О.В. ХОМЕНКО

Сумський державний університет
(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 40007; e-mail: o.khomenko@mss.sumdu.edu.ua)

УДК 539.8

САМОПОДІБНИЙ РЕЖИМ ФРАГМЕНТАЦІЇ МЕТАЛІВ ПРИ ІНТЕНСИВНІЙ ПЛАСТИЧНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ

В рамках нерівноважної еволюційної термодинаміки проведено подальше дослідження впливу адитивних флуктуацій на кінетику структурних дефектів при інтенсивній пластичній деформації, що являє новий метод опису режимів фрагментації та відповідних процесів самоорганізації. Встановлено, що у фрагментованому металевому зразку спостерігається самоподібна поведінка, при якій утворюється множина граничних структур із різними розмірами зерен. Такий режим реалізується за умови, що розподіл ймовірності реалізації значень густини меж зерен має степеневий вид. Порівняння отриманих результатів у формах Іто та Стратоновича продемонструвало відсутність якісних змін у поведінці системи.

Ключові слова: межа зерна, дислокація, фазовий перехід, фазова діаграма, внутрішня енергія, адитивний шум, самоподібність.

1. Вступ

Відомо, що під час фрагментації металевого зразка методами інтенсивної пластичної деформації (ІПД) за певних умов у матеріалі відбувається формування так званих фрактальних структур [1–8]. У результаті гранична (стаціонарна) структура металу визначається степеневим розподілом суміші зерен різного розміру, характерний масштаб яких визначити неможливо (у даному випадку – масштаб густини меж зерен (МЗ) h_g). Оскільки при збільшенні поверхні зразка у будь-яку кількість разів система проявляє самоподібну поведінку (морфологія поверхні весь час подібна сама собі), тобто система зберігає співвідношення між параметрами стану [9, 10].

Для опису процесу фрагментації металевої структури у роботах [11–18] розвинуто узагальнену термодинамічну модель, що ґрунтується на комбінації методів класичних нерівноважної термодинаміки та теорії фазових переходів Ландау. Вона дозволила описати кінетику дефектної підсистеми (дислокацій та МЗ), а також дослідити умови формування та стійкість утворених граничних (стаціонарних) субмікрокристалічних (СМК) чи нанокристалічних (НК) структур. У той самий час запропонована теорія враховує вплив флуктуацій основних параметрів (шуму), що в деяких випадках може істотно змінити характер еволюції системи та навіть привести до виникнення нових станів [16, 19–22], які не можуть реалізуватися у детерміністичному випадку [11–14, 23–25].

В даній роботі показано, що введення адитивних шумів основних параметрів дозволяє описати самоподібну поведінку структурних дефектів у процесі утворення граничних СМК чи НК структур. Досліджено умови формування квазіфрактальних зернистих структур. Виявлено, що в діапазоні значень густини МЗ $h_g \sim 10^{-5}$–10^{10} м$^{-1}$ функція розподілу набуває степеневого виду. Порівняння отриманих результатів демонструє, що вибір системи числення Іто та Стратоновича впливає виключно на дисперсію флуктуацій параметра стану h_g довкола стаціонарних значень системи та приводить до перенормування спектрального розподілу розмірів зерен у сформованій НК чи СМК граничній структурі, проте реалізація безпосередньо стаціонарних значень густини МЗ не залежить від вибору інтерпретації.

2. Ефективний потенціал

Представимо базовий енергетичний потенціал для густини внутрішньої енергії у такому вигляді:

[11, 19]:

$$u\left(h_g,h_D\right)=u_0+\sum_{m=g,D}\left(\varphi_{0m}h_m-\frac{1}{2}\varphi_{1m}h_m^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\varphi_{2m}h_m^3-\frac{1}{4}\varphi_{3m}h_m^4\right)+\varphi_{gD}h_gh_D-\psi_{gD}h_g^2h_D,\quad(1)$$

$$u_0=\frac{1}{2}M\left(\varepsilon_{ii}^e\right)^2+2\mu I_2,\qquad(2)$$

$$\varphi_{0m}=\varphi_{0m}^*+g_m\varepsilon_{ii}^e+\left(\frac{1}{2}\bar{M}_m\left(\varepsilon_{ii}^e\right)^2+2\bar{\mu}_mI_2\right),\qquad(3)$$

$$\varphi_{1m}=\varphi_{1m}^*+2e_m\varepsilon_{ii}^e,\qquad(4)$$

де u_0 – частина внутрішньої енергії, що не залежить від дефектності матеріалу (рівень відліку); h_g, h_D – густини МЗ та дислокацій [1]; значення індексів $m = g$ відносяться до МЗ, а $m = D$ – до дислокацій; $M = \lambda + 2\mu$ – модуль одностороннього стиснення матеріалу [26, 27]; λ, μ – сталі Ламе; ε_{ii}^e, $I_2 \equiv (-\varepsilon_{ii}^e\varepsilon_{jj}^e + \varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{ji}^e)/2$ – перший та другий інваріанти тензора пружних деформацій; φ_{0m}^* – власна енергія дефекту з урахуванням його розмірності (на одиницю довжини для дислокацій і поверхнева густина для МЗ); φ_{0m} – та сама енергія з урахуванням впливу пружних деформацій в лінійному (константа g_m) і квадратичному наближеннях; додатна стала g_m відповідає за процес генерації структурних дефектів при розтягненні $\varepsilon_{ii}^e > 0$, або за їх анігіляцію у випадку реалізації стиснення $\varepsilon_{ii}^e < 0$; $\bar{M}_m$, $\bar{\mu}_m$ – пружні сталі, які відображають зменшення відповідних пружних модулів, що зумовлено існуванням структурних дефектів; φ_{1m}^*, φ_{1m} – коефіцієнти, що відповідають за процеси рекристалізації (анігіляції дефектів) без урахування та з урахуванням впливу пружної деформації в лінійному наближенні (константа e_m); відповідно e_m відображає прискорення процесу анігіляції при додатному значенні $\varepsilon_{ii}^e > 0$, у випадку від'ємного $\varepsilon_{ii}^e < 0$ розуміється зворотно-направлений процес; φ_{gD} – параметр, що відображає енергію взаємодії вибраних структурних дефектів. У загальному випадку додатні внески у співвідношенні (1) визначають генерацію структурних дефектів, а від'ємні складові відповідають зворотним процесам – анігіляції дефектів (рекристалізації).

[1] Припускається, що розмір зерна набуває приблизне значення, обернено пропорційне h_g (тобто $d \sim 1/h_g$).

Вираз для густини внутрішньої енергії (1), на відміну від вихідного [11–14], містить останній доданок, завдяки якому описується самоузгоджена поведінка густини МЗ h_g та дислокацій h_D й адитивний шум перетворюється у мультиплікативний [19]. Знак мінус перед ним забезпечує формування стаціонарних станів (максимумів термодинамічного чи синергетичного потенціалів) та відображає принцип Ле-Шательє, згідно з яким термодинамічний процес більш високого рівня спрямований на компенсацію ефектів від термодинамічних процесів нижчого рівня. Слід відзначити, що розглядаються такі методи обробки, де температура на контактних поверхнях зразка може підвищуватися на 50–70°, за якої плавлення не відбувається.

Степеневе розвинення (1) за умови додатних значень коефіцієнтів φ_{km} ($k = 0$–3) може формувати два максимуми. У випадку МЗ, максимуми відповідають утворенню двомодового розподілу за розмірами зерен. У разі дислокацій, мода, що відповідає меншому значенню дефектності, описує випадковий (однорідний) розподіл представленого дефекту, відповідно більше значення дефектності відображає ансамбль дислокацій, які утворюють комірчасту структуру. Зазначимо, що для опису формування граничної (стаціонарної) структури необхідна більш висока степінь наближення внутрішньої енергії (1) за значеннями густини МЗ, проте у випадку дислокацій досить обмежитися внесками тільки до другої степені за густиною дефектів ($\varphi_{2\mathrm{D}} = 0$ Дж $\cdot$ м^3, $\varphi_{3D} = 0$ Дж $\cdot$ м^5).

