

І.О. ВАКАРЧУК, О.І. ГРИГОРЧАК

Львівський національний університет ім. Івана Франка
(Вул. Драгоманова, 12, Львів 79005; e-mail: chair@franko.lviv.ua)

СТРУКТУРНІ ФУНКЦІЇ БАГАТОБОЗОННОЇ СИСТЕМИ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ПРЯМИХ ТРИ- ТА ЧОТИРИЧАСТИНКОВИХ КОРЕЛЯЦІЙ

УДК 538.941

*На основі виразу для матриці густини взаємодіючих бозе-частинок в координатному зображенні із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій [І.О. Вакарчук, О.І. Григорчак, Журн. фіз. досл. **3**, 3005 (2009)] були розраховані дво-, три- і чотиричастинкові структурні фактори рідкого ^4He в наближенні “однієї суми за хвильовим вектором” для широкого інтервалу температур. В границі низьких температур отриманий вираз для двочастинкового структурного фактора переходить в уже відомий. В границі високих температур вирази для дво-, три- і чотиричастинкових структурних факторів редукуються до структурних факторів ідеального бозе-газу. Результати роботи можуть бути застосовані для розрахунку термодинамічних функцій рідкого ^4He і знаходження температурної залежності швидкості першого звуку в багатобозонній системі.*

Ключові слова: рідкий ^4He , структурний фактор.

1. Вступ

Дослідження структурних функцій відіграє важливу роль у вивченні як бозе-, так і фермі-систем, оскільки теоретично отримані результати можна безпосередньо порівняти з експериментальними даними. Центральну роль у структурних дослідженнях згаданих систем займає повний переріз розсіяння, який називається динамічний структурний фактор. Він дає можливість визначити просторову структуру речовини, а також структуру її енергетичного спектра [1, 2]. З його допомогою, а також за допомогою похідних від нього величин, сьогодні вивчають багато різних систем, наприклад: бозе-газ в пастці [3], рідкий ^4He [4] і ^3He [5] у двох вимірах, твердий ^3He [6], тонкі плівки [7], розріджений газ Ленарда-Джонса [8], надплинний гелій [9], парагідроген [10], моделі з турбулентністю [11] тощо.

Окрім динамічного структурного фактора не менш вагоме значення має його нульовий момент або статичний структурний фактор, для якого в різний час було проведено чимало вимірювань в широкій області температур. Дослідження проводилися при тиску насиченої пари як методом нейтронної дифракції [12], так і з допомогою дифра-

кції рентгенівських променів [13]. Аналіз експериментальних робіт по вимірюванню структурного фактора було проведено, наприклад, у роботі [14]; у ній також були запропоновані поправки, які допомагають узгодити результати різних авторів. Методом Монте-Карло було проведено дослідження області піка структурного фактора бозе-конденсату і показано, що він знаходиться вище, ніж отримане теоретичне значення у наближенні малої густини [15]. В роботі [16] знайдено внесок тричастинкових кореляцій у значення структурного фактора рідкого ^4He , а в [17] запропоновано процедуру розрахунку ефективного парного потенціалу на основі експериментальних даних для структурного фактора за допомогою схеми Монте-Карло симуляції. Серед структурних функцій варто згадати також парну кореляційну функцію, яка є однією з базових величин, що характеризують когерентні властивості бозе-конденсату [18].

У цій роботі ми маємо на меті знайти не лише парний структурний фактор, а також вирази для три- і чотиричастинкового структурних факторів в наближенні “однієї суми за хвильовим вектором”. Це, в свою чергу, допоможе спростити розрахунки термодинамічних функцій бозе-системи в наближенні “двох сум за хвильовим вектором” і сприятиме розв’язанню ще не до кінця вирішеної проблеми опису такої системи, як рідкий ^4He в широ-

котемпературному діапазоні, особливо в околі λ -переходу.

Структурні властивості рідкого ${}^4\text{He}$ при низьких температурах в підході колективних змінних обговорюються вже здавна [19–23]. Однак теоретичний розрахунок парного структурного фактора в широкотемпературній області був здійснений щойно в роботі [24] за допомогою усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок. Згодом з'явилися інші роботи, які описували структурні функції в широкій області температур [25]. Однак, оскільки для розрахунку середніх у цих роботах автори опиралися на матрицю густини в наближенні парних кореляцій, то і значення парного структурного фактора отримано у тому ж наближенні. І хоча у вказаному випадку узгодження із експериментальними даними [12, 13, 26] для парного структурного фактора є добрим, однак неповним, адже, як відомо, внесок від багаточастинкових кореляцій в спостережувані величини багатобозонної системи може виявитися досить значним [22, 27, 28].

У роботі [25] проведено розрахунок незвідних дво-, три- і чотиричастинкових структурних факторів, а також парної функції розподілу в широкому інтервалі температур із врахуванням лише непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій. Щоб покращити отримані теоретичні результати потрібно врахувати і прямі кореляції, а для цього розрахунок названих величин необхідно проводити з матрицею густини, яка б містила не лише парні, а й три- та чотиричастинкові прямі кореляції. Це завдання і є предметом даної роботи. В наших обчисленнях ми опираємося на запропоновані в попередніх статтях [29, 30] підходи і отримані там результати, зокрема, на вирази і методи розрахунку матриці густини і статистичної сума багатобозонної системи в широкому інтервалі температур в наближенні “двох сум за хвильовим вектором”.

Важливим аспектом нашої роботи є представлення отриманих результатів у графічному вигляді, якому, звичайно, передують чисельні розрахунки. Вхідними даними в таких обчисленнях є екстрапольовані до температури абсолютного нуля експериментальні результати для структурного фактора. Загальна схема міркувань на цю тему і відповідні результати наведені в роботі [31]. Продовжуючи тему чисельних розрахунків, варто звернути увагу на роботу [32], де проводиться відновлення

потенціалів міжатомних взаємодій за експериментальними даними (так само як і у роботі [31]), а також дослідження термодинамічних та структурних властивостей ${}^4\text{He}$.

Чисельний розрахунок парного структурного фактора проводився з урахуванням ефективної маси, вираз для якої наведений в роботі [33]. Обґрунтування необхідності її введення можна знайти в [25].

Отриманий вираз для двочастинкового структурного фактора в границі низьких температур переходить у вже знайдений раніше [21], а в границі високих температур вирази для дво-, три- і чотиричастинкових структурних факторів редукуються до структурних факторів ідеального бозе-газу.

Знайдений двочастинковий структурний фактор в наближенні “однієї суми за хвильовим вектором” відкриває також шлях для знаходження температурної залежності швидкості першого звуку в рідкому ${}^4\text{He}$ і проведення порівняння з експериментальними даними.

