О.М. ГАВРИЛИК,[1] І.І. КАЧУРИК,[2] М.В. ХЕЛАШВІЛІ[1]

[1] Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143; e-mail: omgavr@bitp.kiev.ua, mary.khelashvili@gmail.com)
[2] Хмельницький національний університет
(Вул. Інституцька, 11, Хмельницький, 29016)

УДК 539

РОТАЦІЙНІ КРИВІ ГАЛАКТИК У ПІДХОДІ ДО ТЕМНОЇ МАТЕРІЇ НА ОСНОВІ μ-ДЕФОРМАЦІЇ [1]

В рамках μ-деформації розвинуто модель темної матерії, раніше побудовану у підході, що використовував μ-деформовану термодинаміку. Введено μ-аналоги рівняння Лейна–Емдена (для профілів густини) і знайдено його розв'язки. На їх основі побудовано графіки ротаційних кривих для низки галактик. Кожній кривій, які описують вибрані галактики, відповідає своє значення параметра деформації μ. Як наслідок, μ-деформація забезпечує покращене узгодження із спостережуваними даними. Для всіх розглянутих галактик отримані ротаційні криві (марковані значеннями μ) краще узгоджуються з даними порівняно із результатами відомої БЕК-моделі Т. Харко. Для п'яти з восьми галактик картина для ротаційних кривих є кращою навіть у порівнянні з відповідними кривими Наварро–Френка–Вайта (НФВ). Розглянуто можливий фізичний сенс параметра μ.

Ключові слова: темна матерія; μ-деформація, деформоване рівняння Лейна–Емдена; ротаційні криві галактик.

1. Вступ

Модель темної матерії як конденсату Бозе–Айнштайна (БЕК) скалярних частинок виникла як альтернатива до парадигми холодної темної матерії (ХТМ). Вона дає можливість розвя'зати низку слабких місць, які має ХТМ на малих масштабах відстаней, зокрема проблеми "core-cusp" і зверхнадлишковості дрібно-масштабних структур [1]. Однак, модель БЕК не є єдиною в цьому аспекті, і такі моделі як тепла темна матерія (тепла ТМ), чи самовзаємодійна ТМ також спроможні вирішити проблеми ХТМ на малих масштабах.

У БЕК моделі розглядають галактичне гало з ультралегкої ТМ як стійкий розв'язок типу кора нелінійного рівняння Шрьодінгера (або Гроса–Пітаєвського) з класичним рівнянням Пуасона для гравітаційного потенціалу гало ТМ, оточеного "ковдрою" з ТМ, яка імітує гало ХТМ на більших відстанях від центра галактики [2].

Аналіз кінематики світної матерії в галактиках, зокрема у сфероїдальних карликових, вказує на те, що ядро у когерентному стані може представляти всю необхідну ТМ у карликових галактиках, але лише якусь малу частину ТМ – у більших галактиках [3].

Частинки ТМ у нашій моделі – це ультралегкі скалярні частинки маси $m \sim (1\text{–}10) \cdot 10^{-22}$ еВ в гарному узгодженні з більшістю спостережень (за винятком Лаймана-α лісу). Скалярні частинки з такою надзвичайно малою масою [2] можна розглядати як аксіоноподібні, так що їх маси захищені від радіаційних поправок деякою зсувною симетрією $\phi \to \phi + C$. Зазвичай основою цього є вільне скалярне поле з потенціалом ϕ^4 самовзаємодії [2]. Існують також і узагальнення цієї моделі, в деяких із них вводять складніші (ніж ϕ^4) потенціали самовзаємодії. Інший цікавий шлях – вводити немінімальний зв'язок конденсату з гравітацією, наприклад, через потенціали $G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi$ або $\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi R$ (тут $G_{\mu\nu}$ – тензор Айнштайна, R – скалярна кривина) [5, 6].

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

[2] Зауважимо, що в деяких роботах, наприклад [4], у ролі частинок бозе-конденсату ТМ виступають гравітони дуже малої маси, обмеженої зверху як $m_g \sim 10^{-26}$ еВ.