Для подальшого розгляду вибираємо такі коефіцієнти, що частково обґрунтовані в роботах [11, 12] (табл. 1). Відзначимо, що значення основних коефіцієнтів отримано експериментально при дослідженні мідної структури, проте варто зазначити, що запропонована модель (1) має широкий спектр застосувань та, за необхідності, при відповідних параметрах буде відображати справедливі результати для будь-якого металу.

3. Рівняння Ланжевена та Фоккера–Планка

Оскільки гаусівський білий шум є однією із найпростіших математичних моделей, що часто використовується для опису фізичних процесів, дослідимо вплив адитивних шумів на формування граничних СМК чи НК структур. Система кіне-

Таблиця 1. **Параметри дводефектної моделі з урахуванням шуму**

M, Па	φ^*_{0g}, Дж · м$^{-2}$	g_g, Дж · м$^{-2}$	$\bar{M}_g$, Дж · м$^{-2}$	$\bar{\mu}_g$, Дж · м$^{-2}$	φ^*_{1g}, Дж · м$^{-1}$	e_g, Дж · м$^{-1}$	φ_{2g}, Дж	φ_{3g}, Дж · м
$2{,}08 \cdot 10^{10}$	0,4	12	$2{,}5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$	$5{,}6 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-20}$
μ, Па	φ^*_{0D}, Дж · м$^{-1}$	g_D, Дж · м$^{-1}$	$\bar{M}_D$, Дж · м$^{-1}$	$\bar{\mu}_D$, Дж · м$^{-1}$	φ^*_{1D}, Дж · м	e_D, Дж · м	φ_{gD}, Дж	ψ_{gD}, Дж · м
$2{,}08 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-8}$	0	$1{,}65 \cdot 10^{-4}$	10^{-24}	$6 \cdot 10^{-23}$	10^{-16}	10^{-23}

тичних рівнянь для параметрів порядку визначається таким чином [13, 14, 19]:

$$\tau_{h_D}\dot{h}_D = \varphi_{0D} - \varphi_{1D}h_D + \varphi_{gD}h_g - \psi_{gD}h_g^2 + \sqrt{N_D}\xi_D, \quad (5)$$

$$\tau_{h_g}\dot{h}_g = \varphi_{0g} - \varphi_{1g}h_g + \varphi_{2g}h_g^2 - \varphi_{3g}h_g^3 + \varphi_{gD}h_D - \\ - 2\psi_{gD}h_g h_D + \sqrt{N_g}\xi_g, \quad (6)$$

де τ_{h_m} – обернено пропорційні величини кінетичних коефіцієнтів, що мають зміст часу релаксації густин дислокацій та меж зерен. Стохастичні джерела описують флуктуації основних параметрів (внутрішній шум) з інтенсивностями $N_{D,\,g}$ [28], а саме різні неоднорідності (фази речовини, домішки, включення, вакансії, структурні дефекти інших рівнів, теплові флуктуації тощо) та зміни зовнішнього термостату, зокрема недосконалості експериментальної установки. Як відомо, ІПД зумовлює формування МЗ двох типів: висококутових або геометрично необхідних меж, які виникають у результаті різноманітної активності системи ковзання довкола МЗ; меж комірок або субмеж, які часто називають випадковими дислокаційними межами, оскільки такі межі виникають при взаємній реалізації статично-випадкового перетину дислокацій у середині зерен [27, 29]. Межі між довільно розташованими зернами є значно рухливішими порівняно з останніми. МЗ мають більшу нерівноважну енергію, оскільки під час обробки на них накопичуються структурні дефекти інших рівнів, що приводить до активації релаксаційних процесів за рахунок виникнення пластичної течії. В ході деформації, за рахунок накопичення дислокацій, комірки поступово перетворюються у субзерна, що обмежені малокутовими межами, та в подальшому стають висококутовими нанозернами. Розглядаючи найпростіший вид взаємодій між дефектами одного рівня, виникнення флуктуацій внутрішніх змінних відбувається за рахунок дії процесів самоорганізації [20–22].

Функції $\xi_i(t)(i = D,\, g)$ відображають випадкові гаусівські величини (білий шум), що мають автокореляційну функцію, яка математично описується за допомогою δ-функції Дірака, та задовольняють такі моменти [30]:

$$\langle\xi_i(t)\rangle = 0,\ \langle\xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = 2\delta_{ij}\delta(t - t'). \quad (7)$$

Множник 2 перед символом Кронекера δ_{ij} дає змогу однозначно записати рівняння Фоккера–Планка та надати функції $N(h_g)$ (10) сенс коефіцієнта дифузії [2]. У виразі $N(h_g)$ також враховані сталі, які визначають інтенсивності флуктуацій випадкових величин.

Згідно з спостережуваними закономірностями під час ІПД процес самоорганізації комірчастих структур, у результаті якого відбувається утворення нових меж зерен, займає більшу кількість часу порівняно з формуванням елементарних дислокацій (мається на увазі масштабна відмінність основних дефектів – дислокацій і МЗ). В зв'язку з цим, процес встановлення динамічної рівноваги системи слідує за густиною меж зерен та можна використати адіабатичне наближення $\tau_{h_g} \gg \tau_{h_D}$. В рамках останнього покладаємо в (5) $\tau_{h_D}\partial h_D/\partial t = 0$ й визначаємо стохастичне диференціальне рівняння (СДР) Ланжевена для випадкової змінної h_g [3]:

$$\tau_{h_g}\dot{h}_g = F(h_g) + \sqrt{N(h_g)}\,\xi(t). \quad (8)$$

[2] У даному сенсі коефіцієнт відображає процес взаємного проникнення структурних дефектів різних рівнів між собою, що викликає самоорганізоване вирівнювання концентрацій дефектів у всьому об'ємі.

[3] Вважається, що кожній реалізації $\xi(t)$ випадкового процесу відповідає формування $h_g(t)$ нового випадкового процесу (тобто густина МЗ набуває випадкового значення у будь-який момент часу t).

Детерміністична сила $F(h_g)$ та ефективна інтенсивність флуктуацій $\sqrt{N(h_g)}$ випадкової величини формулюються таким чином [19]:

$$F(h_g) \equiv \varphi_{0g} + \frac{\varphi_{0D}\varphi_{gD}}{\varphi_{1\mathrm{D}}} + \\ + \left(\frac{\varphi_{gD}^2}{\varphi_{1\mathrm{D}}} - 2\frac{\psi_{gD}\varphi_{0D}}{\varphi_{1\mathrm{D}}} - \varphi_{1g}\right) h_g + \\ + \left(\varphi_{2g} - 3\frac{\psi_{gD}\varphi_{gD}}{\varphi_{1\mathrm{D}}}\right) h_g^2 + \left(2\frac{\psi_{gD}^2}{\varphi_{1\mathrm{D}}} - \varphi_{3g}\right) h_g^3, \quad (9)$$

$$N(h_g) \equiv \frac{(\varphi_{gD} - 2\psi_{gD}h_g)^2}{\varphi_{1\mathrm{D}}^2} N_D + N_g. \quad (10)$$

При доведенні співвідношення (10), що відповідає мультиплікативному шуму, враховано властивості дисперсії гаусівських незалежних випадкових величин [30]. Для уникнення непорозумінь, відзначимо, що безпосередні перетворення приводять до стохастичних доданків

$$\left[\frac{(\varphi_{gD} - 2\psi_{gD}h_g)}{\varphi_{1\mathrm{D}}}\sqrt{N_D} + \sqrt{N_g}\right]\xi(t), \quad (11)$$

квадрат амплітуди яких відрізняється від ефективної інтенсивності шуму (10).