2. n -частинкові структурні фактори багатобозонної системи

Згідно з означенням n -частинковий структурний фактор $S^{(n)}(\rho_{\mathbf{q}_1}, \dots, \rho_{\mathbf{q}_n}) = N^{n/2-1} \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \dots \rho_{\mathbf{q}_n} \rangle$, де N – кількість частинок, $\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}$ – колективні змінні, а позначення $\langle \dots \rangle$ означає усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок. В наших подальших обчисленнях ми використовуємо матрицю густини в наближенні “двох сум за хвильовим вектором” із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу. Це наближення враховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції, а сама матриця має такий вигляд:

$$R(\rho|\rho') = R_N^0(r|r') P_{pr}(\rho|\rho') P(\rho|\rho'),$$

$R_N^0(r|r')$ – матриця густини невзаємодіючих бозе-частинок, $P_{pr}(\rho|\rho')$ – фактор, який враховує парні кореляції, а $P(\rho|\rho')$ – фактор, який враховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції:

$$R_N^0(r'|r) = \frac{1}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} \times \\ \times \sum_Q \exp \left[-\frac{m}{2\beta\hbar^2} \sum_{j=1}^N (r'_j - r_{Q_j})^2 \right],$$

де підсумовування за Q означає підсумовування за всіма перестановками координат частинок. Фактор, який враховує парні кореляції, має такий вигляд [34]:

$$P_{pr}(\rho|\rho') = \exp \left[b_0 + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} b_1(q) \rho_{\mathbf{q}}' \rho_{-\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} b_2(q) \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \right],$$

де

$$b_0 = -\beta E_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln \left[\frac{\alpha_q \tanh \left(\frac{\beta E_q}{2} \right)}{\tanh \left(\frac{\beta \varepsilon_q}{2} \right)} \right] +$$

$$+ \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \ln \left(\frac{1 - e^{-\beta \varepsilon_q}}{1 - e^{-\beta E_q}} \right),$$

$$b_1(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_q}{\sinh(\beta E_q)} - \frac{1}{\sinh(\beta \varepsilon_q)} \right),$$

$$b_2(q) = \frac{1}{2} (\alpha_q \coth(\beta E_q) - \coth(\beta \varepsilon_q)),$$

$$\alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V} \nu_q / \frac{\hbar^2 q^2}{2m}},$$

$$E_q = \varepsilon_q \alpha_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \alpha_q,$$

$\nu_q = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \Phi(r) d\mathbf{r}$ – коефіцієнт Фур'є енергії парної взаємодії між частинками, $\beta = 1/T$ – обернена температура.

Вираз для величини $P(\rho|\rho')$ – наведений в роботі [29]. В більш простому вигляді його можна знайти в Додатку 1. Отже,

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \dots \rho_{\mathbf{q}_n} \rangle = \frac{1}{Z} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N \times$$

$$\times R_N^0(r|r) P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho) \rho_{\mathbf{q}_1} \dots \rho_{\mathbf{q}_n} =$$

$$= \frac{1}{Z} \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \rho_{\mathbf{q}_1} \dots \rho_{\mathbf{q}_n} \times$$

$$\times \exp \left[b_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_q \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} + C_0 + 2 \sum_{\mathbf{q} \neq 0} C_2(\mathbf{q}) \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \right], \quad (1)$$

де

$$\lambda_q = 2b_2(q) - b_1(q) =$$

$$= \alpha_q \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_q \right) - \tanh \left(\frac{\beta}{2} \varepsilon_q \right).$$

Явні вирази для величин такі, як $C_0, C_2(\mathbf{q}_1), C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3), C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ – подані у Додатку 2. Їх можна отримати, користуючись даними, наведеними у Додатку 1.

3. Парний структурний фактор

Для парного структурного фактора ($n = 2$) написаний вище вираз (1) можна зобразити у вигляді похідної за параметром λ_q :

$$\langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle = \frac{d}{d\lambda_q} \ln \left\{ \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left[b_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_q \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \right] P(\rho|\rho) \right\}.$$

У прийнятому нами наближенні “двох сум за хвильовим вектором” цей вираз запишемо так:

$$\langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle = \frac{d}{d\lambda_q} \ln \left\{ \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left[b_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_q \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \right] \right\} + \frac{d}{d\lambda_q} \ln \{ \langle P(\rho|\rho) \rangle \}.$$

Перший доданок наведений в роботах [25], а середнє $\langle P(\rho|\rho) \rangle$ має такий зміст:

$$\langle P(\rho|\rho) \rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho)}{\int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) P_{pr}(\rho|\rho)}.$$

Це середнє можна отримати на основі роботи [30]:

$$\langle P(\rho|\rho) \rangle = \exp \left\{ C_0 + 2 \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} C_2(\mathbf{q}_1) \frac{S_0(q_1)}{1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \frac{S_0(q_1)}{1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)} \frac{S_0(q_2)}{1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)} + \right.$$

$$+ \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} \frac{C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{\prod_{i=1}^3 [1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)]} +$$

$$+ \left. \frac{12}{N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \prod_{i=1}^3 \frac{S_0(q_i)}{[1 + \lambda_{q_i} S_0(q_i)]} \right\}$$

Отож, користуючись явним виглядом величини $\langle P(\rho|\rho) \rangle$ і результатами робіт [25], знайдемо:

$$S(q_1) = \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rangle =$$

$$= \frac{S_0(q_1)}{1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)} - \frac{1}{[1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)]^2} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \frac{\lambda_{k_2} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2)}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{\lambda_{k_2}}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} \frac{\lambda_{k_3}}{1 + \lambda_{k_3} S_0(k_3)} \times$$

$$\times \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right]^2 + 4C_2(\mathbf{q}_1) S_0^2(q_1) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{[1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)][1 + \lambda_{k_3} S_0(k_3)]} +$$

$$+ \frac{8}{N} S_0^2(q_1) \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2) \frac{S_0(k_2)}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} +$$

$$+ \left. \frac{72}{N} S_0^2(q_1) \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) S_0(k_2) S_0(k_3)}{[1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)][1 + \lambda_{k_3} S_0(k_3)]} \right) \quad (2)$$

Вважаючи доданки з однією сумою малими в порівнянні в величиною, яка відтворює наближення парних кореляцій, двочастинковий структурний фактор можна подати у такому вигляді:

$$S(q_1) = \frac{S_0(q_1)}{1 + (\lambda_{q_1} + \Pi_{q_1}) S_0(q_1)}, \quad \Pi_{q_1} = \Pi_{q_1}^{np} + \Pi_{q_1}^p,$$