© О.М. ГАВРИЛИК, І.І. КАЧУРИК, М.В. ХЕЛАШВІЛІ, 2019

Зовсім інший напрямок складають моделі ТМ, основані на нестандартних статистиках, як наприклад конденсат частинок із нескінченною статистикою [7], а також запропонована в нашій попередній роботі модель ТМ як конденсату газу, що підлягає μ-деформованій термостатистиці [8].

2. Бозе-конденсатна модель Темної матерії: рівняння Гроса–Пітаєвського та Лейна–Емдена

У БЕК-моделі темної матерії вважають, що ТМ складається з ультралегких бозонів маси 10^{-22} еВ, так що її довжина хвилі Де-Бройля має астрономічний масштаб (кпс). В цій моделі, галактичне гало ТМ представлене галом з таких частинок, більшість з яких перебуває в основному стані, і таким чином формує нерелятивістський самогравітуючий конденсат БЕ. Дамо короткий огляд опису БЕК-гало за допомогою рівняння Гроса–Пітаєвського(див. [9] стосовно більш детального викладу). Якщо враховуються лише частинки з основного стану, то таке конденсатне гало може бути описано рівнянням Гроса–Пітаєвського

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r})+V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})+\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Psi(\mathbf{r})|^2\Psi(\mathbf{r})=\tilde{\mu}\Psi(\mathbf{r}), \tag{1}$$

де $\Psi(\mathbf{r})$ – хвильова функція основного стану, $\tilde{\mu}$ позначає хімічний потенціал, а член $\propto |\Psi(\mathbf{r})|^2\Psi(\mathbf{r})$ відповідає за саморозсіяння частинок конденсату, $V(\mathbf{r})$ представляє довільний зовнішній потенціал, який у нашому випадку є ньютонівським гравітаційним потенціалом гало ТМ, що описується рівнянням Пуасона:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Частинки в конденсатному стані вважаються нерелятивістськими, з майже нульовою температурою і, отже, застосовним є наближення Томаса–Фермі, коли кінетичним членом у рівнянні нехтують. Відповідне рівняння, якщо ввести густину частинок

$$\rho(\mathbf{r}) = m|\Psi(\mathbf{r})|^2$$

замість хвильової функції, можна переписати в більш простому вигляді:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{m^2}{4\pi\hbar^2 a}\left(\tilde{\mu} - mV(\mathbf{r})\right).$$

Тоді, подібно до [9], застосуємо до останнього рівняння оператор Лапласа і використаємо (2), що дає

$$\Delta_r\rho(r) + k^2\rho(r) = 0, \quad k^2 \equiv \frac{Gm^3}{\hbar^2 a}, \tag{3}$$

(де a – довжина розсіяння), тобто рівняння Лейна–Емдена політропного індексу $n = 1$. Це рівняння допускає простий аналітичний розв'язок для опису густини гало ТМ у БЕК-моделі ТМ:

$$\rho(r) = \rho_c\frac{\sin kr}{kr}. \tag{4}$$

Розв'язок містить два вільні параметри $\rho_c = \rho(0)$ – густину в центрі гало ТМ DM і параметр k, що пов'язаний із повним радіусом гало R як $k = \pi/R$.

Слід зауважити, що цей розв'язок враховує лише частинки з основного стану, проте в більш реалістичному описі інші стани також потрібно враховувати. Відомо також, що ультралегке гало ТМ складається із статичного кора (що дозволяє розв'язати проблему core/cusp), оточеного шубою, яка на більших масштабах відстаней зводиться до ХТМ поведінки [2]. Розв'язок (4) відповідає лише за корчастину гало галактичної ТМ, тому ми очікуємо, що він забезпечить гарне пояснення спостережень на масштабах, менших ніж розмір кора (ядра), і в той же час усуватиме деякі розбіжності з даними спостережень по більш віддалених областях галактик.