Для подальшого аналізу рівнянню Ланжевена (8) потрібно поставити у відповідність визначену форму рівняння Фоккера–Планка, яке описує еволюцію функції густини розподілу $p(h_g, t)$ стохастичних флуктуюючих змінних (у даному випадку параметра h_g). Найчастіше для обчислення розв'язку використовують такі підходи: числення в інтерпретації Іто (I-форма), числення Стратоновича (S-форма) та кінетична форма (K-форма) числення [30, 31]. У випадку Іто стохастичні процеси $h_g(t)$ та $dW(t)$[4] задовольняють визначенню марковості та представляються статистично незалежними [32], оскільки визначення інтеграла Іто відображає відсутність кореляцій між випадковим процесом $h_g(t)$ та випадковою силою $W(t)$ в момент часу t. У загальному випадку форма Іто використовується для розв'язання систем з дискретним часом, що зустрічається переважно у біологічних системах (наприклад, для моделі народження-смертності живих організмів) [28]. Інтегрування рівняння (8), використовуючи форму Стратоновича, дозволяє автоматично врахувати кореляції між випадковим процесом $h_g(t)$ і випадковою величиною $W(t)$ на малих інтервалах часу за рахунок обчислення проміжних, центральних точок на сітці інтегрування

$$\sqrt{N\left(h_g\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\right)}dW(t_i). \quad (12)$$

Вказане відображає поведінку реальних фізичних систем з неперервним часом та пам'яттю [1, 33, 34]). Таким чином, у представленому дослідженні для опису процесу фрагментації полікристалічної структури металу під дією ІПД використовується підхід Стратоновича, що не показав якісних змін у порівнянні із численням Іто.

Відповідне рівняння Фоккера–Планка записується таким чином [19]:

$$\dot{p}(h_g, t) = -\frac{\partial}{\partial h_g}D^{(1)}(h_g)p(h_g, t) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial h_g^2}D^{(2)}(h_g)p(h_g, t), \quad (13)$$

де функції (або коефіцієнти Крамерса–Мойала) [30]

$$D^{(1)}(h_g) = \frac{F(h_g)}{\tau_{h_g}} + \sqrt{\frac{N(h_g)}{\tau_{h_g}^2}}\frac{d\sqrt{N(h_g)/\tau_{h_g}^2}}{dh_g}, \quad (14)$$

$$D^{(2)}(h_g) = \frac{N(h_g)}{\tau_{h_g}^2} \quad (15)$$

відіграють роль коефіцієнтів дрейфу та дифузії.

Стаціонарні розв'язки (густини розподілу ймовірності реалізації станів h_g при $\partial p(h_g, t)/\partial t = 0$) рівнянь (8) та (13) мають вигляд

$$p(h_g) = Z^{-1}\exp(U_{\mathrm{ef}}(h_g)). \quad (16)$$

Тут введено нормуючу константу [5]

$$Z = \int\limits_0^{+\infty} \exp(U_{\mathrm{ef}}(\hat{h}_g))d\hat{h}_g \quad (17)$$

[4] Представлення вінерівського процесу для стохастичного диференціального рівняння (20) [30], що є математичною моделлю броунівського руху для випадкового коливання з неперервним часом.

[5] Межі інтегрування обмежуються фізичною інтерпретацією параметра h_g.

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2019. Т. 64, № 6

та ефективний синергетичний потенціал

$$U_{\mathrm{ef}}(h_g) = -\frac{1}{2}\ln(N(h_g)) + \tau_{h_g}\int\limits_0^{h_g}\frac{F(\hat{h}_g)}{N(\hat{h}_g)}d\hat{h}_g, \qquad (18)$$

який відображає ефективну енергію системи та не має фізичного змісту внутрішньої енергії.

Доведемо рівняння для стаціонарних значень густини МЗ h_g, що визначається за допомогою необхідної умови існування екстремумів $(dp(h_g)/dh_g = 0)$ густини розподілу (16) (чи ефективного потенціалу (18)). При цьому максимуми ефективного синергетичного потенціалу відповідають максимумам густини розподілу, що описують формування стійких станів (граничних структур), а відповідно мінімуми – нестійких реалізацій. Таким чином, умова стаціонарності приводить до виразу $dU_{\mathrm{ef}}(h_g)/dh_g \equiv F(h_g) - (2\tau_{h_g})^{-1}(dN(h_g)/dh_g) = 0$, перетворення якого дозволяє одержати рівняння, що визначає положення стаціонарних станів [19]

$$\left(2\frac{\psi_{gD}^2}{\varphi_{1\mathrm{D}}} - \varphi_{3g}\right)h_g^3 + \left(\varphi_{2g} - 3\frac{\psi_{gD}\varphi_{gD}}{\varphi_{1\mathrm{D}}}\right)h_g^2 + \\ + \left(\frac{\varphi_{gD}^2}{\varphi_{1\mathrm{D}}} - 2\frac{\psi_{gD}\varphi_{0D}}{\varphi_{1\mathrm{D}}} - 4\frac{\psi_{gD}^2}{\tau_{h_g}\varphi_{1\mathrm{D}}^2}N_D - \varphi_{1g}\right)h_g + \\ + \varphi_{0g} + \frac{\varphi_{0D}\varphi_{gD}}{\varphi_{1\mathrm{D}}} + 2\frac{\psi_{gD}\varphi_{gD}}{\tau_{h_g}\varphi_{1\mathrm{D}}^2}N_D = 0. \qquad (19)$$

Видно, що положення екстремумів ефективного синергетичного потенціалу (18), які саме подають режими фрагментації металу при ІПД, не є функціями інтенсивності шуму N_g.

Також відзначимо, що вираз (19), одержаний за допомогою підходу Стратоновича, дещо відрізняється від аналогічного в рамках числення Іто. Доданки в останньому, які враховують взаємодію з флуктуаціями N_D (див. у дужках для лінійного внеску за h_g та останній вільний член), додатково множаться на 2, на відміну від представленого випадку у (19). Таким чином, збільшення інтенсивності флуктуацій густини дислокацій в два рази $2N_D$ дозволяє отримати в рамках інтерпретації Стратоновича еквівалентні результати відносно підходу Іто. Проте варто відзначити, що синергетичний потенціал (18) (відповідно і густина розподілу $p(h_g)$ (16)) набуває інший вид за рахунок перенормування ефективної інтенсивності шуму $N(h_g)$, оскільки він відрізняється від підходу Іто лише у першому члені (наявність константи 1/2). Константа приводить до перерозподілу густини розподілу ймовірності $p(h_g(t))$ стохастичної змінної h_g, що очевидно сприяє видозміні характеру поведінки часових залежностей густини МЗ (тобто змінюється інтенсивність флуктуацій параметра h_g довкола стаціонарних станів системи), проте сформована стаціонарна морфологія матеріалу (гранична структура зі сталим значенням h_g) залишається незмінною, незалежно від вибору форми числення. В роботі [19] вивчались стаціонарні розв'язки ефективного синергетичного потенціалу (18) та формування фазових діаграм за допомогою числення Стратоновича. Такий підхід стохастичного інтегрування використовується в даній роботі, оскільки її метою є вивчення не тільки формування стаціонарних СМК чи НК структур, а й дослідження особливостей еволюції h_g під час ІПД.

