$

де $\hat{V}_{\rm int}$ відповідає взаємодії атомів із фотонами у дипольному наближенні:

$$\hat{V}_{\rm int} = -\hbar\sum_{\mathbf{k},j}\sum_{\alpha=1}^{N}\Big[g_\alpha(\mathbf{k},j)\hat{\sigma}_\alpha\hat{a}^+_{\mathbf{k},j}\times$$
$$\times\exp\Big(i(\nu_{\rm k}-\omega)t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha\Big) + g^*_\alpha(\mathbf{k},j)\hat{\sigma}^+_\alpha\hat{a}_{\mathbf{k},j}\times$$
$$\times\exp\Big(-i(\nu_{\rm k}-\omega)t + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha\Big)\Big]. \qquad (3)$$

Тут

$$g_\alpha(\mathbf{k},j) = \sqrt{\frac{\nu_{\rm k}}{2\hbar\epsilon_0 V}}\,\mathbf{d}_\alpha\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k},j} =$$
$$= e^{i\phi_\alpha}\sqrt{\frac{\nu_{\rm k}}{2\hbar\epsilon_0 V}}|\mathbf{d}_\alpha|\cos\theta_{\mathbf{k},j}, \qquad (4)$$

де ϕ_α позначає деяку фазу, $\theta_{\mathbf{k},j}$ – кут між дипольним моментом $\mathbf{d}_\alpha = e\langle a|\mathbf{r}_\alpha|b\rangle$ та j-м орт-вектором поляризації $\mathbf{e}_{\mathbf{k},j}$ ($j = 1, 2$ та $\mathbf{e}_{\mathbf{k},j}\cdot\mathbf{k} = 0$); наявність величини об'єму, позначеної V, визначає об'єм нормування для станів системи атоми–поле.

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ усі атоми $\alpha = 1, ..., N$ ансамблю знаходяться в основному стані $|b\rangle_\alpha$, а електромагнітне поле утворює фоківський стан $|1_{\mathbf{k}_0}\rangle$ (один фотон із хвильовим вектором $\mathbf{k}_0$), розв'язок рівняння Шредінгера можна шукати у вигляді

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{N}\beta_\alpha(t)|b_1b_2...a_\alpha...b_N;0\rangle +$$
$$+\sum_{\mathbf{k},j}\gamma_{\mathbf{k},j}(t)|b_1b_2...b_N;1_{\mathbf{k},j}\rangle \qquad (5)$$

із початковими умовами:

$$\beta_\alpha(0) = 0, \quad \gamma_{\mathbf{k},j}(0) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}. \qquad (6)$$

Тут $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k_0}}$ – символ Кронекера: $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} = 1$, якщо $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, та $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} = 0$, якщо $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0$.

Після підстановки виразу (5) у відповідне рівняння еволюції отримаємо такі рівняння для коефіцієнтів $\beta_\alpha(t)$ та $\gamma_{\mathbf{k},j}(t)$:

$$\dot{\beta}_\alpha(t) = i\sum_{\mathbf{k},j}g^*_\alpha(\mathbf{k},j)\gamma_{\mathbf{k},j}(t)\exp(-i(\nu_{\rm k}-\omega)t + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha), \qquad (7)$$

$$\dot{\gamma}_{\mathbf{k},j}(t) = i\sum_{\delta=1}^{N}g_\delta(\mathbf{k},j)\beta_\delta(t)\exp(i(\nu_{\rm k}-\omega)t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_\delta). \qquad (8)$$

Формально, розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$\gamma_{\mathbf{k},j}(t) = \gamma_{\mathbf{k},j}(0) +$$
$$+ i\int_0^t dt'\sum_{\delta=1}^{N}g_\delta(\mathbf{k},j)\beta_\delta(t')\exp(i(\nu_k-\omega)t' - i\mathbf{k}\mathbf{r}_\delta), \qquad (9)$$

що дає можливість переписати рівняння (7):

$$\dot{\beta}_\alpha(t) = i\sum_{\mathbf{k},j}g_\alpha(\mathbf{k},j)\gamma_{\mathbf{k},j}(0)\exp[-i(\nu_{\rm k}-\omega)t + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha] -$$
$$-\sum_{\mathbf{k},j}\sum_{\delta=1}^{N}\int_0^t dt' g^*_\alpha(\mathbf{k},j)g_\delta(\mathbf{k},j)\beta_\delta(t')\times$$
$$\times\exp[i(\nu_{\rm k}-\omega)(t'-t) + i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\delta)]. \qquad (10)$$

Отримане рівняння (10) буде проаналізовано у певних наближеннях, запропонованих у наступних частинах нижче.