Важливо також згадати, що такий самий наближений розв'язок може бути отриманий з рівняння Клейна–Гордона для скалярного поля, що робить ці моделі тісно пов'язаними.

3. Деформація рівняння Лейна–Емдена

Оскільки μ-деформований аналог рівняння Гроса–Пітаєвського поки що не побудовано (це становить нетривіальну проблему), тут ми зупинимося на μ-деформації рівняння Лейна–Емдена (ЛЕ).

3.1. Елементи μ-числення

Ми базуватимося на т. зв. μ-численні, тому почнемо з короткого його огляду (більш детальний вступ до μ-числення можна знайти в [8, 10]). В основі цього підходу лежить μ-дужка (нехай X – число або оператор):

$$[X]_\mu = \frac{X}{1+\mu X}, \quad \mu \geq 0.$$

Очевидно, що $[X]_\mu \to X$ if $\mu \to 0$. За допомогою μ-дужки визначимо μ-деформовану (або μ-) похідну таким чином, що

$$\mathcal{D}_x^{(\mu)} x^n = [n]_\mu x^{n-1}. \tag{5}$$

Ця μ-похідна не задовільняє[3] правило Ляйбніца,

$$\mathcal{D}_\mu(f \cdot g) \neq f \cdot (\mathcal{D}_\mu g) + (\mathcal{D}_\mu f) \cdot g.$$

Зауважимо, що з дією (5) пов'язано представлення μ-похідної через звичайну похідну у вигляді формального степеневого ряду, тобто

$$\mathcal{D}_x^{(\mu)} \equiv \left[\frac{d}{dx}\right]_\mu = \frac{\frac{d}{dx}}{1+\mu\frac{d}{dx}} =$$
$$= \frac{d}{dx}\Big(1 - \mu\frac{d}{dx} + \mu^2 \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} - ...\Big), \tag{6}$$

яке містить усі вищі порядки похідної $\frac{d}{dx}$. Це факт відіграє важливу роль.

Далі введемо деформацію в досліджувану теорію шляхом заміни кожної похідної у рівнянні на її деформований аналог. Також μ-дужка потрібна, щоби ввести деформовані версії відомих функцій, скажімо, μ-аналог експоненти:

$$\exp_\mu x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_\mu!}.$$

Також визначаємо функції μ-синус і μ-косинус:

$$\sin_\mu x = \frac{1}{2i}\left(\exp_\mu(ix) - \exp_\mu(-ix)\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_\mu!},$$
$$\cos_\mu(x) = \frac{1}{2}\left(\exp_\mu(ix) + \exp_\mu = (-ix)\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{[2n]_\mu!}.$$

Тут μ-факторіал означає добуток

$$[m]_\mu! = [m]_\mu\,[m-1]_\mu ... [2]_\mu\,[1]_\mu.$$

Деформовані гармонічні функції гратимуть роль у наступних розділах. Потрібно наголосити на тому, що відомі диференційні співвідношення між гармонічними функціями (із звичайною похідною) не виконуються у μ-деформованому випадку: $\frac{d}{dx}\sin_\mu(x) \neq \cos_\mu(x)$. Однак, справедливим є деформований аналог, який використовує μ-похідну, а саме

$$\mathcal{D}_x^\mu \sin_\mu(x) = \cos_\mu(x).$$

Зрозуміло, що деформовані аналоги похідної і функцій мають зводитися до їх звичайних відповідників, якщо взяти границю $\mu \to 0$. Так само повинні відновлюватись, на кожному кроці аналізу, недеформовані прообрази з μ-деформованих рівнянь теорії.