4. Процедура побудови часових залежностей густин МЗ

Для дослідження кінетики густини МЗ h_g з урахуванням флуктуацій основних параметрів $N_{D,\,g}$ запишемо рівняння Ланжевена з мультиплікативним шумом у стохастичній диференціальній формі. Для цього помножимо рівняння (8) на dt, у результаті одержимо

$$\tau_{h_g}dh_g = F(h_g)dt + \sqrt{N(h_g)}\,dW(t), \qquad (20)$$

де $dW(t) = W(t+dt) - W(t) \equiv \xi(t)dt$ – вінерівський процес, який має властивості білого шуму [28, 30, 32]

$$\langle dW(t)\rangle = 0,\ \langle (dW(t))^2\rangle = 2dt. \qquad (21)$$

При цьому шум визначається як похідна від вінерівського процесу $\xi(t) = dW(t)/dt$.

Нагадаємо, що розподіл випадкових блукань $\xi(t)$ за їх значеннями ξ є нормальним (гаусівським) розподілом [30]:

$$P(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad (22)$$

де перший та другий моменти стохастичного джерела визначаються як

$$\mu \equiv \langle\xi(t)\rangle = 0,\ \sigma^2 \equiv \langle\xi^2(t)\rangle = 2\delta(0) = 2.$$

Варто зазначити, що в рамках досліджуваного випадку гаусівський білий шум розглядається як границя реального фізичного шуму з кінцевою інтенсивністю джерела.

Перепишемо рівняння (20) у більш загальному вигляді:

$$dh_g = D^{(1)}(h_g)dt + \sqrt{D^{(2)}(h_g)}\, dW(t). \tag{23}$$

Таким чином, у рамках підходу Стратоновича (S-форма) дифузійний процес визначається коефіцієнтами дрейфу $D^{(1)}(h_g)$ (14) та дифузії $D^{(2)}(h_g)$ (15) [30].

Зазначимо, що форми числення Стратоновича та Іто пов'язані між собою та дозволяють здійснити взаємне перетворення [28, 32]. Якщо початкове СДР (20) задано в інтерпретації Стратоновича, то, враховуючи властивості (21), можна завжди перейти до еквівалентного СДР в рамках інтерпретації Іто [6] за рахунок віднімання виразу $g(h_g)dg(h_g)/dh_g$, де $g(h_g) = \sqrt{N(h_g)/\tau^2_{h_g}}$, від визначення коефіцієнта дрейфу (14). У свою чергу, зворотний перехід здійснюється за рахунок додавання $g(h_g)dg(h_g)/dh_g$. Таким чином, початкова та еквівалентна форма СДР будуть мати єдиний розв'язок.

Залежно від вибору форми інтерпретації коефіцієнтів (14), (15) СДР Ланжевена (23) буде відрізнятись за видом та мати різний фізичний сенс. Очевидно, що СДР у формі Стратоновича визначає дифузійний процес з переносом, оскільки другий доданок у визначенні коефіцієнта дрейфу (14) $g(h_g)dg(h_g)/dh_g$, породжує індукований шумом перехід. У літературі цей доданок більш відомий за назвою "хибного" переносу, оскільки він не входить до вихідного феноменологічного рівняння (8) (чи СДР (20)) [28, 30]. Проте відомо, що він приводить лише до фізичних наслідків, оскільки моделює реальні системи з середовищем, що здійснює швидкі флуктуації (тобто враховує кореляцію між випадковим середовищем та системою).

Варто відзначити, що у випадку дії на кінетику системи адитивного шуму, тобто при $N(h_g) = \mathrm{const}$ у рівнянні (20), не існує принципової різниці між системами числення Іто та Стратоновича. Однак, у випадку дії мультиплікативного шуму, тобто при $N(h_g) \neq \mathrm{const}$, коли вплив випадкової сили залежить від стану системи, кореляція, закладена у інтегралі Стратоновича, приводить до систематичного внеску в еволюцію випадкового процесу $h_g(t)$. Отже, СДР у формі Стратоновича найбільш доцільно використовувати для опису реальної фізичної ситуації, що пов'язана зі швидкою зміною середовища [28, 30]. Проте, варто зазначити, що не існує об'єктивних причин, за яких слідує надавати однозначну перевагу певній інтерпретації СДР, у будь-якому випадку вирішальним критерієм правильності вибору є відповідність аналітично знайдених результатів до експериментальних даних.

Зокрема, підтвердження коректності теоретичного дослідження поведінки основних змінних фізичної системи (у даному випадку h_g) зазвичай відбувається шляхом порівняння результатів числового моделювання декількох форм СДР. Незважаючи на широкий спектр існуючих форм числення, найбільш виправданими вважають саме підхід Стратоновича з урахуванням визначення дифузійного процесу та форму Іто. Числовий розв'язок співвідношення (23) знаходиться за допомогою методу Ейлера [20, 22]. Застосовуючи дискретне наближення диференціала випадкової величини $dW(t) = \sqrt{\triangle t}W_i$, отримуємо звичайну ітераційну процедуру для інтегрування (розв'язання) рівняння (23)

$$h_{g_{i+1}} = h_{g_i} + D^{(1)}(h_{g_i})\triangle t + \sqrt{D^{(2)}(h_{g_i})\triangle t}\, W_i. \tag{24}$$

Використовуючи коефіцієнти (14), (15) та вирази (9), (10), обчислимо часову залежність густини МЗ h_g. Зокрема, у випадку числення Стратоновича ітераційна процедура має явний вигляд:

$$\begin{aligned} h_{g_{i+1}} &= h_{g_i} + \\ &+ \left[\frac{F(h_{g_i})}{\tau_{h_g}} + 2\frac{\left(2\psi^2_{gD} h_{g_i} + \varphi_{gD}\psi_{gD}\right)}{\tau^2_{h_g}\varphi^2_{1\mathrm{D}}} N_D\right]\triangle t + \\ &+ \sqrt{\frac{N(h_{g_i})}{\tau^2_{h_g}}\triangle t}\, W_i. \end{aligned} \tag{25}$$

Розв'язок СДР (23) знаходимо на часовому проміжку $t \in [0,\, T]$ для визначеної кількості ітерацій N (кількості точок на часовій залежності).

[6] В подальшому, для однозначного сприймання, форма числення СДР, що визначається видом коефіцієнтів (14), (15), трактується у відповідності до початкової інтерпретації незалежно від представлення стохастичних процесів.

Відповідно приріст часу визначається за виразом $\triangle t = T/N$. Сила W_i має такі характеристики:

$$\langle W_i\rangle = 0, \quad \langle W_i W_{i'}\rangle = 0, \quad \langle W_i^2\rangle = 2, \tag{26}$$

що відповідають моментам білого шуму (21).

Моделювання випадкової сили, що відповідає властивостям білого шуму, проводиться за допомогою моделі Бокса–Мюллера [35]:

$$W_i = \sigma\sqrt{-2\ln r_1}\cos(2\pi r_2), \quad r_n \in (0,\ 1], \tag{27}$$

де, згідно з другим моментом у (26), дисперсія $\sigma = \sqrt{2}$, а W_i – абсолютно випадкове число, яке має властивості (26) та (22). Псевдо-випадкові числа r_1 та r_2 мають рівномірний розподіл та повторюються через певний період.