де $\Pi_{q_1}^{np}$ – внесок непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій, $\Pi_{q_1}^p$ – внесок прямих три- і чотиричастинкових кореляцій:

$$\Pi_{q_1}^{np} = \frac{1}{2N S_0^2(q_1)} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \frac{\lambda_{k_2} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2)}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} -$$

$$- \frac{1}{2N S_0^2(q_1)} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3} \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right]^2}{[1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)][1 + \lambda_{k_3} S_0(k_3)]},$$

$$\Pi_{q_1}^p = -4C_2(\mathbf{q}_1) - \frac{8}{N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \frac{C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2) S_0(k_2)}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} -$$

$$- \frac{12}{N S_0(q_1)} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{[1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)][1 + \lambda_{k_3} S_0(k_3)]} -$$

$$- \frac{72}{N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) S_0(k_2) S_0(k_3)}{[1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)][1 + \lambda_{k_3} S_0(k_3)]}.$$

Для тричастинкового структурного фактора вираз (1) можна подати у вигляді

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle = - \frac{\sqrt{N}}{2} \frac{\delta \ln \langle P(\rho|\rho) \rangle}{\delta C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}.$$

Безпосередній розрахунок на основі попередньої формули дає нам такий результат:

$$S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \sqrt{N} \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle =$$

$$= \left\{ \frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{[1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)][1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)][1 + \lambda_{q_3} S_0(q_3)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{12C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) S_0(q_1) S_0(q_2) S_0(q_3)}{[1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)][1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)][1 + \lambda_{q_3} S_0(q_3)]} \right\}.$$

Незвідний чотиричастинковий структурний фактор записується в такий спосіб:

$$S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) =$$

$$= N [\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle - \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rangle \langle \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle].$$

Середнє $\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rangle$ ми знайшли раніше, залишається розрахувати $\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle$. Знову ж таки, на основі формули (1) можна показати, що

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle = \frac{1}{I_\lambda} \frac{d^2 I_\lambda}{d\lambda_{q_1} d\lambda_{q_2}},$$

де

$$I_\lambda = \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \times$$

$$\times \exp \left[b_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \right] P(\rho|\rho).$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle - \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rangle \langle \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle = \\ & = \frac{d^2}{d\lambda_{q_1} d\lambda_{q_2}} \ln \left\{ \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \times \right. \\ & \times \exp \left[b_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \lambda_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \right] \left. \right\} + \frac{d^2 \ln \langle P(\rho|\rho) \rangle}{d\lambda_{q_1} d\lambda_{q_2}}. \end{aligned}$$

Перший доданок у написаному вище виразі теж знайдений раніше [25], а другий легко розрахувати, беручи до уваги явний вираз для величини $\langle P(\rho|\rho) \rangle$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) &= \frac{1}{[1 + \lambda_{q_1} S_0(q_1)]^2} \times \\ & \times \frac{1}{[1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)]^2} \left\{ S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) - \right. \\ & - \frac{2\lambda_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} [S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)]^2}{1 + \lambda_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} S_0(|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|)} + \\ & + 48 S_0(q_1) S_0(q_2) S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \times \\ & \times \frac{C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{1 + \lambda_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} S_0(|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|)} + \\ & + 16 S_0^2(q_1) S_0^2(q_2) \left[C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \right. \\ & \left. + 18 \frac{C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) S_0(|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|)}{1 + \lambda_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} S_0(|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|)} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

4. Дво-, три- та чотиричастинковий структурні фактори в границі низьких температур

У границі низьких температур парний і тричастинковий структурні фактори рівні одиниці, а незвідний чотиричастинковий – нулю. Їхні похідні по оберненій температурі в цій границі дають нуль. В цьому можна переконатися безпосередньо проаналізувавши їх вирази.

$$\begin{aligned} S_0(q) &= 1, \quad \frac{\partial S_0(q)}{\partial \beta} = 0, \\ S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= 1, \quad \frac{\partial S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{\partial \beta} = 0, \\ S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) &= 0, \quad \frac{\partial S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}$$

Безпосередньою перевіркою можна також впевнитися, що

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} C_2(\mathbf{q}_1) &= \frac{1}{2} a_2(\mathbf{q}_1), \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= \frac{1}{6} a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3), \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \frac{1}{8} a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2), \end{aligned}$$

де величини $a_2(\mathbf{q}_1)$, $a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)$ – відомі вирази [19]. Вони мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} a_2(\mathbf{q}_1) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \left[\frac{q_2^2}{2q_1^2 \alpha_{q_1}} a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) + \right. \\ & \left. + \frac{(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2 \alpha_{q_1}} a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \right], \\ a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= - \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j) (\alpha_{q_i} - 1) (\alpha_{q_j} - 1)}{2 \sum_{j=1}^3 q_j^2 \alpha_{q_j}}, \\ a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) &= \frac{1}{q_1^2 \alpha_{q_1} + q_2^2 \alpha_{q_2}} \times \\ & \times \{ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 a_3^2(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2) + \\ & + (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^2 a_3^2(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) - \\ & - [(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1) (\alpha_{q_1} - 1) + (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) (\alpha_{q_2} - 1)] \times \\ & \times a_3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2) - \\ & - [(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) (\alpha_{q_1} - 1) + (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) (\alpha_{q_2} - 1)] \times \\ & \times a_3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \}. \end{aligned}$$

Враховуючи все сказане вище, для парного структурного фактора в границі низьких температур здобудемо такий результат:

$$\begin{aligned} S(q_1) &= \frac{1}{\alpha_{q_1}^2} \left[\alpha_{q_1} + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{\alpha_{k_2} - 1}{\alpha_{k_2}} \times \right. \\ & \times \frac{\alpha_{k_3} - 1}{\alpha_{k_3}} + 2a_2(\mathbf{q}_1) + \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2} \alpha_{k_3}} + \\ & \left. + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \frac{a_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2)}{\alpha_{k_2}} + \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{a_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2} \alpha_{k_3}} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

де $a_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2)$ – скорочений запис величини $a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2)$.