3.2. Деформування лапласіана

Як вже згадувалося, густина гало ТМ в БЕК-моделі наближено описується рівнянням Лейна–Емдена (ЛЕ) з політропним індексом $n = 1$:

$$\Delta_r \rho(r) + k^2 \rho(r) = 0, \tag{7}$$

де Δ_r є радіальна (отже, 1-вимірна) частина сферичного оператора Лапласа, а саме

$$\Delta_r f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} f(r)\right).$$

Останнє можна ще представити у вигляді

$$\Delta_r f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f(r),$$

і тоді рівняння ЛЕ набуває більш простої форми

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2\right)\rho(r) = 0. \tag{8}$$

Щоб деформувати, почнемо із рівняння ЛЕ у більш звичній його формі (7). Деформацію в рівняння введемо за допомогою заміни похідної по радіусу r на її μ-деформований аналог. В результаті отримуємо μ-аналог рівняння ЛЕ:

$$\frac{1}{r^2}\mathcal{D}_r^\mu\left(r^2 \mathcal{D}_r^\mu \rho(r)\right) + k^2\rho(r) = 0.$$

Дане рівняння можна також переписати, вводячи безрозмірну змінну $x = kr$, і тоді ми матимемо

$$\frac{1}{x^2}\mathcal{D}_x^\mu\left(x^2 \mathcal{D}_x^\mu \rho(x)\right) + \rho(x) = 0. \tag{9}$$

[3] Можна одначе ввести μ-аналог формули Ляйбніца, хоч його визначення досить нетривіальне, див. [8].

Крім того, приймемо таку ж початкову умову, яку покладали при розв'язанні вихідного рівняння:

$$\rho(0)=\rho_c, \quad \rho'(0)=0.$$

У цьому співвідношенні можна застосовувати як звичайне, так і μ-диференціювання. Як стане видно нижче, це не впливає на результат.

Розв'язок рівняння (8) шукаємо у вигляді

$$\rho(x)=\rho_c\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

Оператори в цьому рівнянні діють на ряди, а саме

$$\mathcal{D}_x^\mu\cdot\,\rho(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n[n]_\mu x^{n-1},$$
$$\mathcal{D}_x^\mu\cdot\,\left(x^2\,\rho(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n[n]_\mu[n+1]_\mu x^n,$$

Тоді з рівняння μ-ЛЕ отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n[n]_\mu[n+1]_\mu x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0, \tag{10}$$

а початкові умови дають

$$\rho(0)=\rho_c=\rho_c a_0 \quad\to\quad a_0=1,$$
$$\rho'(0)=0=\rho_c a_1 \quad\to\quad a_1=0.$$

Заміна границь сумування дає:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}[n+2]_\mu[n+3]_\mu x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0\,,$$

із чого витікає зв'язок між коефіцієнтами:

$$a_{n+2}=-a_n\frac{1}{[n+2]_\mu[n+3]_\mu}, \quad n=2m.$$

Тоді

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{[2n]_\mu[2n+1]_\mu}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{[3]_\mu[2]_\mu}=$$
$$=(-1)^n\frac{1}{[2n+1]_\mu!}[1]_\mu.$$

Розв'язок набуває вигляду

$$\rho(kr)=\rho_c\,[1]_\mu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(kr)^{2n}}{[2n+1]_\mu!}=\rho_c\,[1]_\mu\frac{\sin_\mu(kr)}{kr}.$$

Нарешті, вводячи позначення $\rho_0=\rho_c\,[1]_\mu$, отримуємо

$$\rho(kr)=\rho_0\,\frac{\sin_\mu(kr)}{kr}, \tag{11}$$

основний результат для розподілу густини ТМ.

3.3. Деформування похідної в рівнянні ЛЕ

Як відомо для деформованих моделей, можна запропонувати різні варіанти деформацій рівнянь. Тут ми представимо дещо іншу версію μ-деформованого рівняння ЛЕ. Беремо рівняння ЛЕ політропного індексу $n=1$ в його відомій формі (8) і вводимо деформацію через заміну кожної просторової похідної d/dr на її μ-аналог $\mathcal{D}_r^\mu$:

$$\left(\mathcal{D}_r^\mu\mathcal{D}_r^\mu+\frac{2}{r}\mathcal{D}_r^\mu+k^2\right)\rho(r)=0. \tag{12}$$