5. Самоподібний режим фрагментації

Визначимо умови формування самоподібної поведінки у запропонованій дводефектній системі, що задається шляхом диференціювання багатовимірного термодинамічного потенціалу (1) (або густини ефективної внутрішньої енергії). При цьому однорідна функція розподілу, що характерна для самоподібних систем, визначається залежністю:

$$P_q(y) = y^{-q}\Pi(h_g), \quad y = h_g h_g^s, \tag{28}$$

де q – порядок однорідності або показник розподілу [9], що визначає кут нахилу лінійної ділянки. Відзначимо, що показник степені може визначатися як цілими значеннями, так і дробовими. Зокрема, режим самоорганізованої критичності формується при степені $2q = 1.5$ [36]. Проведемо аналіз стаціонарної густини розподілу h_g (16), що визначається ефективним синергетичним потенціалом (18). При виконанні умови $N_g \gg N_D$, поклавши $N_D = 0$, ефективна інтенсивність шуму набуває значення: $N(h_g) \equiv N_g$ (див. визначення (10)). Відповідно густина розподілу визначається співвідношенням

$$p(h_g) = Z^{-1} N_g^{-1/2} \exp\left(\frac{\tau_{h_g}}{N_g}\int_0^{h_g} F(\hat{h}_g)d\hat{h}_g\right). \tag{29}$$

Очевидно, що співвідношення (29) суттєво відрізняється від однорідної функції (28).

Флуктуації густини дислокацій за умови

$$N_D \gg N_g \tag{30}$$

дозволяють отримати при підстановці $N_g = 0$ до (10) ефективний синергетичний потенціал вигляду

$$U_{\text{ef}}(h_g) = \ln\left(\frac{(\varphi_{gD} - 2\psi_{gD}h_g)^2}{\varphi_{1\text{D}}^2}N_D\right)^{-1/2} + \\ + \tau_{h_g}N_D^{-1}\varphi_{1\text{D}}^2\int_0^{h_g}\frac{F(\hat{h}_g)}{\left(\varphi_{gD} - 2\psi_{gD}\hat{h}_g\right)^2}d\hat{h}_g. \tag{31}$$

У свою чергу, густина розподілу набуває вигляду

$$p(h_g) = Z^{-1}\left(\varphi_{gD} - 2\psi_{gD}h_g\right)^{-1}\varphi_{1\text{D}}N_D^{-1/2}\times \\ \times\exp\left(\frac{\tau_{h_g}\varphi_{1\text{D}}^2}{N_D}\int_0^{h_g}\frac{F(\hat{h}_g)}{\left(\varphi_{gD} - 2\psi_{gD}\hat{h}_g\right)^2}d\hat{h}_g\right). \tag{32}$$

Очевидно, що отриманий розподіл характеризується степеневою асимптотикою $p(h_g) \propto h_g^{-1}$ при $\varphi_{gD} \to 0$ та у визначеній області $0 < h_g \le h_g^{\max}$, при цьому (32) зводиться до канонічного вигляду (28):

$$P_q(y) = y^{-1}\Pi(h_g), \quad y = h_g h_g^s, \tag{33}$$

де функція $\Pi(h_g)$ визначається

$$\Pi(h_g) = Z^{-1}(-2)^{-1}\psi_{gD}^{-1}\,\varphi_{1\text{D}}\,N_D^{-1/2}\times \\ \times\exp\left(\frac{\tau_{h_g}\varphi_{1\text{D}}^2}{N_D}\int_0^{h_g}\frac{F(\hat{h}_g)}{4\psi_{gD}^2\hat{h}_g^2}d\hat{h}_g\right). \tag{34}$$

Таким чином, розподіл (33) буде однорідним у тому випадку, коли функція $\Pi(h_g)$ (34) набуває постійного значення (тобто $\Pi(h_g)$ є константою). Визначимо умови формування самоподібного розподілу. Для цього проаналізуємо підінтегральний вираз в (34)

$$I = \frac{\tau_{h_g}\varphi_{1\text{D}}^2}{N_D}\left[\frac{\varphi_{0g}}{4\psi_{gD}^2h_g^2} - \left(\frac{\varphi_{0D}}{2\varphi_{1\text{D}}\psi_{gD}} + \frac{\varphi_{1g}}{4\psi_{gD}^2}\right)\frac{1}{h_g} + \\ + \frac{\varphi_{2g}}{4\psi_{gD}^2} + \left(\frac{1}{2\varphi_{1\text{D}}} - \frac{\varphi_{3g}}{4\psi_{gD}^2}\right)h_g\right]. \tag{35}$$

З одержаного результату видно, що внесок першого та другого доданків зменшується з підвищенням h_g, третій доданок дає слабкий внесок при $\varphi_{2g} \approx 0$ Дж. Зокрема, вплив цих доданків можна

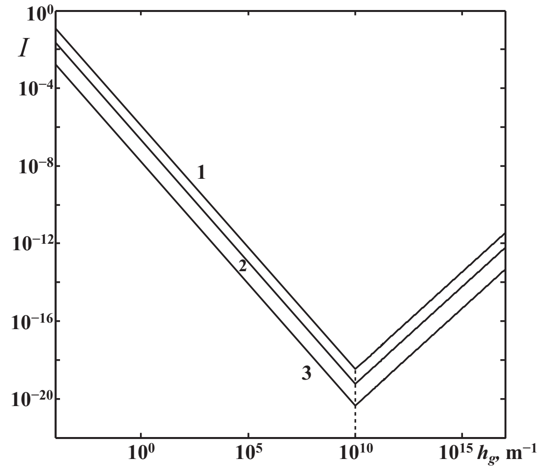

Рис. 1. Підінтегральна функція (35), що побудована при деформації $\varepsilon_{ii} = -0{,}1$ % та $I_2 = 10^{-4}$ %. Криві *1–3* відповідають значенням $N_D = (2, 10, 100)$ Дж$^2 \cdot$ с $\cdot$ м$^{-2}$

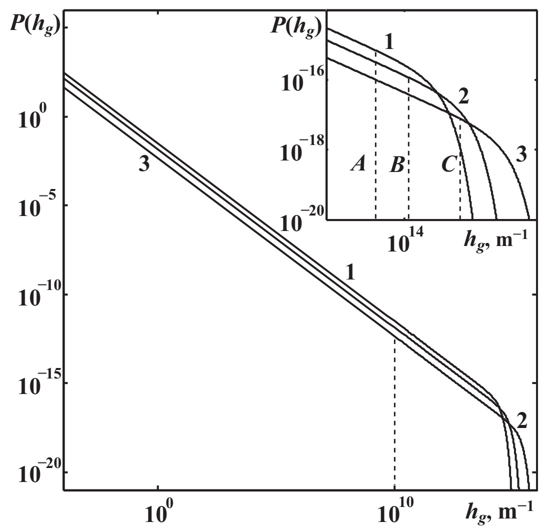

Рис. 2. Функція розподілу (33) при параметрах $\varphi_{gD} = 0$, $\varepsilon_{ii} = -0{,}1$ % та $I_2 = 10^{-4}$ %. Криві *1–3* відповідають значенням $N_g = 0$ та $N_D = (2, 10, 100)$ Дж$^2 \cdot$ с $\cdot$ м$^{-2}$

суттєво зменшити при збільшенні значення параметра ψ_{gD}. Проте четвертий доданок зі збільшенням густини МЗ h_g дає вагомий внесок у функцію розподілу (33), оскільки приводить до зміни тенденції розподілу: відбувається перехід від степеневої залежності до експоненціальної. З огляду на це, степеневий розподіл буде реалізуватися тільки при $\varphi_{1\mathrm{D}} \ll 1$ Дж$\cdot$м або $N_D \gg 1$ Дж$^2 \cdot$ с $\cdot$ м$^{-2}$ і в обмеженому діапазоні за значеннями густини МЗ $0 < h_g \le h_g^{\max}$. Безпосередньо фізичний зміст зазначених умов самоподібності більш зрозумілий з виразу (10), оскільки за таких умов зростає ефективна інтенсивність шуму та, відповідно, збільшується розкид густин МЗ h_g за їх величиною. Проте, варто відзначити, що параметр порядку h_g не може набувати нескінченно великих значень, оскільки з фізичної точки зору фрагментований металевий зразок за таких умов буде відповідати аморфній структурі, що практично неможливо отримати шляхом застосування самих лише відомих методів ІПД. Таким чином, тільки в обмеженому діапазоні формується квазіфрактальна структура з характерними розмірами зерен. При великій густині МЗ h_g розподіл швидко спадає, стаючи експоненціальним, та вважається, що більш дрібні зерна у комірчастій структурі металу не утворюються.