3. Резонансне наближення

Припустимо, що електромагнітне поле існує тільки в одному фоківському стані $|1_{\mathbf{k}_0}\rangle$, тобто

$$\gamma_{\mathbf{k},j}(t) = 0, \quad \text{якщо} \quad \nu_{\rm k}\neq\omega. \qquad (11)$$

Тоді у резонансному наближенні $\omega = \nu_{\rm k}$ рівняння (10) набуде вигляду

$$\dot{\beta}_\alpha(t) = i\sum_{j,\,\mathbf{k}}g_\alpha(\mathbf{k},j)\gamma_{\mathbf{k},j}(0)\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha) -$$
$$-\sum_{j,\,|\mathbf{k}|={\rm k}_0}\sum_{\delta=1}^{N}\int_0^t dt' g^*_\alpha(\mathbf{k},j)g_\delta(\mathbf{k},j)\beta_\delta(t')\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\delta)], \qquad (12)$$

і після диференціювання по часу отримаємо

$$\ddot{\beta}_\alpha(t) = -\sum_{j,\,|\mathbf{k}|={\rm k}_0}\sum_{\delta=1}^{N}g^*_\alpha(\mathbf{k},j)g_\delta(\mathbf{k},j)\beta_\delta(t)\times$$
$$\times\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\delta)] = -\sum_{\delta=1}^{N}\Phi_{\alpha\delta}\beta_\delta(t), \qquad (13)$$

де

$$\Phi_{\alpha\delta} = \sum_{j,\,|\mathbf{k}|={\rm k}_0}g^*_\alpha(\mathbf{k},j)g_\delta(\mathbf{k},j)\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\delta)] = \Phi^*_{\delta\alpha}. \qquad (14)$$

Рівняння (13) утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із ермітовою матрицею $\widehat{\Phi}$, що не залежить від часу. Ця матриця (із дійсними власними числами) може бути діагоналізована деяким унітарним перетворенням. Якщо вона не вироджена, то частинний розв'язок можна шукати у вигляді

$$\beta_\alpha(t) = A_\alpha e^{iwt}, \tag{15}$$

що перетворює систему (13) в систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$-w^2 A_\alpha + \sum_{\delta=1}^{N} \Phi_{\alpha\delta}\, A_\delta = 0, \quad (\alpha, \delta = 1, ..., N). \tag{16}$$

Умова існування нетривіального розв'язку приводить до алгебраїчного рівняння N-го порядку відносно w^2:

$$\det\left(-w^2\delta_{\alpha\delta} + \Phi_{\alpha\delta}\right) = 0. \tag{17}$$

Ермітовість $\widehat{\Phi}$ приводить до того що характеристичне рівняння (17) відносно w^2 має тільки дійсні корені, які можуть бути як додатними, так і від'ємними. Це, у свою чергу, приводить до дійсних значень w (гармонічні коливання), або чисто уявних значень w (аперіодичний рух – зростання або спадання за експоненціальним законом).

Цікаво зазначити, що з формальної точки зору вибір $w^2 < 0$ відповідає нульовій дійсній частині w ($\mathrm{Re}(w) = 0$), і, таким чином, може описувати експоненціальне "затухання вібраційної" моди як конструктивної одиниці для амплітуди стану $\beta_\alpha(t)$. Тут ми мали б сказати, що, як видно із представлення (15), амплітуди стану $\beta_\alpha(t)$ для кожного $\alpha = 1, ..., N$ як рішення системи динамічних рівнянь (13) – суперпозицією "вібраційних" мод з різними частотами w_m, де w_m – m-й корінь рівняння (17). Тим не менш, у реальних застосуваннях, описаних у літературі, розпад стану зазвичай асоціюють із атомним станом α-го атома чи з деякою лінійною комбінацією останніх. Тут дуже важливо підкреслити, що запропонована у цій частині тексту репрезентація через "коливальні" моди для амплітуд станів відбиває просторову структуру системи і, таким чином, відповідні кореляції між частинками.