У прийнятому нами наближенні “двох сум за хвильовим вектором” він може бути записаний в той же спосіб, як і у роботі [21]:

$$S(q) = 1/[1 - 2a_2(q) - \Sigma(q)],$$

де

$$\begin{aligned} \Sigma(q) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{a_4(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{q})}{1 - 2\tilde{a}_2(k)} + \frac{2}{N} \times \\ &\times \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \neq 0 \ \mathbf{k}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0}} \frac{\{\tilde{a}_2(k_1)\tilde{a}_2(k_2) + a_3(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)[1 + a_3(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)]\}}{(1 - 2\tilde{a}_2(k_1))(1 - 2\tilde{a}_2(k_2))}, \\ \tilde{a}_2(q_1) &= -\frac{1}{2}(\alpha_{q_1} - 1) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \left[\frac{q_2^2}{2q_1^2 \alpha_{q_1}} a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) + \right. \\ &\left. + \frac{(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2 \alpha_{q_1}} a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \right]. \end{aligned}$$

Аналогічно для тричастинкового і чотиричастинкового структурних факторів в границі низьких температур матимемо такі вирази:

$$\begin{aligned} S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= \frac{1}{\alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \alpha_{q_3}} \{1 + 2a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)\}, \\ S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) &= \frac{2}{\alpha_{q_1}^2 \alpha_{q_2}^2} \left[-\frac{\alpha_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} - 1}{\alpha_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|}} + \right. \\ &+ \frac{4}{\alpha_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|}} a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \\ &\left. + a_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \frac{4}{\alpha_{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|}} a_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \right]. \end{aligned}$$

5. Дво-, три- та чотиричастинковий структурні фактори в границі високих температур

Користуючись явним виглядом виразів для величин $\bar{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\bar{C}_2^0(\mathbf{q}_1)$, $\bar{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $\bar{C}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $\bar{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, $\bar{C}_4^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ (Додаток 2), легко можемо отримати, що в границі високих температур ($T \rightarrow \infty$ або $\beta \rightarrow 0$):

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{C}_2(\mathbf{q}_1) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{C}_2^0(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{16N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2 \neq 0 \ \mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0}} \frac{q_1^2(\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3)}{q_2^2 q_3^2},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{C}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{12},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{C}_4^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{8},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} C_2(\mathbf{q}_1) = \lim_{\beta \rightarrow 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \lim_{\beta \rightarrow 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 0.$$

Тому в границі високих температур дво-, три- і чотиричастинковий структурні фактори багатобозонної системи переходять у відповідні вирази для ідеального бозе-газу:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} S(q) = S_0(q),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) = S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2).$$

6. Чисельні розрахунки

Чисельний розрахунок двочастинкового структурного фактора (2) будемо проводити з урахуванням ефективною маси [33]. Щоб не перевищувати точність розрахунків ми використовуватимемо ефективну масу лише в доданках, які відтворюють наближення парних кореляцій, натомість у виразах, які містять суму за хвильовим вектором, стоїть “гола” маса. Тут варто зробити ще таке зауваження: у структурних факторах ідеального бозе-газу, які входять у вирази з сумою за хвильовим вектором, ефективна маса використана лише для того, щоб змістити критичну точку через перенормування активності $z_0 = \exp[\beta\mu]$, де μ – хімічний потенціал. Введення ефективною маси дозволяє уникнути інфрачервоних розбіжностей, присутніх у перенормованому чотиричастинковому структурному факторі ідеального бозе-газу.

Для розрахунку величин з однією сумою за хвильовим вектором потрібно від підсумовування перейти до інтегрування за відомим [35] правилом:

$$\sum_{\mathbf{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}.$$

Провівши відповідні перетворення і зробивши необхідну заміну змінних, для нашого випадку ми отримаємо таке правило переходу від підсумовування до інтегрування:

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k}_2 \neq 0 \ \mathbf{k}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0}} = \frac{1}{4\pi^2 \rho q_1} \int_0^\infty k_2 dk_2 \int_{|\mathbf{q}_1 - k_2|}^{|\mathbf{q}_1 + k_2|} k_3 dk_3,$$

