А. КАМЕНЩИК,[1,2] Ф. МУСКОЛІНО[3,4]

[1] Департамент фізики і астрономії Болонського університету
(Вул. Ірнеріо 46, Болонья 40126, Італія; e-mail: kamenshchik@bo.infn.it)
[2] Національний інститут ядерної фізики, Болонський відділ
(Бульв. Berti Pichat 6/2, 40127 Болонья, Італія)
[3] Департамент науки і високих технологій, Університет Інсубрії
(Вул. Валледжіо 11, IT-22100 Комо, Італія; e-mail: federica.muscolino@gmail.com)
[4] Національний інститут ядерної фізики, Міланський відділ
(Вул. Целорія 16, IT-20133 Мілан, Італія)

УДК 539

ПОШУК ЧАСТИНОК КЕРРОЛЛА У ДВОЧАСОВОМУ ПРОСТОРІ-ЧАСІ [1]

Ми намагаємось описати частинки Керролла з ненульовим значенням енергії (тобто частинки Керролла, які завжди перебувають у спокої) у рамках двочасової фізики, розробленої в серії робіт І. Барса і його співавторів. У просторі-часі з одним додатковим часовим виміром і одним додатковим просторовим виміром можна локалізувати симетрію, яка існує між узагальненою координатою та її спряженим імпульсом. Така локалізація передбачає введення калібрувальних полів, що, у свою чергу, передбачає появу деяких додаткових умов першого класу. Вибираючи різні умови фіксації калібрування і розв'язуючи додаткові умови, можна отримати різні часові параметри, гамільтоніани і загалом фізичні системи в стандартному одночасовому просторі-часі. Ми знаходимо набір умов фіксації калібрування, який відображає частинки Керролла в одночасовому світі. Крім того, ми будуємо квантову теорію такої частинки, використовуючи неочікувану відповідність між нашою параметризацією і параметризацією, отриманою Барсом для атома водню в 1999 р.

Ключові слова: двочасовий простір-час, група Керролла, частинки.

1. Вступ

Теорії з додатковими просторовими вимірами стали цілком традиційними з часів, коли вони були запропоновані у відомих роботах Калуци і Клейна. Теорії з більш ніж одночасовим виміром виглядають набагато менш інтуїтивно зрозумілими і правдоподібними. Проте, починаючи з 1996 р., І. Барсом і його співавторами була написана вражаюча серія робіт, присвячених так званій фізиці двох часів або 2T [1–6]. Класична і квантова фізика простих систем, таких як: нерелятивістична частинка, масивна і безмасова релятивістичнаа частинка, гармонічний осцилятор, воднеподібний атом — можуть бути описані в рамках 2T-фізики з єдиної точки зору. У книзі [6] пояснюється, що різні одночасові фізичні системи виникають як деякі "тіні" в печері Платона, яка є нічим іншим, як світом з одним додатковим часовим виміром і одним додатковим просторовим виміром. Мова двочасової фізики цілком адаптована також для опису теорій поля [7] і ґравітації [8]. Новий підхід до космології, стимульований двочасовою фізикою, відкрив шлях до цікавого розгляду проблеми проходження через космологічні сингулярності [9]. Зв'язки між двочасовою фізикою і симетрією Керролла раніше не досліджувалися. Це було зроблено в нашій роботі [10].

Симетрія Керролла була відкрита в 1965 р. [11] як інша контракція типу Іньону–Вігнера [12] алгебри Пуанкаре, альтернативна контракції, яка приводить до появи алгебри Лі групи Галілея. Незалежно це було відкрито Сен Гуптом в 1966 р. [13].

Цитування: Каменщик А., Мусколіно Ф. Пошук частинок Керролла у двочасовому просторі-часі. *Укр. фіз. журн.* **69**, №7, 448 (2024).
Citation: Kamenshchik A., Muscolino F. Looking for Carroll particles in the two-time spacetime. *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 7, 448 (2024). https://doi.org/10.15407/ujpe69.7.448.

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XII Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2024): Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics".

Тоді як група Галілея виникає, коли швидкість світла прямує до нескінченності, симетрія Керролла відповідає швидкості світла, що прямує до нуля. Останнім часом симетрія Керролла стала дуже популярною і знайшла кілька цікавих і несподіваних застосувань [14–17].