На рис. 1 побудовано підінтегральну залежність, що представлено співвідношенням (35). Згідно з рисунком інтеграл у виразі (33) набуває найменших значень при $h_g < 10^{10}$ м$^{-1}$. З перевищенням цієї величини, внесок функції $\Pi(h_g)$ (34) у розподілі починає поступово зростати. Відповідно інтеграл дає основний внесок у результуючий розподіл (33), що супроводжується експоненціальним спаданням (див. рис. 2). Таким чином, необхідна умова самоподібності полягає у степеневому виді функції розподілу, оскільки швидкість спадання такої залежності набагато менша, у порівнянні з експоненціальною. Отже, степеневий розподіл, що характерний для самоподібної поведінки, дійсно існує в обмеженому діапазоні значень густини МЗ. З перевищенням h_g деякого критичного значення $h_g^{\max}$, самоподібні властивості у системі зникають. Зазначимо, що розподіл (33), отриманий в рамках числення Стратоновича. У випадку Іто показник степені розподілу набуває значення -2, проте, як відмічалось раніше, вибір числення має лише кількісний вплив на поведінку системи, що проявляється у перенормуванні інтенсивностей шумів N_D та N_g.

Відзначимо, що при виконанні необхідних умов самоподібної поведінки $\varphi_{gD} = 0$ Дж та $\varphi_{1\mathrm{D}} \ll$ $\ll 1$ Дж$\cdot$м або $N_D \gg 1$ Дж$^2 \cdot$ с $\cdot$ м$^{-2}$ фазова діаграма, що визначає режими фрагментації [19], втрачає сенс. Це випливає з того, що при такому співвідношенні параметрів вагомими залишаються тільки доданки, які враховують взаємодію з флуктуаціями N_D (див. у дужках для лінійного внеску за h_g та останній вільний член у рівнянні (19)). При цьому згідно з (33) при $h_g = 0$ м$^{-1}$ розподіл розбігається, оскільки інтеграл у функції $\Pi(h_g)$ (34) не дає внесок. Зі збільшенням h_g розподіл залишається степеневим до тих пір, доки внесок останнього доданку в (35) не стане вагомим та розподіл (33) набуде форми експоненціально спадної залежності. Таким чином, у вибраному діапазоні система має єдиний максимум функції розподілу в точці $h_g \approx 0$ м$^{-1}$, далі до $h_g = h_g^{\max}$ розподіл є степеневим та при $h_g > h_g^{\max}$ починає експоненціально спадати (див. рис. 2). При цьому ймовірність формування густини МЗ $h_g > h_g^{\max}$ набуває малих, проте можливих значень.

Розглянемо залежності $P(h_g)$ (33), що наведено на рис. 2. Відзначимо, що одержані результати є чисельно нормовані на встановленому діапазоні значень за h_g. В загальному випадку, розрахунок аналітичної нормуючої константи неможливий, оскільки розподіл при $h_g = 0$ м$^{-1}$ розбігається. Всі криві на рис. 2 відображені в логарифмічних координатах, що дозволяє спостерігати формування при $h_g < 10^{10}$ м$^{-1}$ степеневої залежності та відповідно реалізацію самоподібного режиму. Як бачимо, значення $h_g \approx 10^{10}$ м$^{-1}$, що визначається з рис. 1, відповідає представленим залежностям, хоча візуально сам розподіл ще деякий час зберігає тенденцію. Видно, що з підвищенням інтенсивності шуму N_D збільшується діапазон значень густини МЗ, на якому функція розподілу $P(h_g)$ набуває однорідного характеру (див. вставку). Зокрема, кут нахилу лінійних ділянок, незалежно від шумових параметрів моделі, має стале значення. Отже, при виконанні умови (30) встановлюється самоподібна поведінка, що визначається відсутністю характерного масштабу густини МЗ в області $h_g < 10^{10}$ м$^{-1}$. Проте, для отримання статистичних характеристик часових залежностей h_g потрібно провести більш детальне дослідження: мультифрактальний флуктуаційний аналіз [37].

Переконаємося в лінійності ділянок у встановлених межах $0 < h_g \leq 10^{10}$ м$^{-1}$, що зображено відповідними кривими на рис. 2. Для цього проведемо кореляційний аналіз [35, 38]. Таким чином, застосовуючи у діапазоні значень $10^{-5} \leq h_g \leq 10^{10}$ м$^{-1}$ метод найменших квадратів, одержуємо рівняння регресії:

$$\lg(P(h_g)) = A\lg(h_g) + B. \tag{36}$$

Якість регресійної моделі визначається стандартним чином за допомогою коефіцієнта детермінації R^2, який обчислюється таким чином:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}, \tag{37}$$

де $y \equiv \lg(P(h_g))$ та $\hat{y}$ – значення, що відповідають рівнянню (36), $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$ – середнє значення, величини y_i одержується з виразу (33). Кількість точок для наведеного діапазону $10^{-5} \leq h_g \leq 10^{10}$ м$^{-1}$ становить $n = 10^5$.

Значення коефіцієнтів A, B та R^2 для кожного випадку наведено у табл. 2. Бачимо, що одержані значення коефіцієнта A для кривих на рис. 2 становлять $A \approx -1$, що узгоджується зі степеневим виглядом виразу (28) при цілому значенні показника степені $q = 1$. Відповідні коефіцієнти кореляції R^2 (37), що також наведено у табл. 2, демонструють високу кореляцію рівняння регресії (36) і виразу (33) на відповідних лінійних ділянках. Таким чином, розподіл (33) дійсно є степеневим. Крім того, як вже зазначалось, збільшення інтенсивності шуму N_D збільшує протяжність лінійних ділянок за значеннями h_g (див. межі лінійних ділянок, що позначені пунктирними лініями на вставці). Отже, граничний розмір зерен у квазіфрактальній металевій структурі, що формується під час ІПД, за встановлених умов буде постійно зменшуватися.

На рис. 3 наведено часові залежності h_g, які відповідають параметрам кривих *1–3* на рис. 2 та побудовані за методом, що викладено в розд. 4. Еволюцію значень густини МЗ наведено у логарифмічному масштабі, що дозволяє продемонструвати в деякому обмеженому діапазоні самоподібну поведінку параметра порядку системи. Зокрема, очевидно, що зазначена поведінка проявляється за рахунок різкого збільшення параметра h_g

Таблиця 2. **Значення параметрів лінійної регресії (36) та відповідні коефіцієнти детермінації (37) для кривих, що наведено на рис. 2**

Номер кривої	A	B	R^2
1	−1,032	−2,533	0,9992
2	−1,006	−4,087	0,9995
3	−1,001	−5,407	0,9995