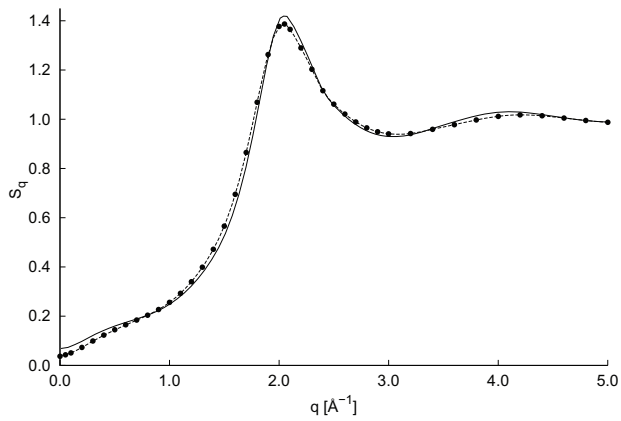


Рис. 1. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 1,0$ К

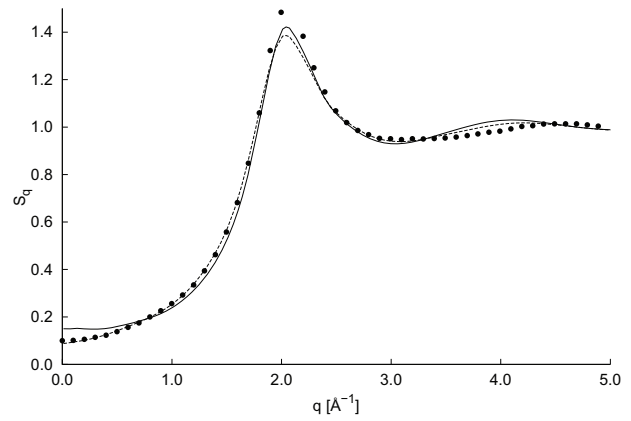


Рис. 4. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 2,2$ К

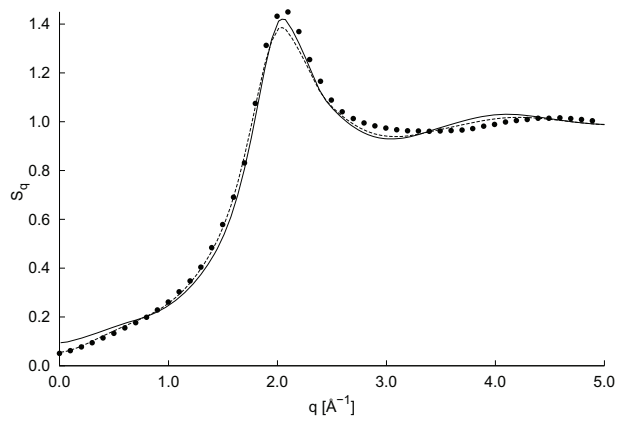


Рис. 2. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 1,38$ К

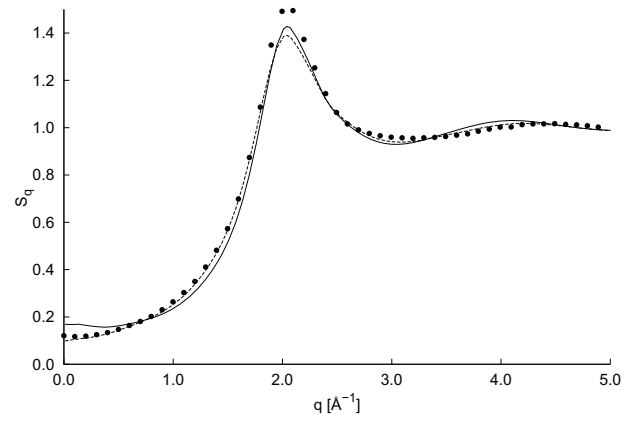


Рис. 5. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 2,5$ К

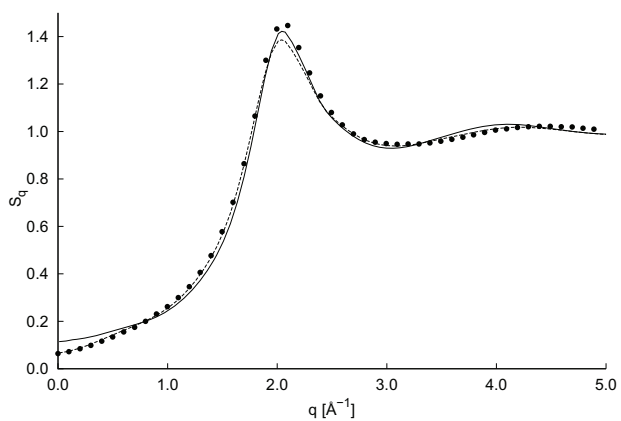


Рис. 3. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 1,67$ К

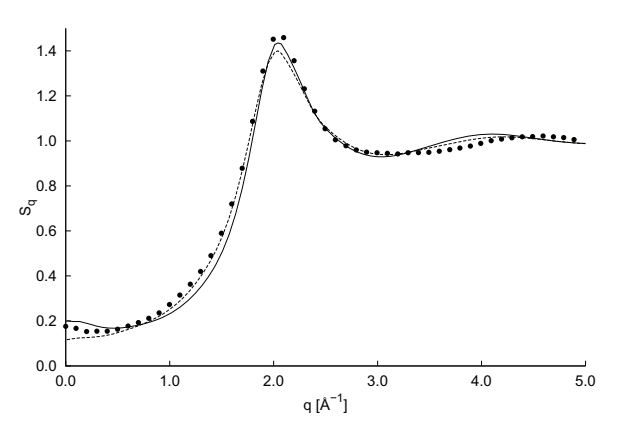


Рис. 6. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 3,0$ К

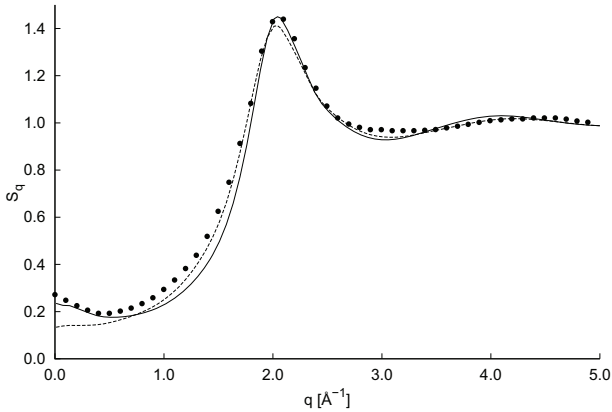


Рис. 7. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 3,5 \text{ K}$

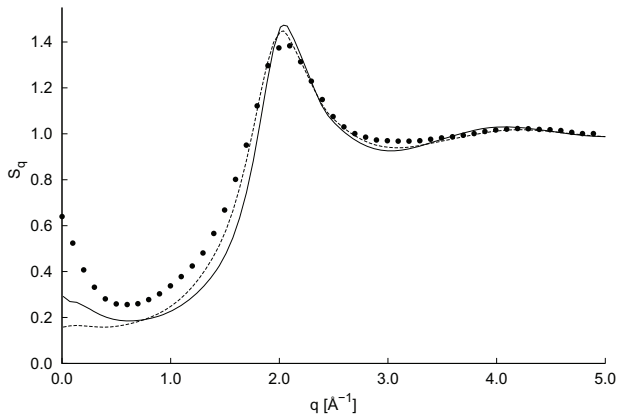


Рис. 8. Структурний фактор рідкого ^4He при температурі $T = 4,24 \text{ K}$

де ρ – рівноважна густина бозе-системи. Для такої квантової рідини, як ^4He вона рівна $\rho = 0,02185 \text{ \AA}^{-3}$ [36]. Наступний крок полягає у розрахунку величин α_q за допомогою екстрапольованого на основі експериментальних даних значення парного структурного фактора в нулі температур. Цю інформацію беремо з роботи [31].

Звернімося тепер до рівняння (3), переписавши його в такий спосіб:

$$\frac{1}{\alpha_{q_1}} = S^{\text{exp}}(q_1) - \frac{1}{\alpha_{q_1}^2} \left[\frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{\alpha_{k_2} - 1}{\alpha_{k_2}} \frac{\alpha_{k_3} - 1}{\alpha_{k_3}} + \right.$$

$$\left. + 2a_2(\mathbf{q}_1) + \frac{2}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0}} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2} \alpha_{k_3}} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \frac{a_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2)}{\alpha_{k_2}} + \frac{2}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0}} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{a_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2} \alpha_{k_3}} \right]. \quad (4)$$

Ми отримали ітераційне рівняння стосовно α_q . В нульовому наближенні $\alpha_q = 1/S^{\text{exp}}(q)$. Підставляючи це значення α_q в праву частину рівності (4), отримуємо значення α_q в першому наближенні і т.д. Однак такий ітераційний процес не є збіжним, що скоріш за все пов'язано з замалою кількістю членів розкладу для структурного фактора (3). Тому ми обмежимося лише нульовим наближенням для α_q .

Результати чисельних розрахунків для температур 1,0 К, 1,38 К, 1,67 К, 2,2 К, 2,5 К, 3,0 К, 3,5 К, 4,24 К наведені на рис. 1–8. Експериментальні дані для структурного фактора при згаданих вище температурах були взяті з робіт [12, 13].

В усіх наведених рисунках вигляд графіків має такий зміст: суцільна лінія – обчислений структурний фактор з урахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій, пунктирна лінія – наближення парних кореляцій, кружечки – експериментальний структурний фактор.

7. Висновок

У цій роботі були знайдені вирази для дво-, три- і чотиричастинкових структурних факторів в наближенні “однієї суми за хвильовим вектором” із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій в широкотемпературній ділянці. В границі низьких температур отриманий вираз для двочастинкового структурного фактора переходить в уже відомий [21]. Ці самі слова будуть актуальними і по відношенню до границі високих температур.