Далі у вступній частині ми стисло опишемо основні ідеї фізики двох часів і симетрії Керролла. У другому розділі ми описуємо класичну теорію частинки Керролла, яка виникає у двочасовому просторі-часі. Третій розділ присвячений її квантовій теорії, а останній розділ містить деякі заключні зауваження.

З точки зору фізики 2T, звичайні фізичні системи, які існують в одночасовому світі, являють собою проекції з простору-часу з одним додатковим часовим виміром і одним додатковим просторовим виміром. Ці додаткові виміри вводяться для побудови нової калібрувальної теорії, заснованої на локалізації симетрії фазового простору, яка описується симплектичною групою $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. Звичайна фізика з 1T отримується за допомогою фіксації калібрування.

Координати фазового простору для двочасового світу мають вигляд

$$X^M = \left(X^{0'}, X^{1'}, X^\mu\right), \quad P^M = \left(P^{0'}, P^{1'}, P^\mu\right).$$

Тут індекси $0'$ і $1'$ позначають додатковий час і додатковий вимір простору. Додатковий вимір простору необхідний для отримання потрібної кількості ступенів вільності в теорії 1T. Індекс $\mu = 0, ..., d-1$ позначає звичайні координати в одночасовому світі. Це зручно написати таким чином:

$$X_i^M = \left(X^M, P^M\right),$$

де індекси $i = 1, 2$ означають положення та імпульс, відповідно.

Два типи фазових змінних можна змішувати за допомогою перетворень $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$.

Дія для вільної частинки на світовій лінії в плоскому двочасовому просторі-часі

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau\ \epsilon^{ij} \eta_{MN}\ \partial_\tau X_i^M X_j^N,$$

де $\eta_{MN} = \mathrm{Diag}(-1, 1, -1, 1, ..., 1)$ – плоска метрика з сигнатурою $(2, d)$, а ϵ^{ij} є антисиметричним тензором із $\epsilon^{12} = 1$, і τ – параметр власного часу.

Дія є інваріантною відносно глобальних перетворень $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$

$$\delta_\omega X_i^M = \epsilon_{ij} \omega^{jk} X_k^M.$$

Параметри перетворення ω^{jk} є симетричними відносно j, k. Коли $\omega^{ij} \to \omega^{ij}(\tau)$, нам потрібно запровадити зв'язок, який враховує нову калібрувальну симетрію. Коваріантна похідна є

$$\partial_\tau X_i^M \to D_\tau X_i^M = \partial_\tau X_i^M - \epsilon_{ij} A^{jk}(\tau) X_k^M,$$

де $A^{jk}(\tau)$ є симетричним відносно індексів i, j і належить до приєднаного представлення алгебри Лі $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ (яке ми називаємо $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$). Цей тензор перетворюється як калібрувальне поле під дією групи $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$:

$$\delta_\omega A^{ij}(\tau) = \partial_\tau \omega^{ij} + \omega^{ik} \epsilon_{kl} A^{lj} + \omega^{jk} \epsilon_{kl} A^{li}.$$

Інваріант дії на світовій лінії відносно цих калібрувальних перетворень є

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau\ \epsilon^{ij} \eta_{MN} D_\tau X_i^M X_j^N =$$

$$= \int d\tau\ \left[\eta^{MN} \partial_\tau X_M P_N - A^{ij}(\tau) Q_{ij}\right],$$

де

$$Q_{11} = \frac{1}{2} X \cdot X, \quad Q_{22} = \frac{1}{2} P \cdot P,$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{1}{2} X \cdot P$$

є $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ струмами додаткових зв'зків, які зберігаються.

Калібрувальні поля A^{ij} не є динамічними і відіграють роль множників Лагранжа. Коли вибирається калібруванняч, мають бути виконані такі додаткові умови (в'язі):

$$X \cdot X = 0,$$
$$X \cdot P = 0,$$
$$P \cdot P = 0.$$

Ці умови приводять до нетривіальної параметризації простору-часу 1T лише тоді, коли початкова теорія має більше одного часоподібного виміру.

Коли калібрування фіксоване і додаткові умови задовольняються, отримується правильна кількість 1T змінних $X_i^M(\tau) = X_i^M(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{p}(\tau))$. Дія має вигляд

$$S = \int d\tau\, (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} - H),$$

де H – гамільтоніан теорії 1T. Різні фіксації калібрування відповідають різним виборам гамільтоніана (і різним виборам часу). Таким чином, різні системи у фізиці 1T описуються однією двочасовою моделлю. Ці системи дуальні одна до одної при локальних $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ перетвореннях.