Розв'язок знову шукаємо як степеневий ряд:

$$\rho(x)=\rho_c\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

Підставляємо в рівняння, що дає

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}[n+2]_\mu[n+1]_\mu x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}[n+1]_\mu x^{n-1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0.$$

Скористаємось тими ж початковими умовами $\rho(0)=\rho_c,\ \rho'(0)=0$ і після відповідних кроків матимемо[4]:

$$\rho(r)=\rho_c\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(kr)^{2n}}{\prod\limits_{l=1}^{n}[2l]_\mu([2l-1]_\mu+2)}. \tag{13}$$

4. Ротаційні криві галактик

Зіставимо передбачення нашої моделі з доступними даними спостережень. Ротаційні криві аналізуємо для галактик слабкої світності (ГСС), оскільки кінематика видимої матерії в галактиці залежить від розподілу густини всередині галактики. Ми обрали ті вісім ГСС, які аналізував Т. Харко, з тим щоб порівняти моделі. Оскільки в них ТМ є домінує, ми нехтуємо гравітаційним внеском баріонної матерії.

У випадку галактик дискової форми, де траєкторії зірок і газових хмар вважаються круговими з

[4] Існує й третя версія деформованого рівняння ЛЕ, яка також має розв'язок (11), в ній перший член такий же як і в (12), а другий і 3-й множаться на деякі функції від k, r та μ. Це буде представлено окремо.

Ротаційні криві галактик у μ-деформаційному наближенні

Галактика	μ-БЕК				БЕК			НФВ	$N_{\text{точок}}$
	A, км/с	k, кпс$^{-1}$	μ	χ^2	A, км/с	k, кпс$^{-1}$	χ^2	χ^2	
DDO 53	32,27	0,97	0,180	**1,9**	33,16	1,09	5,4	7,8	18
HO I	35,51	1,27	0,151	**40,2**	34,78	1,27	160,1	109,8	22
HO II	40,11	0,40	0,179	31,8	37,93	0,45	66,8	**6,4**	35
IC 2574	81,37	0,17	0,179	**13,7**	73,9	0,24	14,2	117,2	50
NGC 2366	64,68	0,37	0,178	**41,2**	72,72	0,37	126,1	71,9	41
M81dwB	38,35	2,64	0,180	**2,5**	38,07	3,15	7,9	4,1	13
DDO 154	51,30	0,38	0,156	199,3	53,81	0,38	549,7	**76,8**	61
DDO 39	87,52	0,27	0,174	168,2	87,96	0,30	343,0	**14,3**	21

гарною точністю, тому можна застосувати просте співвідношення

$$mv(r)^2 = \frac{GM(r)m}{r},$$

що виникає, за теоремою віріалу, із зв'язку між кінетичною і потенціальною енергіями, $2T = V$, для стійкої системи в гравітаційному потенціалі $V \propto r^{-1}$. Тоді швидкість $v(r)$ на круговій орбіті радіуса r має вигляд:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}.$$

Це рівняння дозволяє вивчати розподіл густини матерії в галактиці через спостережувані ротаційні криві. Ми будемо нехтувати гравітаційним ефектом видимої матерії, беручи до уваги в попередньому рівнянні для $M(r)$ лише складову ТМ.

Отже, щоби визначити швидкість $v(r)$ на довільній орбіті r, необхідно обчислити в межах цієї орбіти повну масу

$$M(r) = 4\pi \int\limits_0^r \rho(r')r'^2 dr'.$$

Згідно до деформованих диференціальних співвідношень із радіальною координатою r, маємо застосовувати деформоване (чи μ-) інтегрування [5]. В результаті отримуємо наступний вираз для швидкості на круговій орбіті на основі "лаплас-деформованого" розв'язку (11):

$$v(r) = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kr)^{2n+2}}{[2n+1]_\mu ! \, [2n+3]_\mu}} \tag{14}$$