Знайдені вирази є доволі громіздкими. Для їх аналізу були застосовані чисельні методи і в результаті здобуто графічне представлення для парного структурного фактора при різних значеннях температури рідкого ^4He . На черзі є розрахунок внутрішньої енергії і знаходження температурної залежності швидкості першого звуку в багатобозонній системі, що і буде предметом наших наступних статей.

ДОДАТОК 1

$$P(\rho|\rho') = \exp\left[\frac{c_0}{N} + \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{i_1=0}^1 \sum_{j_1=0}^1 c_2(1^{j_1}, -1^{i_1}) \times \right. \\ \times \left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1} \rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1} \rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1} \right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^1 c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}) \times \\ \times \left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1} \rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2} \rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-i_1} \rho_{\mathbf{q}_2}^{1-i_2} \rho_{\mathbf{q}_3}^{1-i_3} \right) + \\ + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{i_1, i_2=0}^1 \sum_{j_1, j_2=0}^1 c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) \times \\ \times \left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1} \rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} \rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2} \rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1} \rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1} \rho_{\mathbf{q}_2}^{1-j_2} \rho_{-\mathbf{q}_2}^{1-i_2} \right) \left. \right].$$

Індекси i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 , які стоять біля величин $\rho_{\mathbf{q}}$ можуть набирати значення 0 або 1, при цьому значення 0 означає відсутність штриха, а 1 – присутність. Позначення $c_2(1^{j_1}, -1^{i_1})$ – це скорочений запис $c_2(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}, \rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1})$, відповідно $c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})$ – це $c_3(\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1}, \rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2}, \rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3})$, а $c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ – це $c_4(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}, \rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}, \rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2}, \rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2})$. Далі

$$c_2(1^{j_1}, -1^{i_1}) = \bar{c}_2(1^{j_1}, -1^{i_1}) - \bar{c}_2^0(1^{j_1}, -1^{i_1}), \\ c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}) = \bar{c}_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}) - \bar{c}_3^0(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}), \\ c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) = \bar{c}_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) - \\ - \bar{c}_4^0(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}).$$

Величини $\bar{c}_0^0, \bar{c}_2^0, \bar{c}_3^0, \bar{c}_4^0$ – це відповідні величини $\bar{c}_0, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4$, в яких у виразах прийнято $\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2} = \alpha_{q_3} = 1$.

Величина $\bar{c}_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ складається з двох доданків:

$$\bar{c}_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) = \bar{c}_4^{(1)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) + \\ + \bar{c}_4^{(2)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}),$$

де

$$\bar{c}_4^{(1)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) = \\ = -\frac{1}{64} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} (q_1^2 + q_2^2)}{\text{sh}^2(\beta E_{q_1}) \text{sh}^2(\beta E_{q_2})} \times \\ \times \sum_{\pm_1} \sum_{\pm_2} \sum_{\pm_3} \pm_1 \pm_2 \pm_3 \frac{\text{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_1} \pm_1 E_{q_1} \pm_2 E_{q_2} \pm_3 E_{q_2})\right]}{E_{q_1} \pm_1 E_{q_1} \pm_2 E_{q_2} \pm_3 E_{q_2}} \times \\ \times \text{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1} E_{q_1} \pm_1 (-1)^{j_1} E_{q_1} \pm_2 \right. \right. \\ \left. \left. \pm_2 (-1)^{i_2} E_{q_2} \pm_3 (-1)^{j_2} E_{q_2}\right)\right]. \\ \bar{c}_4^{(2)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) = \frac{(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}}{128\alpha_{q_3}} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \times \\ \times \frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{\text{sh}^2(\beta E_{q_1}) \text{sh}^2(\beta E_{q_2}) \text{sh}(\beta E_{q_3})} \text{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2} + E_{q_3})\right] \times \\ \times \left\{ \frac{\beta}{\tilde{E}} \text{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1} \tilde{E}_{q_1} + (-1)^{i_2} \tilde{E}_{q_2} - E_{q_3}\right)\right] \times \right.$$

$$\left. \times Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) - \frac{2 \text{sh}\left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}\right]}{\tilde{E}^2} Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \times \right. \\ \times \text{ch}\left[\beta\left((i_1-1)\tilde{E}_{q_1} + (i_2-1)\tilde{E}_{q_2}\right)\right] - \\ - \frac{2 \text{sh}\left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_2}\right]}{\tilde{E} \tilde{E}_{q_2}} Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \times \\ \times \text{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1} \tilde{E}_{q_1} + 2(i_2-1)\tilde{E}_{q_2} - E_{q_3}\right)\right] + \\ + \frac{2 \text{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1} + E_{q_3})\right]}{\tilde{E}(\tilde{E}_{q_1} + E_{q_3})} Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \times \\ \times \text{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left(2(i_1-1)\tilde{E}_{q_1} + (-1)^{i_2} \tilde{E}_{q_2}\right)\right] - \\ - \frac{2 \text{sh}\left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_1}\right]}{\tilde{E} \tilde{E}_{q_1}} Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \times \\ \times \text{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_2} \tilde{E}_{q_2} + 2(i_1-1)\tilde{E}_{q_1} - E_{q_3}\right)\right] + \\ + \frac{2 \text{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2} + E_{q_3})\right]}{\tilde{E}(\tilde{E}_{q_2} + E_{q_3})} Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \times \\ \times \text{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left(2(i_2-1)\tilde{E}_{q_2} + (-1)^{i_1} \tilde{E}_{q_1}\right)\right] - \\ - \frac{2 \text{sh}\left[\frac{\beta}{2} E_{q_3}\right]}{\tilde{E} E_{q_3}} Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \times \\ \times \text{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_2} \tilde{E}_{q_2} + (-1)^{i_1} \tilde{E}_{q_1}\right)\right] + \\ + \frac{2 \text{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1} + E_{q_2})\right]}{\tilde{E}(\tilde{E}_{q_1} + E_{q_2})} Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \times \\ \times \text{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left(2(i_2-1)\tilde{E}_{q_2} + 2(i_1-1)\tilde{E}_{q_1} - E_{q_3}\right)\right] \left. \right\}.$$

Коефіцієнти $\bar{c}_2(1^{j_1}, -1^{i_1})$ і \bar{c}_0 можна виразити через величини $\bar{c}_4^{(1)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ і $\bar{c}_4^{(2)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$:

$$\bar{c}_2(1^{j_1}, -1^{i_1}) = 2\alpha_{q_2} \text{sh}[\beta E_{q_2}] \times \\ \times \left(2\bar{c}_4^{(1)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2, -2') + \bar{c}_4^{(2)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2, -2') \right), \\ \bar{c}_0 = 4\alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \text{sh}[\beta E_{q_1}] \text{sh}[\beta E_{q_2}] \times \\ \times \left(2\bar{c}_4^{(1)}(1, -1', 2, -2') + \frac{\bar{c}_4^{(2)}(1, -1', 2, -2')}{3} \right).$$