Опишемо тепер симетрію Керролла. Загальновідомо, що для групи Пуанкаре властиве контракції, яка отримується шляхом спрямуванням швидкості світла до нескінченності $c \to \infty$. Ця границя приводить до групи Галілея, яка описує нерелятивістичну динаміку.

Що станеться, якщо ми розглянемо протилежну границю: $c \to 0$? Давайте визначимо нові змінні:

$$t = \frac{1}{c}x_0, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}, \quad b = \frac{1}{c}a_0,$$

вимагаючи, щоб вони залишалися сталими після того, як c буде спрямоване до нуля. Отримуємо такі перетворення:

$$\begin{cases} t' = t + \hat{\mathbf{v}} \cdot (R\mathbf{x}) + b, \\ \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{a}. \end{cases}$$

Ці перетворення утворюють групу Керролла [11, 13].

Алгебра Лі Керролла має такий вигляд:

$$[L^{ij}, L^{kl}] = \delta^{ik}L^{jl} + \delta^{jl}L^{ik} - \delta^{il}L^{jk} - \delta^{jk}L^{il},$$
$$[L^{ij}, P^k] = \delta^{ik}P^j - \delta^{jk}P^i,$$
$$[L^{ij}, B^k] = \delta^{ik}B^j - \delta^{jk}B^i,$$
$$[L^{ij}, H] = 0,$$
$$[P^i, P^j] = 0,$$
$$[P^i, B^j] = \delta^{ij}H,$$
$$[P^i, H] = 0,$$
$$[B^i, B^j] = 0,$$
$$[B^i, H] = 0,$$

де L^{ij} – просторові повороти, P^k – просторові трансляції, B^k – бусти, а H – генератор часових трансляцій.

2. Частинка Керролла у двочасовому просторі-часі: класична теорія

Відомо (див., наприклад, [17]), що частинка Керрола з ненульовою енергією повинна завжди перебувати в спокої. З іншого боку, частинка Керролла з нульовою енергією завжди рухається. Ці два випадки не пов'язані між собою. Причина цього явища полягає в тому, що бусти Керролла не змінюють значення енергії на відміну від бустів Лоренца і Галілея. Дійсно, генератори алгебри Лі, що відповідають бустам Лоренца, мають вигляд:

$$B^x_{\mathrm{Lorentz}} = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t},$$

Галілеєві бусти можуть бути представлені генераторами

$$B^x_{\mathrm{Galilei}} = t\frac{\partial}{\partial x},$$

в той час як бусти Керролла — це

$$B^x_{\mathrm{Carroll}} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Гамільтоніан завжди пропорційний оператору

$$H = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Буст Керролла комутує з гамільтоніаном на відміну від буста Лоренца і буста Галілея. Неможливо змінити значення енергії за рахунок бусту у світі Керролла, і слід розглядати випадки прямуючої до нуля і відмінної від нуля енергії окремо. Збереження тензора енергії-імпульсу передбачає зникнення потоку енергії, якщо енергія відмінна від нуля. Дію для частинки Керролла можна представити у вигляді

$$S = -\int d\tau \left\{\dot{t}E - \dot{x} \cdot p - \lambda\,(E - E_0)\right\},$$

де τ – власний час, t – фізичний час, E — класичний гамільтоніан, а x^i і p^i – просторові координати і імпульси для $i = 1, ..., d-1$. Тоді $E_0 \neq 0$ є енергією спокою частинки Керрола, а λ відіграє роль множника Лагранжа. Ця дія є інваріантною відносно перетворень, породжених

$$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i, \quad B^i = Ex^i, \quad p^i \text{ and } E.$$

Дужки Пуассона цих генераторів задовольняють алгебру Керрола. Рівняння руху виглядають як

$$\dot{t} = \lambda, \quad \dot{E} = 0,$$
$$\dot{x}^i = 0, \quad \dot{p}^i = 0.$$

Ми хотіли б отримати цю дію від дії 2T. Введемо координати світлового конуса

$$X^+ = \frac{1}{2}\left(X^{1'} + X^{0'}\right), \quad X^- = \frac{1}{2}\left(X^{1'} - X^{0'}\right).$$