4. Модель затухання

Явище затухання густини ймовірностей або амплітуди стану системи можна ефективно врахувати залежно від природи затухання (див., наприклад, [9, 10]). Як приклад нижче ми розглянемо систему, що складається із резонатора і атомів, що вміщені в "море" квантованих мод. Іншими словами, резонатор виділяє (підсилює) тільки обмежену сукупність мод серед усіх можливих мод електромагнітного поля, що дозволені у відкритій системі. Позначимо моди, що належать цій сукупності як $\mathbf{k}_{\text{res}}$. Виходячи з цього, розіб'ємо підсумовування по модах $\sum\limits_{\mathbf{k},j}$ в рівнянні (12) на дві частини: $\sum\limits_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_{\text{res}},j}$ та $\sum\limits_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_{\text{res}},j}$, що відповідають резонансним та нерезонансним модам відповідно. Наступним кроком врахуємо, що в достатньо великому об'ємі V підсумовування по $\mathbf{k}$ можна наближено замінити на інтегрування:

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k},j} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_{\text{res}},j} + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_{\text{res}},j} \to$$
$$\to \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_{\text{res}},j} + \lim_{\omega_M\to\infty}\sum_j \left(\frac{1}{2\pi\, c}\right)^3 \int\limits_0^{\omega_M} \omega^2 d\omega \int d\hat{\mathbf{k}}. \tag{18}$$

Після цього другий доданок в рівнянні (10) розділимо на дві частини, одна з яких відповідає нерезонансним модам.

Таким чином, дослідимо другий член у правій частині рівняння (10) після застосування процедури розчеплення (18). По-перше, ми розглянемо інтеграл по нерезонансних модах для випадку однакових атомних індексів $\alpha = \delta$:

$$V\sum_j \left(\frac{1}{2\pi c}\right)^3 \int\limits_0^{\omega_M} \omega^2 d\omega \int d\hat{\mathbf{k}} \times$$
$$\times \int\limits_0^t dt' \left|g_\delta\left(\mathbf{k}, j\right)\right|^2 \beta_\delta(t') \exp[i(\omega - \omega_{\text{res}})(t' - t)]. \tag{19}$$

В останньому виразі можна використати наближення Вайскопфа–Вігнера ([8], стор. 206) і отримати

$$\sum_{j=1,2} \frac{1}{2\hbar\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2\pi c}\right)^3 |\mathbf{d}|^2 \omega_{\text{res}}^3 \int\limits_0^{\omega_M} d\omega \int d\hat{\mathbf{k}} \times$$
$$\times \int\limits_0^t dt' \cos^2\theta_j \beta_\delta(t') \exp[i(\omega - \omega_{\text{res}})(t' - t)]. \tag{20}$$

Тут було використано зв'язок $|\mathbf{k}| = \omega_{\mathbf{k}}/c$ та

$$g_\alpha^*(\mathbf{k},j)g_\alpha(\mathbf{k},j) = \frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}|\mathbf{d}|^2\cos^2\theta_j, \tag{21}$$

де θ_j – кут між дипольним моментом атома та вектором поляризації електричного поля $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2$. Відзначимо, що інтегрування по частотах тут містить в собі також і резонансне значення, оскільки значення визначеного інтеграла не залежить від значення підінтегральної функції в одній ізольованій точці.

У наближенні Вайскопфа–Вігнера ([8], стор. 206–209) у підінтегральному виразі (19) ми замінюємо ω^3 на $\omega_{\rm res}^3$ та нижню межу для інтегрування за частотою на $-\infty$. Тоді, після інтегрування за просторовим кутом $d\mathbf{k}$, представляємо інтегрування за частотою у вигляді дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i(\omega-\omega_{\rm res})(t'-t)] = 2\pi\delta\,(t'-t)\,. \tag{22}$$

Тут необхідно, на наш погляд, запропонувати декілька коментарів щодо вибраного наближення.

4.1. Деякі зауваження та коментарі про наближення Вайскопфа–Вігнера

Зазвичай таке наближення аргументується тим фактом, що (відповідно до [8], стор. 207) інтенсивність випромінюваного світла концентрується навколо частоти атомного переходу $\omega_{\rm res}$, і, відповідно до цього, значення ω^3 мало змінюється порівняно із резонансним значенням протягом достатньо великого часового інтервалу. В той самий час інтегрування у виразі (20) по частотах без застосування зазначених вище наближень не приводить до помітної δ-подібної властивості:

$$\lim_{\omega_M\to\infty}\int_0^{\omega_M}\omega^3\exp[i\omega(t'-t)]d\omega = \lim_{\omega_M\to\infty}\frac{1}{i(t'-t)}\times$$
$$\times\Bigg[\omega_M^3\exp[i\omega_M(t'-t)] - 3\frac{1}{i(t'-t)}\times$$
$$\times\left\{\omega_M^2\exp[i\omega_M(t'-t)] - \frac{2}{i(t'-t)}\omega_M\exp[i\omega_M(t'-t)] +\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{1-\cos\left(\omega_M(t'-t)\right)}{(t'-t)^2} - i\frac{\sin\left(\omega_M(t'-t)\right)}{(t'-t)^2}\right)\right\}\Bigg]. \tag{23}$$

Ми бачимо, що такий інтеграл також дає внесок у зсув резонансної частоти ω_0, при якій атомно-польові переходи можуть відбуватись (див. [12]).