Величина $\bar{c}_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})$ має такий вигляд:

$$\bar{c}_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}) = -\frac{1}{16} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(-1)^{i_1+i_2} (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)}{\text{sh}[\beta E_{q_1}] \text{sh}[\beta E_{q_2}] \text{sh}[\beta E_{q_3}]} \times \\ \times \sum_{\pm_1} \sum_{\pm_2} (\alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \pm_1 \pm_2) \frac{\text{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2} + E_{q_3})\right]}{\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2} + E_{q_3}} \times \\ \times \text{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1} \tilde{E}_{q_1} + (-1)^{i_2} \tilde{E}_{q_2} + (-1)^{i_3} E_{q_3}\right)\right].$$

В написаних вище виразах введені такі позначення:

$$\tilde{E}_{q_1} = \pm_1 E_{q_1}; \quad \tilde{E}_{q_2} = \pm_2 E_{q_1}; \\ \tilde{\alpha}_{q_1} = \pm_1 \alpha_{q_1}; \quad \tilde{\alpha}_{q_2} = \pm_1 \alpha_{q_2}; \\ \tilde{E} = \pm_1 E_{q_1} \pm_2 E_{q_2} + E_{q_3}; \\ Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) = (\pm_1 \pm_2 \alpha_{q_1} \alpha_{q_2} + 1)(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) + \\ + (\pm_1 \alpha_{q_1} \alpha_{q_3} + 1)(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3) + (\pm_2 \alpha_{q_2} \alpha_{q_3} + 1)(\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3).$$

ДОДАТОК 2

$$C_2(\mathbf{q}_1) = \bar{C}_2(\mathbf{q}_1) - \bar{C}_2^0(\mathbf{q}_1),$$

$$C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \bar{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) - \bar{C}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3),$$

$$C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \bar{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) - \bar{C}_4^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2),$$

де

$$\bar{C}_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2} \sum_{i_1=0}^1 \sum_{j_1=0}^1 \bar{c}_2(1^{j_1}, -1^{i_1});$$

$$\bar{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^1 \bar{c}_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3});$$

$$\bar{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=0}^1 \sum_{j_1, j_2=0}^1 \bar{c}_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}).$$

Позначення $\bar{C}_2^0(\mathbf{q}_1)$, $\bar{C}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $\bar{C}_4^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ означають величини $\bar{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\bar{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $\bar{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, у виразах для яких Боголюбовський фактор рівний одиниці: $\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2} = \alpha_{q_3} = 1$. Самі ж величини $\bar{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\bar{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $\bar{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{C}_2(\mathbf{q}_1) &= -\frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{q_1^2 + q_2^2}{\alpha_{q_2} \text{ch}^2 \left[\frac{\beta}{2} E_{q_1} \right] \text{sh}[\beta E_{q_2}]} \times \\ &\times \left\{ \frac{\beta}{4} \text{ch}[\beta E_{q_2}] - \frac{\text{sh}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_2}} + \frac{\text{sh}[\beta E_{q_1}] \text{ch}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_1}} - \right. \\ &- \left. \frac{\text{sh}[\beta(E_{q_1} + E_{q_2})]}{8(E_{q_1} + E_{q_2})} - \frac{\text{sh}[\beta(E_{q_1} - E_{q_2})]}{8(E_{q_1} - E_{q_2})} \right\} + \frac{1}{16} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \times \\ &\times \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} \frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_2} + E_{q_3}) \right]}{\alpha_{q_2} \alpha_{q_3} \tilde{E} \text{ch}^2 \left[\frac{\beta}{2} E_{q_1} \right] \text{sh}[\beta E_{q_2}] \text{sh}[\beta E_{q_3}]} \times \\ &\times \left\{ \frac{\beta}{4} \text{sh} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_2} + E_{q_3}) \right] Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \text{sh} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E} \right] \text{sh} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_1} \right] \times \\ &\times \left(\frac{Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{\tilde{E}} + \frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_1}} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \text{sh} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2}) \right] \text{sh} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_1} + E_{q_3}) \right] \times \\ &\times \left(\frac{Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2}} + \frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_1} + E_{q_3}} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \text{sh} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_2} \right] \text{sh} \left[\frac{\beta}{2} E_{q_3} \right] \times \\ &\times \left. \left(\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_2}} + \frac{Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{E_{q_3}} \right) \right\}. \\ \bar{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= -\frac{1}{48} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E} \right]}{\tilde{E} \prod_{j=1}^3 \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} E_{q_j} \right]} \times \\ &\times Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= -\frac{1}{16} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{\text{ch}^2 \left[\frac{\beta}{2} E_{q_1} \right]} \times \\ &\times \frac{1}{\text{ch}^2 \left[\frac{\beta}{2} E_{q_2} \right]} \left\{ \frac{\beta}{4} + \frac{\text{sh}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_2}} + \frac{\text{sh}[\beta E_{q_1}] \text{ch}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_1}} + \right. \\ &+ \left. \frac{\text{sh}[\beta(E_{q_1} + E_{q_2})]}{8(E_{q_1} + E_{q_2})} + \frac{\text{sh}[\beta(E_{q_1} - E_{q_2})]}{8(E_{q_1} - E_{q_2})} \right\} + \frac{1}{64} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \times \\ &\times \sum_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0} \frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3})}{\alpha_{q_3} \tilde{E} \text{ch}^2 \left[\frac{\beta}{2} E_{q_1} \right] \text{ch}^2 \left[\frac{\beta}{2} E_{q_2} \right] \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} E_{q_3} \right]} \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{\beta}{4} \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} E_{q_3} \right] - \frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E} \right]}{2\tilde{E}} \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2}) \right] \right) \times \right. \\ &\times Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) + \left(\frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_2} \right]}{2\tilde{E}_{q_2}} \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_2} + E_{q_3}) \right] - \right. \\ &- \left. \frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_1} + E_{q_3}) \right]}{2(\tilde{E}_{q_1} + E_{q_3})} \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_2} \right] \right) Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) + \\ &+ \left(\frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_1} \right]}{2\tilde{E}_{q_1}} \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_1} + E_{q_3}) \right] - \right. \\ &- \left. \frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_2} + E_{q_3}) \right]}{2(\tilde{E}_{q_2} + E_{q_3})} \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E}_{q_1} \right] \right) Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) + \\ &+ \left. \left(-\frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} E_{q_3} \right]}{2E_{q_3}} + \frac{\text{sh} \left[\frac{\beta}{2} (\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2}) \right]}{2(\tilde{E}_{q_1} + \tilde{E}_{q_2})} \text{ch} \left[\frac{\beta}{2} \tilde{E} \right] \right) \times \right. \\ &\times \left. Q(-\tilde{\alpha}_{q_1}, -\tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) \right\}. \end{aligned}$$