Фіксуємо калібрувальні поля як

$$A_{11} = A_{12} = 0, \quad A_{22} = \lambda = \text{const}.$$

Двочасові координати і імпульси є

$$\begin{aligned}
&X^+ = E_0 t,\\
&X^- = \frac{x_i p^i}{E_0} + \frac{t}{E_0}\left(E - E_0 + \frac{p_i p^i}{2}\right),\\
&X^0 = \sqrt{x_i x^i},\\
&X^i = x^i + t p^i,\\
&P^+ = E_0,\\
&P^- = \frac{1}{E_0}\left(E - E_0 + \frac{p_i p^i}{2}\right),\\
&P^0 = 0,\\
&P^i = p^i.
\end{aligned}$$

У термінах цієї параметризації (фіксації калібрування) додаткові умови (в'язі) мають вигляд

$$\begin{aligned}
&X \cdot X = -2t^2(E - E_0),\\
&X \cdot P = -2t(E - E_0),\\
&P \cdot P = -2(E - E_0)
\end{aligned}$$

і виконуються тоді і тільки тоді, коли $E = E_0$.

Підставляючи наведену параметризацію в двочасову дію, отримуємо одночасову дію для частинки Керролла. Система також має симетрію відносно $SO(2, d)$ двочасової групи Лоренца. Генераторами групи $SO(2, d)$ є

$$L^{MN} = X^M P^N - X^N P^M,$$

і вони інваріантні відносно $Sp(2, \mathbb{R})$ перетворень.

Записані у термінах нашої нової параметризації, вони мають вигляд

$$\begin{aligned}
&L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i,\\
&L^{0i} = \sqrt{x^j x_j}\; p^i,\\
&L^{+i} = -E_0 x^i\\
&L^{-i} = -\frac{E - E_0}{E_0} x^i - \frac{p_j p^j}{2E_0} x^i + \frac{p^j x_j}{E_0} p^i,\\
&L^{+-} = -p^i x_i,\\
&L^{-0} = -\sqrt{x_i x^i}\left(\frac{E - E_0}{E_0} + \frac{p_i p^i}{2E_0}\right),\\
&L^{+0} = -E_0\sqrt{x_i x^i}.
\end{aligned}$$

Дужки Пуассона цих генераторів не утворюють $\mathfrak{so}(2, d)$ алгебру, якщо не виконується умова $E - E_0 = 0$. Пряме обчислення дає

$$\{L^{-i}, L^{-j}\} = -2\frac{E - E_0}{E_0} L^{ij},$$

що є новим елементом алгебри. Коли $E - E_0 = 0$, ці дужки Пуассона дорівнюють нулю, і всі генератори утворюють алгебру $\mathfrak{so}(2, d)$, яка описується такою формулою:

$$\begin{aligned}
&\{L^{MN}, L^{RS}\} = \eta^{MR} L^{NS} + \eta^{NS} L^{MR} -\\
&- \eta^{MS} L^{NR} - \eta^{NR} L^{MS}.
\end{aligned}$$

Завершуючи цей розділ, ми запишемо (для порівняння) двочасову параметризацію, яка створює одночасову дію для нерелятивістичної масивної частинки відповідно до статті [5]:

$$\begin{aligned}
&X^+ = t,\\
&X^- = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{m} - t\frac{H}{m},\\
&X^0 = \sqrt{\mathbf{r}^2 - 2t\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{m} + 2\frac{H}{m} t^2},\\
&X^i = \mathbf{r}^i,\\
&P^+ = 0,\\
&P^- = H,\\
&P^0 = 0,\\
&P^i = \mathbf{p}^i.
\end{aligned}$$

Можна бачити, що пошук правильної параметризації для переходу від двочасового простору-часу до відносно простої одночасової системи не є легкою задачею, і результати не є очевидними.

3. Частинка Керрола у двочасовому просторі-часі: квантова теорія

Спробуємо побудувати квантову теорію частинки Керрола за рецептом, поданим у статті [4]. Комутаційні співвідношення для операторів положення і імпульсу в стандартному $(d - 1)$-вимірному просторі є

$$[x^i, p^j] = i\;\delta^{ij}.$$

Коли ми квантуємо деякі класичні функції цих операторів, виникає проблема вибору порядку. Усі оператори мають бути ермітовими, але цієї вимоги недостатньо. Наприклад,

$$p^2 r \to p_i r p^i,$$

який явно є ермітовим. Однак це впорядкування не є єдино можливим, яке забезпечує ермітовість. Ми можемо вибрати іншу форму оператора

$$p^2 r \to r p_i r^{-1} p^i r = p_i r p^i - \frac{d-3}{2r}.$$

У більш загальному випадку

$$p^2 r \to r^\lambda p_i r^{1-2\lambda} p^i r^\lambda = p_i r p^i + \frac{\lambda(\lambda - d + 2)}{2r}.$$

Ми повинні вдатися до коваріантного квантування в 2T просторі-часі. Це означає, що генератори L^{MN}, які стають операторами, повинні складати алгебру Лі відносно комутаторів.