Ситуацію тут може дещо поправити припущення про те, що коефіцієнти $g_\alpha(\mathbf{k},j)$ розподілені у просторі по об'єму, що відповідає атомному діаметру a. Значення a може накласти деякі обмеження на мінімальну довжину хвилі, тобто на максимальну частоту $\omega_{\max}$. Такий розподіл у просторі змінює межі інтегрування по частоті, а додаткові припущеннях про часові масштаби й сприйнятливість атомів до зовнішнього електромагнітного поля можуть призвести до δ-подібного ядра у вище наведених інтегралах (див., наприклад, [17] та [18]).

Після запропонованого відступу продовжимо рухатись у напрямку отримання динамічних рівнянь. Слідуючи запропонованому наближенню, інтегрування по просторових кутах можна провести за допомогою зв'язку $\sum\limits_{j=1,2}\cos^2\theta_j = 1-\cos^2\theta_3$, де θ_3 – кут між хвильовим вектором $\mathbf{k}$ та дипольним моментом $\mathbf{d}$, що в результаті дає

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta\,d\varphi = \frac{8\pi}{3}.$$

У результаті зняття інтегрування за часом з дельта-функцією маємо, що

$$\dot\beta_\alpha(t) = i\sum_{\mathbf{k},j}g_\alpha(\mathbf{k},j)\gamma_{\mathbf{k},j}(0)\exp[-i(\nu_k-\omega)t + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha] -$$
$$-\frac{8\pi}{3}\frac{2\pi}{2\hbar\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi\,c}\right)^3|\mathbf{d}|^2\omega_{\rm res}^3\beta_\alpha(t) -$$
$$-\sum_{|\mathbf{k}|=\omega_{\rm res}/c,j}\int_0^t dt'\,|g_\alpha(\mathbf{k},j)|^2\,\beta_\alpha(t') -$$
$$-\sum_{\mathbf{k},j}\sum_{\delta=1,\delta\neq\alpha}^{N}\int_0^t dt' g_\alpha^*(\mathbf{k},j)g_\delta(\mathbf{k},j)\beta_\delta(t')\times$$
$$\times\exp[i(\omega_k-\omega_{\rm res})(t'-t) + i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\delta)]. \tag{24}$$

Знову застосуємо розбиття на резонансні та нерезонансні доданки для третього члена в правій частині останнього рівняння. Тоді, апроксимуючи інтегрування за часом та частотою інтегруванням за часом з дельта-функційним ядром, ми можемо представити нерезонансні доданки для кожного

$\delta \neq \alpha$ за допомогою добутку δ-ї амплітуди стану та відповідного їй коефіцієнта $D_{\alpha\delta}$. Більш детально процедура обчислення може бути знайдена у роботі [18]. У відповідній "резонансній" частині залишається тільки інтегрування за часом. Таким чином, враховуючи початкові умови (справедливість 11 для $t = 0$) та диференціюючи ще раз рівняння (24), отримуємо

$$\frac{d^2}{dt^2}\beta_\alpha(t) = -\sum_{\delta=1}^{N}\beta_\delta(t)\Phi_{\alpha\delta} - 2\sum_{\delta=1}^{N}D_{\alpha\delta}\frac{d}{dt}\beta_\delta(t), \quad (25)$$

де

$$D_{\alpha\,\alpha} = \frac{1}{2}\frac{8\pi}{3}\frac{2\pi}{2\hbar\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi c}\right)^3|\mathbf{d}|^2\omega_{\rm res}^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3\pi\hbar\varepsilon_0 c^3}|\mathbf{d}|^2\omega_{\rm res}^3, \quad (26)$$

та $\Phi_{\alpha\,\delta}$ – визначені у попередній частині. Коефіцієнти $D_{\alpha\,\alpha}$, $\alpha = 1, ..., N$ описують швидкість розпаду збудженого стану поодинокого атома з індексом α. Оскільки дипольні моменти атомів масштабуються у дебаях, такі незалежні розпади збуджених станів відбуваються в оптичному регіоні частот через самовільне випромінення протягом порядку $10^{-7} - 10^{-9}$ секунд. Коефіцієнти $D_{\alpha\,\delta}$, $\alpha = 1, ..., N$ та $\delta = = 1, ..., N$ з $\alpha \neq \delta$, описують швидкості розпаду кожного α-го атома у збудженому стані під впливом всієї системи. Останні можна обчислити за допомогою процедури, описаної в додатку до статті [18].