1. I.V. Bogoyavlenskii, A.V. Puchkov, and A. Skomorokhov, *Physica B* **284–288**, 25 (2000).
2. Fereydoon Family, *Physica B + C* **107**, 699 (1981).
3. F. Zambelli, L. Pitaevskii, D.M. Stamper-Kurn, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **61**, 063608 (2000).
4. E. Krotscheck and T. Lichtenegger, *J. Low Temp. Phys.* **178**, 61 (2015).
5. R. Hobbiger, R. Holler, E. Krotscheck, and M. Panholzer, *J. Low Temp. Phys.* **169**, 350 (2012).
6. V. Sorkin, E. Polturak, and J. Adler, *J. Low Temp. Phys.* **143**, 141 (2006).
7. E. Krotscheck and C.J. Tymczak, *Phys. Rev. B* **45**, 217 (1992).
8. K. Miyazaki and I.M. de Schepper, *Phys. Rev. E* **63** 060201 (2001).
9. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, Yu.P. Vlasov, *Phys. B: Cond. Matt.* **203**, 95 (1994).
10. J. Dawidowski, F. J. Bermejo, M. L. Ristig, B. Fåk, C. Cabrillo, R. Fernández-Perea, K. Kinugawa, and J. Campo, *Phys. Rev. B* **69**, 014207 (2004).
11. F. Hayot and C. Jayaprakash, *Phys. Rev. E* **57**, 4867(R) (1998).

12. E.C. Svensson, V.F. Sears, A.D.B. Woods, and P. Martel, *Phys. Rev. B* **21**, 3638 (1980).
13. H.N. Robkoff and R.B. Hallock, *Phys. Rev. B* **24**, 159 (1981).
14. F. Caupin, J. Boronat, and K.H. Andersen, *J. Low Temp. Phys.* **152**, 108 (2008).
15. J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, and N. Davidson, *Phys. Rev. A* **72**, 023608 (2005).
16. Chia-Wei Woo and R.L. Coldwell, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1062 (1972).
17. N.G. Almaraz, E. Lomba, and D. Molina, *Phys. Rev. E* **70**, 021203 (2004).
18. P. Ziń, M. Trippenbach, and M. Gajda, *Phys. Rev. A* **69**, 023614 (2004).
19. И.А. Вакарчук, И.Р. Юхновський, *ТМФ* **40**, 100 (1979); **42**, 112 (1980).
20. И.А. Вакарчук, О.Л. Гонопольський, И.Р. Юхновський, *ТМФ* **41**, 77 (1979).
21. И.А. Вакарчук, *Теор. мат. физ.*, **65**, 285 (1985); **82**, 438 (1990).
22. И.А. Вакарчук, П.А. Глушак, *ТМФ* **75**, 101 (1988).
23. П.А. Глушак, *Исследование равновесных свойств сверхтекучего гелия-4 при низких температурах. Кандидатская диссертация* (Львов, 1992).
24. I.O. Vakarchuk, P.O. Prityula, A.A. Rovenchak, *ТМФ* **11**, 259 (2007).
25. I.O. Vakarchuk, P.O. Prityula, *Журн. фіз. досл.*, **12**, 4001 (2008); **13**, 2003 (2009).
26. F.K. Achter and L. Meyer, *Phys. Rev.* **188**, 291 (1969).
27. Г. Темперли, Дж. Роулинсон, Дж. Рашбрук, *Физика простых жидкостей* (Мир, Москва, 1971).
28. К. Крокстон, *Физика жидкого состояния* (Мир, Москва, 1978).
29. I.O. Vakarchuk, O.I. Grygorchak, *Журн. фіз. досл.* **3**, 3005 (2009).
30. I.O. Vakarchuk, O.I. Grygorchak, *Вісник Львівського університету. Серія фізична* **46**, 3 (2011).
31. I.O. Vakarchuk, V.V. Babin, and A.A. Rovenchak, *J. Phys. Stud.* **4**, 16 (2000).
32. А.А. Ровенчак, *Самоузгоджений розрахунок міжчастинних потенціалів та термодинамічних функцій гелію-4 в надплинній та нормальній фазах. Кандидатська дисертація* (Львів, 2003).
33. I.O. Vakarchuk, O.I. Grygorchak, В.С. Пастухов, P.O. Prityula, arXiv:1506.03317 (2015).
34. I.O. Vakarchuk, *J. Phys. Stud.* **8**, 223 (2004).
35. I. Вакарчук, *Вступ до проблеми багатьох тіл* (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 1999).
36. R.J. Donnelly and C.F. Barenghi, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **27**, 1217 (1998).

Одержано 01.04.15

И.А. Вакарчук, О.И. Григорчак

**СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ
МНОГОБОЗОННОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ПРЯМЫХ
ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХЧАСТИЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ**

Резюме

На основании выражения для матрицы плотности взаимодействующих бозе-частиц в координатном представлении для широкого интервала температур с учетом прямых трех- и четырехчастичных корреляций [I.O. Vakarchuk, O.I. Grygorchak, *Журн. фіз. досл.* **3**, 3005 (2009)] были рассчитаны двух-, трех- и четырехчастичные структурные факторы жидкого ^4He в приближении "одной суммы по волновому вектору". В пределе низких температур полученное выражение для двухчастичного структурного фактора переходит в уже известное. В пределе высоких температур выражения для двух-, трех- и четырехчастичных структурных факторов редуцируются к структурным факторам идеального бозе-газа. Результаты работы могут быть применены для расчета термодинамических функций жидкого ^4He и нахождения температурной зависимости скорости первого звука в многобозонной системе.

I.O. Vakarchuk, O.I. Hryhorchak

**STRUCTURE FUNCTIONS OF MANY-BOSON
SYSTEM WITH REGARD FOR DIRECT THREE-
AND FOUR-PARTICLE CORRELATIONS**

S u m m a r y

On the basis of the expression for the density matrix of interacting Bose particles in the coordinate representation with regard for the direct three- and four-particle correlations [I.O. Vakarchuk and O.I. Hryhorchak, *J. Phys. Stud.* **3**, 3005 (2009)], the two-, three-, and four-particle structure factors of liquid ^4He in a wide temperature interval were calculated in the approximation "one sum over the wave vector". In the low-temperature limit, the expression obtained for the two-particle structure factor transforms into the well-known one. In the high-temperature limit, the expressions for the two-, three-, and four-particle structure factors are reduced to those for the ideal Bose gas. The results obtained can be applied to calculations of the thermodynamic functions of liquid ^4He and to the determination of the temperature dependence of the first-sound velocity in a many-boson system.