для густини, де введено позначення

$$A = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{k^2}}.$$

Подамо також вираз для швидкості обертання, оснований на розв'язку рівняння (13) ("деформація похідної"):

$$v(r) = A \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kr)^{2n+2}}{[2n+3]_\mu \prod\limits_{l=1}^{n} [2l]_\mu ([2l-1]_\mu + 2)}}. \tag{15}$$

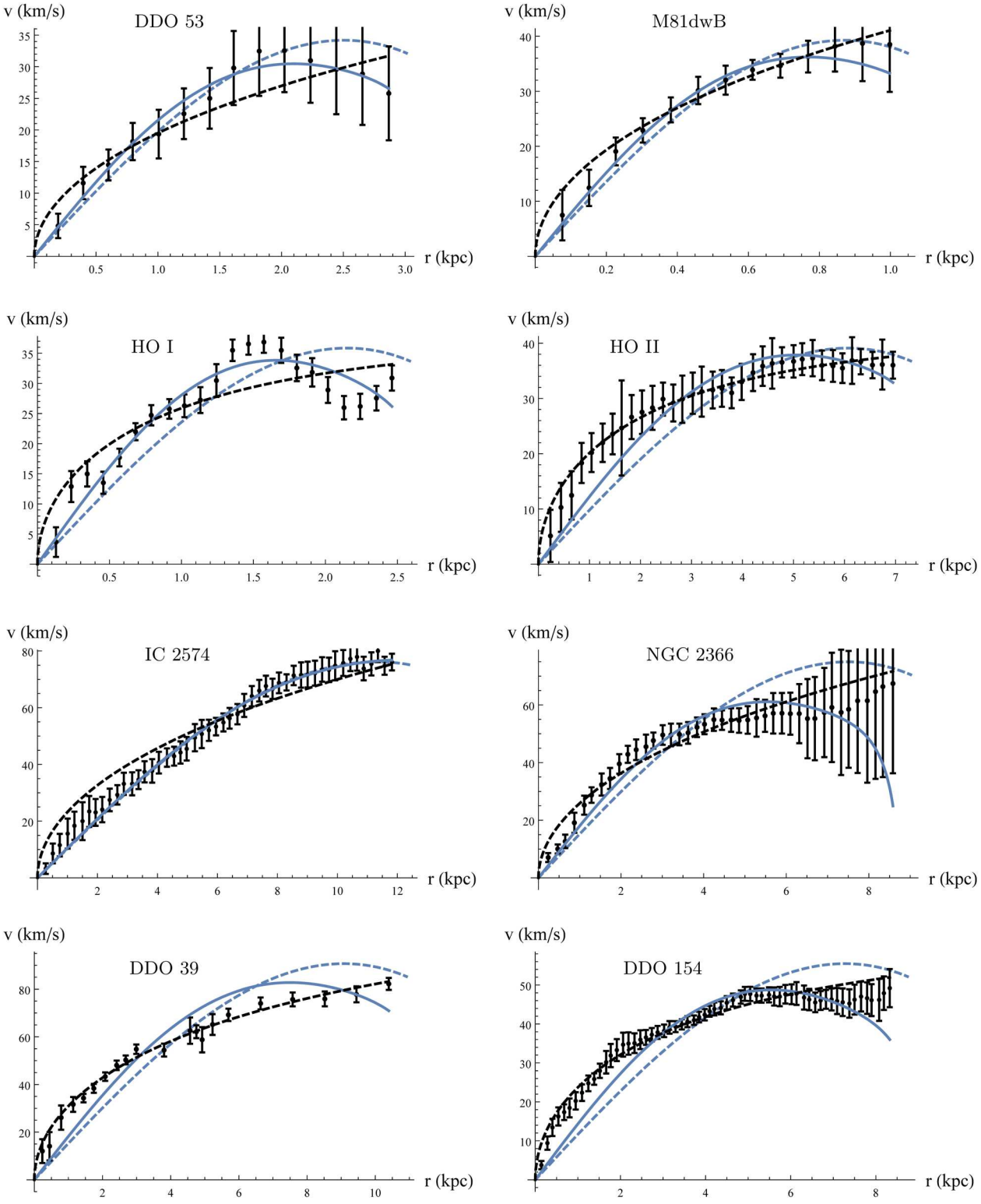
Робимо аналіз "найменших квадратів" для тих же восьми ГСС, що вивчалися в роботі Харко [9] в рамках класичної БЕК моделі ТМ. Спостережувані ротаційні криві цих галактик взято з [11–13].