Ця вимога також не визначає впорядкування в квантових генераторах однозначним чином, і слід також використовувати властивості операторів Казимира унітарних зображень обох груп $SO(2,d)$ і $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. В'язі відіграють роль генераторів симетрії відносно групи $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. Їх слід застосовувати до прийнятних квантових станів системи згідно з рецептом квантування Дірака систем з в'язями першого класу:

$$Q|\Psi\rangle = 0.$$

Те саме має бути справедливим і для операторів Казимира.

Якщо вибрати базис ермітових квантових генераторів групи $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ таким чином:

$$J_0 = \frac{1}{4}(P^2 + X^2),\ J_1 = \frac{1}{4}(P^2 - X^2),$$

$$J_2 = \frac{1}{4}(X \cdot P + P \cdot X),$$

тоді

$$[J_0, J_1] = iJ_2,\ [J_0, J_2] = -iJ_1,$$

$$[J_1, J_2] = -iJ_0.$$

Квадратичний оператор Казимира визначається як

$$C_2(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})) = J_0^2 - J_1^2 - J_2^2.$$

Використовуючи правила комутації

$$[X^M, P^N] = i\eta^{MN},$$

ми можемо показати

$$C_2(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(X^M P^2 X_M - (X \cdot P)(P \cdot X) + \frac{d^2}{4} - 1\right).$$

З іншого боку, ми визначаємо квадратичний оператор Казимира для групи $SO(2,d)$ як

$$C_2(SO(2,d)) = \frac{1}{2} L_{MN} L^{MN},$$

і прямий розрахунок показує, що

$$C_2(SO(2,d)) = 4C_2(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) + 1 - \frac{d^2}{4}.$$

Якщо генератори $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ вибирають квантові стани і їхній квадратичний оператор Казимира має дорівнювати нулю, квадратичний оператор Казимира на тих самих квантових станах, що розглядаються як такі, що належать до представлення групи $SO(2,d)$, має дорівнювати $1 - \frac{d^2}{4}$. Саме ця вимога фіксує порядок у генераторах групи $SO(2,d)$. У статті [4] ця методика була реалізована для відтворення схеми квантування і спектра водневоподібного атома. Відомо, що на початку розвитку квантової механіки у двадцятих роках цей спектр отримували двома різними способами: розв'язуванням відповідного рівняння Шредінгера і суто алгебраїчним методом з використанням симетрії розширеної групи цієї системи. Примітно, що автору статті [4] за допомогою методики, наведеної вище, вдалося узагальнити стандартні формули для спектра водню на випадк $((d-1)+1)$-вимірного простору-часу, починаючи з $(d+2)$-вимірного простору-часу.

Процедура фіксації впорядкованості операторів при переході від класичної теорії до її квантового аналогу має цікаву особливість: якщо нам вдається зафіксувати впорядкованість у генераторах групи $SO(2,d)$ у початковий момент $\tau = 0$, то цей самий порядок буде збережено. Можна відзначити досить незвичайний факт: наша параметризація змінних X^M, P^M при $\tau = 0$ збігається з тією, що використовується для опису атома водню в [4], якщо ми вже ввели $E = E_0$. Це дивовижно, оскільки ці фізичні системи дуже різні, і їх дії також різні. Дійсно, коли ми обчислюємо одночасову дію, стартуючи з певної параметризації двочасових змінних, у гру вступають похідні відносно власного параметра часу. Таким чином, коли ми обчислюємо цю дію, важлива залежність від часу, присутня в параметризації часу або, іншими словами, в процедурі фіксації калібрування. Однак для виведення правил квантування залежність від часу неважлива. Це означає, що маючи дві абсолютно різні параметризації, які збігаються в певний момент, ми можемо використовувати подібні процедури квантування для зовсім різних систем. Таким чином, ми можемо використати результати статті [4] для квантування нашої частинки Керролла в стані спокою. Тут ми наведемо формули, які явно показують, як вибирається порядок операторів у квантових генераторах групи $SO(2,d)$:

$$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i,$$

$$L^{0i} = \frac{1}{2}\left(r\ p^i + p^i r\right),$$

$$L^{+i} = -E_0 x^i,$$

$$L^{-i} = -\frac{1}{2E_0} p_j x^i p^j + \frac{1}{2E_0}\left(p \cdot x p^i + p^i x \cdot p\right) + \frac{x^i}{8E_0 r^2},$$

$$L^{+-} = -\frac{1}{2}\left(x \cdot p + p \cdot x\right),$$

$$L^{-0} = -\frac{1}{2E_0} p_i r p^i - \frac{5-2d}{8E_0 r},$$

$$L^{+0} = -E_0 r.$$

Може скластися враження, що результати такого квантування можуть суперечити інтуїтивним міркуванням. Дійсно, спектр атома водню є дискретним, і частинка Керролла в спокої не виглядає як система, яка може мати дискретний спектр. Проте той факт, що ми використовуємо відповідність між цими двома квантовими системами, не означає, що ми отримаємо дискретний спектр для частинки Керролла в спокої. Дійсно, процедура квантування говорить нам про те, що комбінація квадрата імпульсу і оберненого радіуса, яка дає гамільтоніан атома водню, має дискретний спектр. Однак ця сама комбінація не представляє гамільтоніан частинки Керрола. Дійсно, цей гамільтоніан не пов'язаний як з просторовими координатами, так і з імпульсами. Крім того, імпульс не пов'язаний зі швидкістю частинки Керрола (яка завжди дорівнює нулю).

Яка роль імпульсу? Для стандартних квантовомеханічних систем, імпульси входять у комутаційні співвідношення з координатами і, отже, нерівність невизначеностей Гейзенберга

$$\Delta x^i \cdot \Delta p^j \geq \frac{1}{4}\delta^{ij}$$

виконується. Звідси виникає ще одне питання: чи означає це, що ми не можемо локалізувати частинку Керролла в спокої? Знову ж таки, відповідь негативна. На відміну від стандартної нерелятивістичної квантової механіки, ми можемо вибирати квантові стани з як завгодно малою дисперсією координати Δx, оскільки зростання дисперсії імпульсу Δp не має значення. Таким чином, частинку можна локалізувати з як завгодно високою точністю.

4. Заключні зауваження

Група Керролла і симетрія Керролла набули великої популярності в останні роки. Їх властивості, досить цікаві з суто математичної точки зору, знайшли численні й іноді несподівані фізичні застосування. Двочасова фізика менш відома, але її результати також дуже цікаві, оскільки вони дозволяють побачити досить різні фізичні системи та явища з єдиної точки зору. Наскільки нам відомо, досліджень, присвячених опису частинок Керрола з точки зору фізики двох часів, не було. Таку спробу ми зробили в нашій роботі [10]. Ми обмежилися дослідженням відносно простого випадку частинок Керролла, які мають незникаючу енергію і повинні залишатися в спокої в $((d-1)+1)$-просторі-часі. Для цього випадку ми знайшли такі умови фіксації калібрування в розширеному $(d+2)$-вимірному просторі-часі (який має двочасові змінні), які разом з додатковими умовами теорії дають параметризацію змінних фазового простору в розширеному просторі-часі, що створює частинку Керролла в стандартному одночасову простору-часу.

Примітно, що якщо розглядати наші фазові змінні як квантові оператори, то в момент, коли парамет власного часу дорівнює нулю, наша параметризація збігається з отриманою в [4] для атома водню з точністю до деяких коефіцієнтів. Це дозволяє нам слідувати схемі квантування, розробленій у [4] для цього випадку. Рівняння, які ми отримуємо, дуже близькі до отриманих там, тоді як їхній фізичний зміст і інтерпретація зовсім інші. Коріння цієї відмінності полягає в тому, що наш гамільтоніан не залежить ні від імпульсів, ні від координат системи. Крім того, імпульси не пов'язані зі швидкостями на відміну від традиційних формул, до яких вчені звикли, працюючи з симетричними системами Лоренца або Галілея. Роль імпульсів полягає в тому, що вони підкоряються стандартним комутаційним співвідношенням з операторами положення, і, отже, справедлива нерівність невизначеності Гейзенберга. Проте роль дисперсій координат і дисперсій імпульсів різна. У той час як дисперсія координати характеризує локалізацію частинки, дисперсія імпульсів не має прямого фізичного сенсу, і можна вибрати фізичний стан із довільно високим ступенем просторової локалізації, який сумісний з тим фактом, що класична частинка Керролла завжди повинна перебувати в спокої. Все вищесказане стосується частинок з ненульовим значенням енергії. Випадок із нульовою енергією, коли частинки Керролла постійно рухаються, є більш складним, і ми сподіваємося представити аналіз цього випадку в майбутньому. Іншим можливим і цікавим напрямком дослідження є пошук теоретико-польових систем із симетрією Керрола у двочасовому світі.