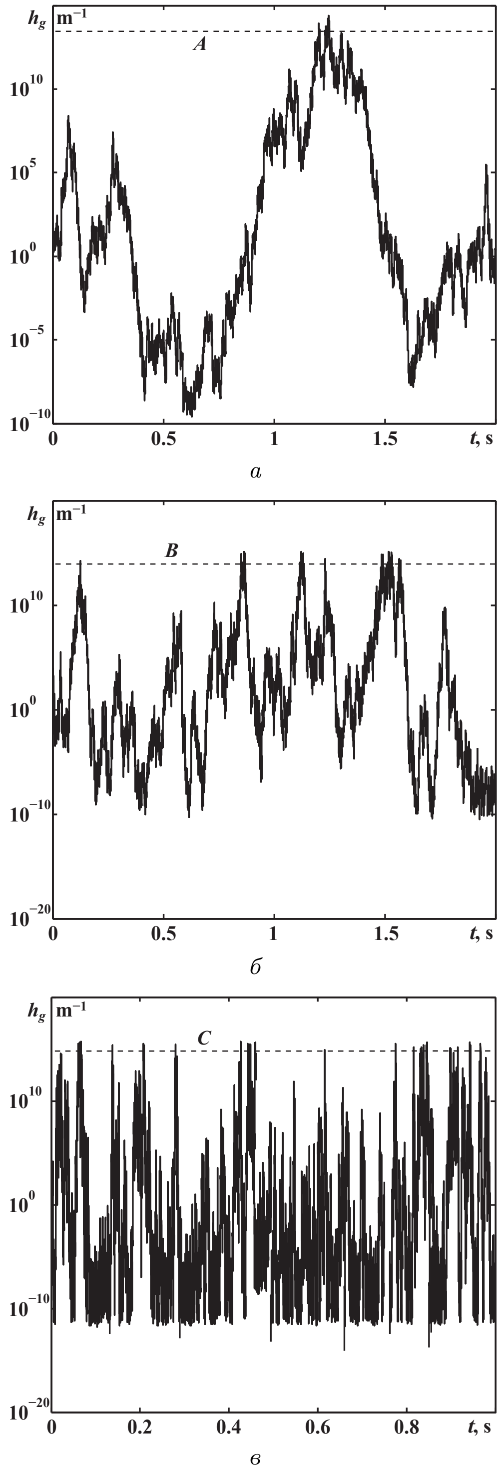

Рис. 3. Часові залежності h_g, що відповідають параметрам рис. 2: *а* – $N_D = 2$ Дж$^2 \cdot$ с $\cdot$ м$^{-2}$; *б* – $N_D = 10$ Дж$^2 \cdot$ с $\cdot$ м$^{-2}$; *в* – $N_D = 100$ Дж$^2 \cdot$ с $\cdot$ м$^{-2}$

на різних масштабах. З одержаних результатів видно, що збільшення інтенсивності флуктуацій густини дислокацій N_D приводить до реалізації самоподібної поведінки на більшому діапазоні масштабів, що підтверджується протяжністю степеневого розподілу на рис. 2. Пунктирні криві відповідають гранично-допустимим максимальним значенням h_g, нижче яких спостерігається самоподібність (див. вставку на рис. 2). Крім того, аналіз часових залежностей демонструє, що степеневий вид функції розподілу $P(h_g)$ (33) обмежується не тільки максимальним, а і мінімальним значенням для густини МЗ, що зменшується при збільшенні інтенсивності шуму N_D.

Отже, самоподібний характер еволюції металевої структури реалізується за рахунок активації різного роду самоорганізованих процесів, що виникають у результаті впливу шумів основних параметрів. Відомо, що саме взаємодія структурних дефектів між собою та дефектами інших структурних рівнів, у данному випадку МЗ з дислокаціями, іншими межами та структурними неоднорідностями (структурними дефектами інших рівнів, тепловими флуктуаціями, фазами речовини, домішками, вакансіями тощо), приводить до прояву внутрішніх флуктуацій та зміни розорієнтування зернистої структури металевого зразка [1, 27, 29, 39, 40]). При цьому сформована гранична структура містить кристаліти, що мають специфічну будову, та які, у свою чергу, за результатами рентгенівських досліджень, фрагментуються на окремі області когерентного розсіяння (комірки, субзерна) [1, 41–43].

6. Висновки

На основі нерівноважної еволюційної термодинаміки досліджено процес фрагментації металевої структури під впливом ІПД, що дає цілісну картину основних режимів звичайної та інтенсивної пластичності. Моделювання процесів дефектоутворення проведено в рамках дводефектної моделі з урахуванням шуму. В ролі основних структурних дефектів розглядаються МЗ та дислокації, оскільки останні відіграють вагому роль у формуванні дрібнозернистої структури та межі пластичної течії. Модифікація степеневого розвинення для густини внутрішньої енергії дозволила більш точно описати самоузгоджену поведінку структурних дефектів у процесі формування граничних

СМК чи НК структур. Вважається, що флуктуації основних параметрів відображають стохастичну взаємодію з іншими, неврахованими, структурними неоднорідностями (фазами речовини, домішками, включеннями, вакансіями, структурними дефектами інших рівнів, тепловими флуктуаціями тощо), які завжди присутні при розгляді реальної металевої структури. Саме результат таких взаємодій у процесі обробки ІПД визначає конкурентну боротьбу та переходи між різними структурними станами (фазами).

Показано, що адитивний шум нижнього рівня проявляє мультиплікативний характер на верхньому, макроскопічному рівні, що власне приводить до нерівноважних переходів та формування нових станів системи. Проведено порівняння розрахунків у формі Іто та Стратоновича. Зокрема, зміна числення сприяє лише перенормуванню густини ймовірності розподілу стохастичної змінної (реалізацій густини МЗ), що проявляється тільки у характері поведінки часових залежностей для густини МЗ за рахунок зміни її інтенсивності флуктуацій довкола стійких конфігурацій, та не приводить до зміни її стаціонарних значень. Виявлено, що при даній постановці проблеми саме підхід Стратоновича дозволяє відобразити реальний процес фрагментації, оскільки враховує швидкі зміни середовища та враховує передісторію розвитку кристалічної структури.

Проведено дослідження умов формування самоподібних структур. Встановлено, що за визначених умов спостерігається реалізація самоподібної поведінки у фрагментованому металевому зразку. Виявлено, що в обмеженому діапазоні значень параметра порядку ($h_g \sim 10^{-5}$–10^{10} м$^{-1}$) функція розподілу густини МЗ набуває степеневого виду. Зокрема, збільшення інтенсивності флуктуацій стохастичного джерела приводить до збільшення протяжності степеневого розподілу, у результаті чого у металі чи сплаві формується квазіфрактальна структура на більшому діапазоні масштабів за значеннями h_g. При цьому граничний розмір зерен за визначених умов постійно зменшується.

Автор висловлює подяку МОН України за фінансову підтримку роботи (проект № 0118U003584 “Атомістичне та статистичне представлення формування та тертя нанорозмірних систем”).