У таблиці, а також на рисунку (суцільні лінії зображують наші криві) наведено результати фітінгу для восьми ГСС теоретичних ротаційних кривих: в рамках БЕК ТМ, що випливають із розв'язку для густини ТМ (4), ротаційних кривих в μ-"лаплас-деформації" (14), а також профілю Наварро–Френка–Вайта [12] для ХТМ

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s}\left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}.$$

Найменші χ^2-значення у кожної із галактик в трьох різних моделях виділено жирним шрифтом.

[5] Це значить застосування оператора $(D_r^{(\mu)})^{-1}$, оберненого до визначеного в (4), (5).


v (km/s)
DDO 53
r (kpc)
v (km/s)
M81dwB
r (kpc)
v (km/s)
HO I
r (kpc)
v (km/s)
HO II
r (kpc)
v (km/s)
IC 2574
r (kpc)
v (km/s)
NGC 2366
r (kpc)
v (km/s)
DDO 39
r (kpc)
v (km/s)
DDO 154
r (kpc)

5. Висновки і заключні зауваження

У розвиток моделі темної матерії, що експлуатувала μ-термодинаміку [8], досліджено підхід, базований на μ-деформації просторової похідної. Введено два різні μ-деформовані аналоги рівняння Лейна–Емдена і знайдено їх розв'язки, що дають профілі густини гало ТМ. Це дозволило отримати графіки для ротаційних кривих низки галактик. Відповідні криві для вибраних галактик потребують різних значень параметра деформації μ. Завдяки μ-деформації досягнуто гарне узгодження: для всіх вибраних галактик графіки показують значне покращення порівняно з БЕК із [9].

Більш того, розвинутий підхід дає дещо покращене узгодження навіть порівняно з відомими кривими НФВ [12], у п'яти (з восьми) випадках, тобто криві для галактик DDO 53, HO I, IC 2574, NGC 2366 та M81dwB.

Важливість і сила μ-деформації закладені в певній нелокальності при використанні деформованої просторової μ-похідної (6): новий оператор містить звичайну похідну у знаменнику і, отже, задіяні всі порядки похідної $\frac{d}{dr}$. Ця риса нагадує відомі підходи з нелокальною модифікацією гравітації, див. [14–18] і цитовані там роботи. Існує досить популярна точка зору, що теорії нелокальної гравітації важливі у розв'язанні базових проблем космології – таких як темна енергія і темна матерія.

Підхід на основі μ-деформації виявився успішним, тому варто прокоментувати можливий фізичний сенс μ-деформації просторової (радіальної) похідної та параметра μ. Гало ТМ є дуже масивними, але відносно компактними (з точки зору масштабів у космології) об'єктами, і вони мали б модифікувати геометрію зовнішнього простору. Деформована μ-похідна може ефективно це враховувати, при цьому μ є мірою того, наскільки виражена модифікація.

При цьому обчислення повної маси гало ТМ галактики (з фіксованим власним радіусом) показує: чим більша маса гало, тим більшого значення μ потребує відповідна крива. Нарешті зауважимо, що аналогічні наслідки можна отримати базуючись на формулі (15).

Робота виконувалася за часткової підтримки Спеціальної Програми, Проект № 0117U000240, Відділення фізики і астрономії Національної академії наук України.