На завершення цієї статті ми хочемо сказати, що для нас було особливо приємно представити нашу роботу на XII конференції, присвяченій Бояї, Гауссу і Лобачевському (BGL-2024): "Неевклідова геометрія в сучасній фізиці та математиці". У нашій роботі ми спробували поєднати дві досить незвичайні геометрії простору-часу: геометрію з простором-часом, який має більше ніж один часовий напрямок, і геометрію, де замість симетрії Галілея або Пуанкаре присутня набагато більш неінтуїтивна симетрія Керролла. На перший погляд, ці дві геометрії не так вже й близькі до робіт Бояї, Гаусса і Лобачевського. Проте обидві ці геометрії простору-часу навряд чи можна було б винайти, якби ідея можливості існування неевклідових геометрій не була відкрита, розроблена і захищена цими вченими. Ми знаємо, що в дев'ятнадцятому столітті прийняття неевклідової геометрії було нелегким, і важкою була доля Лобачевського і особливо Больяї (див., наприклад, книгу [18]). Ми можемо вірити, що завдяки їхнім зусиллям тепер ми можемо легко розглядати не лише різні типи ріманових геометрій, а й простір-час із крученням геометрії Фінслера і деякі ще більш екзотичні геометрії, частина яких була згадана під час цієї конференції. Повертаючись до теми нашого виступу, можна сказати, що геометрія простору-часу з двома часоподібними напрямками навряд чи може бути узгоджена з нашою інтуїцією. Дійсно, здається цілком очевидним, що час є чимось лінійним і одновимірним. З іншого боку, в рамках сучасної фізики, особливо в квантовій ґравітації і космології, виникає так звана "проблема часу". Дійсно, через інваріантність репараметризації загальної теорії відносності гамільтоніан закритого Всесвіту пропорційний лінійній комбінації додаткових умов першого класу. Тоді, якщо ми реалізуємо процедуру Дірака квантування системи з в'язями, ми побачимо, що, застосувавши гамільтоніан до прийнятного квантового стану Всесвіту, ми отримаємо нуль. Це дає нам знамените рівняння Вілера–ДеВітта [19], яке можна розглядати як рівняння Шредінгера без часу. Час зникає і змушує його виникати знову, доводиться застосовувати скоріше складну процедуру фіксації калібрування, поділу ступенів вільності, що відіграє роль параметра часу, конструювання гільбертового простору зі скалярним добутком, що забезпечує розумну ймовірність інтерпретації приведеної хвильової функції тощо. Ми згадали цю проблему, щоб показати, що ситуації, коли час зникає, а потім знову з'являється, не такі вже й незвичайні в сучасній фізиці. Більш того, навіть у нерелятивістичній квантовій механіці можна зіткнутися з цією проблемою в подібному вигляді (див., наприклад, книгу [20]). Дійсно, якщо ми маємо закриту квантову систему, яка знаходиться у власному енергетичному стані, параметр часу входить у розв'язок відповідного рівняння Шредінгера як простий фазовий фактор $\exp(-iEt/\hbar)$, і, здається, еволюція зникає. Таким чином, потрібно зробити процедури, подібні до тих, що застосовуються в квантовій космології, щоб час знову з'явився. У цьому випадку ми бачимо деякі переходи між фізикою без часових вимірів і фізикою в одному часовому вимірі. З цієї точки зору перехід між світом з двочасовими вимірами і світом з одним часовим виміром не виглядає таким дивним.

Що стосується історії симетрії Керролла, то вона описана в нещодавньому препринті Леві-Леблонда [21]. Фізика світу, де швидкість світла дорівнює нулю, довгий час вважалася математичною цікавиною, а потім були виявлені і вивчені корисні застосування цієї ідеї. Сюди можна додати, що в різних галузях фізики зустрічаються ситуації, коли швидкість передачі сигналів менша за швидкість частинок, і світ Керрола може являти собою екстремальний випадок такого явища.