Видно, що рівняння руху (25) для амплітуд станів $\beta_\alpha(t)$, $\alpha = 1, ..., N$, мають вигляд, який виникає в класичній механіці при описі коливального руху "пружно" з'єднаних тіл.

5. Висновки

Отже, у даній роботі досліджено систему N ідентичних дворівневих невзаємодіючих атомів, що розташовані у резонаторі з одним виділеним напрямком. При цьому електромагнітне поле в резонаторі у початковий момент часу приготовлене в основному стані з одним збудженим фоківським станом "резонансної частоти". Показана можливість представлення амплітуд станів через "коливальні" моди. Відповідні моди відбивають просторову структуру системи і, таким чином, існуючі кореляції між частинками. Знайдені рівняння руху для амплітуд станів $\beta_\alpha(t)$, $\alpha = 1, ..., N$, мають вигляд, що використовується класичною механікою для опису коливального руху "пружно" з'єднаних тіл.

1. R.H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. A.A. Svidzinsky, Phys. Rev. A **85**, 013821 (2012).
3. R. Wiegner, J. von Zanthier, and G.S. Agarwal, Phys. Rev. A **84**, 023805 (2011).
4. P.R. Berman and J.-L. Le Gouet, Phys. Rev. A **83**, 035804 (2011).
5. M.D. Eisaman, L. Childress, A. Andre, F. Massou, A.S. Zibrov, and M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **93**, 233602 (2004).
6. M. Scully, E. Fry, C.H.R. Ooi, and K. Wódkiewicz, Phys. Rev. Lett. **96**, 010501 (2006).
7. V. Ernst and P. Stehle, Phys. Rev. **176**, 1456 (1968).
8. M.O. Scully and S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997).
9. M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966).
10. J.R. Klauder and E.C.G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, (Dover, New York, 2006).
11. M. Scully and W.E. Lamb, Phys. Rev. Lett. **16**, 853 (1966).
12. W.P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley-VCH, Berlin, 2001), P. 507–549.
13. Л.И. Меньшиков, УФН **169**, №2, 113 (1999).
14. Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.), ЭЧАЯ, Вып. 2, 245 (1980).
15. Н.Н. Боголюбов (мл.), А.С. Шумовский, *Сверхизлучение* (ОИЯИ, Дубна, 1987), препринт Р17-87-176.
16. Е.К. Башкиров, Е.Г. Мангулова, Известия РАН. Серия физическая **64**, №10, 2075 (2000).
17. R.H. Lehmberg, Phys. Rev. A **2**, 883 (1970).
18. A.S. Sizhuk, S.M. Yezhov, Ukrainian J. of Phys. **57**, 670 (2012).

Одержано 07.06.13

А.С. Сижук, С.М. Ежов

ОДНОФОТОННОЕ
РАССЕЯНИЕ АТОМНОЙ ЦЕПОЧКОЙ
В ОДНО- И ДВУХМОДОВОМ РЕЗОНАТОРАХ

Р е з ю м е

Исследована система N идентичных двухуровневых невзаимодействующих атомов, приготовленная в однофотонном фоковском состоянии электромагнитного поля. Показано, что при пренебрежении взаимодействием между атомами полученные динамические уравнения для амплитуд вероятностей позволяют интерпретацию динамики состояний в классическом стиле, а именно, в терминах суперпозиции колебательных мод исследуемой системы. Полученные уравнения раскрывают влияние относительного пространственного расположения атомов на динамику состояний, в

частности распад как отдельных атомов, так и системы в целом.

A.S. Sizhuk, S.M. Yezhov

ONE-PHOTON SCATTERING BY AN ATOMIC CHAIN IN ONE- AND TWO-MODE RESONATORS

S u m m a r y

A chain of N identical two-level atoms coupled with the electromagnetic field, prepared via a single-photon Fock state, is investigated. It is found that, if the interaction between atoms is negligible, than the obtained dynamic equations for the probability amplitudes allow, in a certain sense, an interpretation of the dynamics of states in the classical fashion in terms of a superposition of oscillatory modes of the system under study. The derived equations reveal how a space configuration of the system of atoms affects the dynamics of the atomic states, particularly the “decay” rates of separate atoms and the system as the whole.