1. A. Suarez, V. Robles, T. Matos. A review on the scalar field/Bose–Einstein condensate dark matter model. *Astroph. and Space Sci. Proc.* **38**, 107 (2013).
2. L. Hui, J. Ostriker, S.Tremaine, E. Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Phys. Rev. D* **95**, 043541 (2017).
3. A. Diez-Tejedor, A. Gonzalez-Morales, S. Profumo. Dwarf spheroidal galaxies and Bose–Einstein condensate dark matter. *Phys. Rev. D* **90**, 043517 (2014).
4. E. Kun, Z. Keresztes, S. Das, L.A. Gergely. Slowly rotating Bose–Einstein Condensate confronted with the rotation curves of 12 dwarf galaxies. *Symmetry* **10**, 520 (2018).
5. D.Bettoni, M. Colombo, S. Liberati. Dark matter as a Bose–Einstein Condensate: the relativistic non-minimally coupled case. *JCAP* **02**, 004 (2014).
6. D. Bettoni, S. Liberati, L. Sindoni. Extended ΛCDM: generalized non-minimal coupling for dark matter fluids. *JCAP* **11**, 007 (2011).
7. Z. Ebadi, B. Mirza, H. Mohammadzadeh. Infinite statistics condensate as a model of dark matter. *JCAP* **11**, 057 (2013).
8. A. Gavrilik, I. Kachurik, M. Khelashvili, A. Nazarenko. Condensate of μ-Bose gas as a model of dark matter. *Physica A* **506**, 835 (2018).
9. T. Harko. Bose–Einstein condensation of dark matter solves the core/cusp problem. *JCAP* **11**, 022 (2011).
10. A.P. Rebesh, I.I. Kachurik, A.M. Gavrilik. Elements of μ-calculus and thermodynamics of μ-Bose gas model. *Ukr. J. Phys.* **58**, 1182 (2013).
11. Se-Heon Oh, W. de Blok, E. Brinks, F. Walter, R. Jr. Dark and luminous matter in THINGS dwarf galaxies. *The Astronomical Journal* **141**, No. 6, 193 (2011).
12. K. Oman, J. Navarro *et al.* The unexpected diversity of dwarf galaxy rotation curves. *MNRAS* **452**, 3650 (2015).
13. R. Swaters, M. Verheijen, M. Bershady, D. Andersen. The kinematics in the core of the low surface brightness galaxy DDO 39. *Astrophys. J.* **587**, L19 (2003).
14. S. Deser, R.P. Woodard. Nonlocal cosmology. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 111301 (2007).
15. F.W. Hehl, B. Mashhoon. Nonlocal gravity simulates dark matter. *Phys. Lett. B* **673**, 279 (2009).
16. I. Arraut. Can a non-local model of gravity reproduce Dark Matter effects in agreement with MOND? *Int. J. Mod. Phys. D* **23**, 1450008 (2014).
17. K. Fernandes, A. Mitra. Can a non-local model of gravity reproduce Dark Matter effects in agreement with MOND? *Phys. Rev D* **97**, 105003 (2018).
18. S.Y. Park. Revival of the Deser-Woodard nonlocal gravity model: Comparison of the original nonlocal form and a localized formulation.*Phys. Rev D* **97**, 044006 (2018).

Одержано 06.10.19

A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, M.V. Khelashvili

GALAXY ROTATION CURVES
IN THE μ-DEFORMATION-BASED
APPROACH TO DARK MATTER

S u m m a r y

We elaborate further the μ-deformation-based approach to the modeling of dark matter, in addition to the earlier proposed use of μ-deformed thermodynamics. Herein, we construct μ-deformed analogs of the Lane–Emden equation (for density profiles) and find their solutions. Using these, we plot the rotation curves for a number of galaxies. Different curves describing the chosen galaxies are labeled by respective (different) values of the deformation parameter μ. As a result, the use of μ-deformation leads to the improved agreement with observational data. For all the considered galaxies, the obtained rotation curves (labeled by μ) agree better with data, as compared to the well-known Bose–Einstein condensate model results of T. Harko. Besides, for five of the eight cases of galaxies, we find a better picture for rotation curves, than the corresponding Navarro–Frenk–White (NFW) curves. The possible physical meaning of the parameter μ basic for this version of μ-deformation is briefly discussed.