1. I. Bars, C. Kounnas. String and particle with two times. *Phys. Rev. D* **56**, 3664 (1997).
2. I. Bars, C. Kounnas. Theories with two times, *Phys. Lett. B* **402**, 25 (1997).
3. I. Bars, C. Deliduman, O. Andreev. Gauged duality, conformal symmetry and spacetime with two times. *Phys. Rev. D* **58**, 066004 (1998).
4. I. Bars. Conformal symmetry and duality between free particle, H – atom and harmonic oscillator. *Phys. Rev. D* **58**, 066006 (1998).
5. I. Bars. Hidden symmetries, $AdS_D \times S^n$, and the lifting of one-time physics to two-time physics. *Phys. Rev. D* **59**, 045019 (1999).
6. I. Bars, J. Terning. *Extra Dimensions in Space and Time* (Springer, 2010) [ISBN: 978-0-387-77637-8].
7. I. Bars. Two time physics in field theory. *Phys. Rev. D* **62**, 046007 (2000).
8. I. Bars. Gravity in 2T- Physics. *Phys. Rev. D* **77**, 125027 (2008).
9. I. Bars, S.-H. Chen, P.J. Steinhardt, N. Turok. Antigravity and the big crunch/big bang transition. *Phys. Lett. B* **715**, 278 (2012).
10. A. Kamenshchik, F. Muscolino. Looking for Carroll partilces in two time spacetime. *Phys. Rev. D* **109**, 025005 (2024).
11. J.-M. Lévy-Leblond. Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **3**, 1 (1965).
12. E. Inönu, E. P. Wigner. On the Contraction of Groups and their Representations. *Proc. Natl Acad. Sci.* **39**, 510 (1953).
13. N.D. Sen Gupta. On an Analogue of the Galilei Group. *Nuovo Cimento* **44**, 512 (1966).
14. G. Duval, G.W. Gibbons, P.A. Horvaty, P.M. Zhang. Carroll versus Newton and Galilei: two dual non-Einsteinian concepts of time. *Class. Quantum Grav.* **31**, 085016 (2014).
15. E. Bergshoeff, J. Gomis, G. Longhi. Dynamics of Carroll particles. *Class. Quantum Grav.* **31**, 205009 (2014).
16. M. Henneaux, P. Salgado-Rebolledo. Carroll contractions of Lorentz-invariant theories. *JHEP* **11**, 180 (2021).
17. J. de Boer, J. Hartong, N. A. Obers, W. Sybesma, S. Vandoren. Carroll symmetry, dark energy and inflation. *Front. Phys.* **10**, 810405 (2022).
18. A. Livanova. *Three Destinies, Understanding the World* (Znanie, 1969) (in Russian).
19. B.S. DeWitt. Quantum theory of gravity. 1. The canonical theory. *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
20. *Time in Quantum Mechanics (Lecture Notes in Physics)*. Edited by G. Muga, R. Sala Mayato, I. Egusquiza (Springer, 2002), 734 p. [ISBN: 978-3540432944].
21. J.-M. Lévy-Leblond, On the unexpected fate of scientific ideas: An archeology of the Carroll group. arXiv: 2212.14812 [physics.gen-ph].

Одержано 24.06.24.
Переклад на українську мову Ю.А. Куца

A. Kamenshchik, F. Muscolino

LOOKING FOR CARROLL
PARTICLES IN THE TWO-TIME SPACETIME

We make an attempt to describe Carroll particles with a non-vanishing value of energy (i.e., the Carroll particles which always stay in rest) in the framework of two-time physics, developed in the series of papers by I. Bars and his co-authors. In the spacetime with one additional time dimension and one additional space dimension, where one can localize the symmetry which exists between generalized coordinates and their conjugate momenta. Such a localization implies the introduction of the gauge fields, which, in turn, implies the appearance of some first-class constraints. Choosing different gauge-fixing conditions and solving the constraints, we obtain different time parameters, Hamiltonians, and, generally, physical systems in the standard one-time spacetime. We find a set of gauge fixing conditions which gives the description of a Carroll particle in the one-time world. We construct the quantum theory of such a particle using an unexpected correspondence between our parametrization and that obtained by Bars for the hydrogen atom in 1999.

K e y w o r d s: two-time spacetime, Carroll group, particles.