1. Р.З. Валиев, И.В. Александров. *Объемные наноструктурные металлические материалы: получение, структура и свойства* (ИКЦ “Академкнига”, 2007) [ISBN: 5-88439-135-8].
2. Р.М. Кроновер. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории* (Постмаркет, 2000) [ISBN: 5-901095-03-0].
3. Я.Е. Бейгельзимер, В.Н. Варюхин, Д.В. Орлов, С.Г. Сынков. *Винтовая екструзия – процес накопления деформации* (Фирма ТЕАН, 2003) [ISBN: 966-7507-16-5].
4. A. Carpinteri, A. Spagnoli, S. Vantadori. A multifractal analysis of fatigue crack growth and its application to concrete. *Engng. Fract. Mech.* **77**, 974 (2010).
5. L. Molenta, A. Spagnoli, A. Carpinteri, Rh. Jones. Fractals and the lead crack airframe lifing framework. *Procedia Structural Integrity* **2**, 3081 (2016).
6. В.С. Иванова, А.А. Оксогоев. О связи процессов пластической деформации с фрактальной структурой, отвечающей смене масштабного уровня деформации. *Физ. мезомеханика* **9**, 17 (2006).
7. А.А. Иванова, В.В. Лепов, В.С. Ачикасова, А.М. Иванов. Применение концепции статистического фрактала при анализе поверхностей деформации образцов. *Наука и образование* № 4, 89 (2016).
8. V.A. Oborin, M.V. Bannikov, Y.V. Bayandin, M.A. Sokovikov, D.A. Bilalov, O.B. Naimark. Fractal analysis of fracture surface of aluminum alloy AMg6 under fatigue and dynamic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin* No. 2, 116 (2015).
9. D.J. Amit. *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena* (McGraw-Hill International Book Co London, 1978) [ISBN: 978-0070015753].
10. O.I. Olemskoi, O.V. Yushchenko, T.I. Zhylenko. Study of conditions for hierarchical condensation near the phase equilibrium. *Ukr. J. Phys.* **56**, 474 (2011).
11. Л.С. Метлов. *Неравновесная эволюционная термодинамика и ее приложения* (Ноулидж, 2014) [ISBN: 978-617-579-853-9].
12. L.S. Metlov. Nonequilibrium dynamics of a two-defect system under severe load. *Phys. Rev. E.* **90**, 022124 (2014).
13. A.V. Khomenko, D.S. Troshchenko, L.S. Metlov. Thermodynamics and kinetics of solids fragmentation at severe plastic deformation. *Condens. Matter Phys.* **18**, 33004 (2015).
14. А.В. Хоменко, Д.С. Трощенко, Л.С. Метлов. Моделирование кинетики режимов фрагментации материалов при интенсивной пластической деформации. *Металлофиз. новейшие технол.* **39**, 265 (2017).
15. I.A. Lyashenko, A.V. Khomenko, L.S. Metlov. Thermodynamics and kinetics of boundary friction. *Tribol. Int.* **44**, 476 (2011).
16. Д.С. Трощенко. *Нерівноважна еволюційна термодинаміка фрагментації металів з урахуванням стохастичності. Дис. канд. фіз.-мат. наук* (СумДУ, 2018).

17. А.Д. Погребняк, А.А. Багдасарян, И.В. Якущенко, В.М. Береснев. Структура и свойства высокоэнтропийных сплавов и нитридных покрытий на их основе. *Успехи химии.* **83**, 1027 (2014).
18. A.A. Goncharov, A.N. Yunda, R.Yu. Bondarenko, S.A. Goncharova. Modelling of thermal processes in the cutting insert with a protective coating. *Proceedings of 2016 International Conference on Nanomaterials: Application and Properties (NAP-2016)* (Sumy, SSU, 2016) **5**, 02NEA06.
19. О.В. Хоменко, Д.С. Трощенко, Я.О. Кравченко, М.О. Хоменко. Вплив адитивного гаусового шуму на фазову діаграму режимів фрагментації металу при інтенсивній пластичній деформації. *Ж. нано- та електрон. фіз.* **9**, 3045 (2017).
20. А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко. Периодический прерывистый режим граничного трения. *ЖТФ* **80**, 27 (2010).
21. A.V. Khomenko. Noise influence on solid–liquid transition of ultrathin lubricant film. *Phys. Lett. A* **329**, 140 (2004).
22. A.V. Khomenko, I.A. Lyashenko. Phase dynamics and kinetics of thin lubricant film driven by correlated temperature fluctuations. *Fluct. Noise Lett.* **7**, L111 (2007).
23. А.М. Глезер, И.Е. Пермякова. *Нанокристаллы, закаленные из расплава* (Физматлит, 2012). [ISBN: 978-5-9221-1373-1].
24. А.М. Глезер, Л.С. Метлов. Физика мегапластической (интенсивной) деформации твердых тел. *ФТТ* **52**, 1090 (2010).
25. О.В. Хоменко, Я.О. Ляшенко. Фазова динаміка тонкої плівки мастила між твердими поверхнями при деформаційному дефекті модуля зсуву. *Журнал фізичних досліджень* **11**, 268 (2007).
26. М.М. Протодьяконов, Р.И. Тедер, Е.И. Ильницкая, О.П. Якобашвили, И.Б. Сафронова, А.И. Цыкин, И.О. Квашнина, Н.Н. Павлова, Л.Н. Левушкин, Ю.В. Зефиров, А.А. Савельев, М.О. Долгова. *Распределение и корреляция показателей физических свойств горных пород: Справочное пособие.* (Недра, 1981).
27. Э.В. Козлов, Н.А. Попова, Н.А. Конева. Закономерности пластической деформации ультрамелкозернистых металлических материалов. *Деформация и разрушение материалов* № 5, 2 (2014).
28. В. Хорстхемке, Р. Лефевр. *Индуцированные шумом переходы. Теория и применение в физике, химии и биологии* (Мир, 1987).
29. Г.А. Салищев, С.Ю. Миронов, С.В. Жеребцов, А.Н. Беляков. Влияние пластической деформации на изменение разориентировки границ в металлических материалах. *Физика и механика материалов* **25**, 42 (2016).
30. H. Risken. *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications* (Springer-Verlag, 1989) [ISBN: 3-540-50498-2].
31. Yu. L. Klimontovich. Nonlinear brownian motion. *Phys.-Usp.* **37**, 737 (1994).
32. К.В. Гардинер. *Стохастические методы в естественных науках* (Наука, 1986).
33. Shuyong Jiang, Yanqiu Zhang, Lihong Zhao, Yufeng Zheng. Influence of annealing on niti shape memory alloy subjected to severe plastic deformation. *Intermetallics* **32**, 344 (2013).
34. Wen Ma, Bin Chen, Fu-Shun Liu, Qing Xu. Phase transformation behaviors and mechanical properties of $Ti_{50}Ni_{49}Fe_1$ alloy with severe plastic deformation. *Rare Metals* **32**, 448 (2013).
35. W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* (Cambridge University Press, 2007) [ISBN: 0-521-43108-5].
36. A.I. Olemskoi, A.V. Khomenko, D.O. Kharchenko. Self-organized criticality within fractional lorenz scheme. *Physica A* **323**, 263 (2003).
37. A.V. Khomenko, I.A. Lyashenko, V.N. Borisyuk. Self-similar phase dynamics of boundary friction. *Ukr. J. Phys.* **54**, 1139 (2009).
38. А.М. Назаренко. *Эконометрика* (СумГУ, 2003) [ISBN: 966-7668-44-4].
39. В.В. Малашенко. Коллективное преодоление дислокациями точечных дефектов в динамической области. *ФТТ* **56**, 1528 (2014).
40. N.V. Prodanov, A.V. Khomenko. Computational investigation of the temperature influence on the cleavage of a graphite surface. *Surf. Sci.* **604**, 730 (2010).
41. A.I. Bazhin, A.A. Goncharov, A.D. Pogrebnyak, V.A. Stupak, S.A. Goncharova. Superhardness effect in transition-metal diborides films. *Phys. Met. Metall.* **117**, 594 (2016).
42. A.V. Khomenko, N.V. Prodanov. Study of friction of Ag and Ni nanoparticles: an atomistic approach. *J. Phys. Chem. C* **114**, 19958 (2010).
43. G.A. Malygin. Kinetic mechanism of the formation of fragmented dislocation structures upon large plastic deformations. *Phys. Solid State* **44**, 2072 (2002).

Одержано 17.03.19

A.V. Khomenko

SELF-SIMILAR MODE OF METALS FRAGMENTATION UNDER SEVERE PLASTIC DEFORMATION

S u m m a r y

In the framework of nonequilibrium evolution thermodynamics, the influence of additive fluctuations on the kinetics of structural defects under severe plastic deformation has been studied. The applied method is a new one for the description of fragmentation modes and corresponding self-organization processes. It is found that a fragmented metallic specimen demonstrates a self-similar behavior, which results in the formation of a grain structure with various grain sizes. Such a behavior takes place provided that the probability distribution for the grain boundary density has a power-law dependence. A comparison of the results obtained in the Itô and Stratonovich forms demonstrates the absence of qualitative changes in the behavior of the system.