

І.В. СТАСЮК, О.В. ВЕЛИЧКО, І.Р. ДУЛЕПА

Інститут фізики конденсованих систем НАН України  
(Вул. Свенціцького, 1, Львів 79011)

## ДОСЛІДЖЕННЯ БОЗОННОГО СПЕКТРА ДВОВИМІРНИХ ОПТИЧНИХ ГРАТОК ЗІ СТРУКТУРОЮ ТИПУ ГРАФЕНУ. НАДПЛИННА ФАЗА

УДК 538.911, 538.941

---

*Досліджено енергетичний спектр системи бозе-атомів у надплинній фазі в оптичних ґратках типу графену. Розрахунок законів дисперсії у зонах та одночастинкових спектральних густин проведено у наближенні хаотичних фаз у рамках формалізму жорстких бозонів. Описано їх зміни при переході від нормальної до надплинної фази. Під час такої перебудови збільшується вдвічі число підзон. У випадку енергетичної еквівалентності підґраток діраківські точки у спектрі зберігаються, а їх кількість подвоюється. При енергетичній відмінності між підґратками точки Дірака відсутні. Показано, що форма спектральних густин чутлива до зміни температури та розташування хімічного потенціалу.*

*Ключові слова:* оптична ґратка, гексагональна ґратка, фазовий перехід, спектральна густина, жорсткі бозони, точки Дірака.

### 1. Вступ

Ця робота є продовженням досліджень, викладених у [1] і присвячених розрахунку енергетичного спектра та одночастинкових спектральних густин для системи бозе-атомів у двовимірній гексагональній оптичній ґратці типу графену. На відміну від задачі про електронний спектр графену ми тут маємо справу з частинками, які описуються іншою (ніж фермі-) статистикою. Вивченню термодинаміки і особливостей спектра бозе-частинок у оптичних ґратках протягом останнього часу надається значна увага. Важливою і цікавою є задача, яка стосується змін у спектрі при фазовому переході, пов'язаному з бозе-конденсацією частинок (переході від нормальної (NO) до надплинної (superfluid (SF)) фази).

Бозе-конденсація бозонних атомів ( $\text{Rb}^{87}$ ) у оптичних ґратках, утворених шляхом інтерференції зу-

стрічних пучків лазерних променів, вперше спостерігалась у 2002 р. [2, 3]. З цього часу дослідження цього ефекту та супутніх явищ проводяться надзвичайно інтенсивно. Для оптичних ґраток типу графену перехід до SF-фази було отримано на експерименті в [4], де було виявлено області існування різних фаз (залежно від значень хімічного потенціалу та параметрів, що характеризують короткосяжні взаємодії і динаміку частинок). Теоретичний розгляд [5–8] стосувався побудови та аналізу фазових діаграм, виходячи з моделі Бозе–Хаббарда [9, 10], яка є загально прийнятою для опису системи бозе-атомів у оптичних ґратках. Енергетичний спектр бозонів у ґратках типу графену досліджувався в роботах [11, 12]; були розглянуті питання, пов'язані з топологією спектра і розташуванням діраківських точок у нормальній (NO) фазі. Аналіз змін спектра при переході до SF-фази не проводився.

Важливий вплив на формування спектра системи бозе-атомів у ґратці типу графену ма-

© І.В. СТАСЮК, О.В. ВЕЛИЧКО, І.Р. ДУЛЕПА, 2014

ють короткосяжні міжчастинкові кореляції, зокрема одновузлова взаємодія відштовхування  $U$ . Ще одним ускладненням порівняно з ґраткою графену є енергетична нееквівалентність підґраток (якою легко керувати, змінюючи фази лазерних променів, які генерують оптичну ґратку). Все це приводить, як показано в [1], до суттєвих відмінностей у вигляді одночастинкового спектра NO фази у порівнянні зі стандартним спектром графену. Встановлено, зокрема, що діраківські точки в спектрі існують не при будь-яких густинах частинок і, відповідно, значеннях хімічного потенціалу. Вони зникають, якщо хімічний потенціал у нормальній (NO) фазі перебуває у щілині між енергетичними підзонами (така щілина виникає внаслідок енергетичної нееквівалентності підґраток).

У даній роботі, в доповнення до розрахунків, які були проведені в [1], ми розглядаємо випадок, коли система перебуває у фазі з бозе-конденсатом (SF-фазі). Наш опис ґрунтується, як і в [1], на двопідґратковій моделі жорстких бозонів [13], яка є граничним випадком ( $U \rightarrow \infty$ ) моделі Бозе-Хаббарда і стосується малих рівнів заповнення ( $0 \leq n \leq 1$ ) вузлових станів. Загальна схема знаходження одночастинкових функцій Гріна для такої моделі у її псевдоспіновому формулюванні добре відома; в даній роботі ми використовуємо підхід, поданий в [14]. Нашою метою є дослідження закономірностей перебудови зонного спектра бозонів та спектральних густин при переході від NO до SF фази, який відбувається при зміні хімічного потенціалу, енергетичної відмінності між підґратками та температури.

## 2. Спектр збуджень в надплинній (SF) фазі

Гамільтоніан ґраткового газу жорстких бозонів, записаний при нехтуванні міжвузловою взаємодією частинок, має вигляд

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} t b_i^+ b_j + \sum_i (\varepsilon_0 - \mu) n_i, \quad (1)$$

де  $t$  – інтеграл перенесення між найближчими вузлами,  $\varepsilon_0$  – енергія частинки на вузлі,  $\mu$  – хімічний потенціал. Оскільки оператори  $b_i^+$  ( $b_i$ ) є операторами Паулі, гамільтоніан (1) може бути переписаний у псевдоспіновому представленні за допомогою пе-

ретворень

$$b_i^+ = S_i^-, \quad b_i = S_i^+, \quad b_i^+ b_i = n_i = \frac{1}{2} - S_i^z. \quad (2)$$

У двопідґратковому випадку  $i \rightarrow (n, \alpha)$ , де  $\alpha = A, B$  – індекс підґратки. В результаті

$$\begin{aligned} \hat{H} = & - \sum_{\langle n, n' \rangle} \left[ J_{nn'}^{AB} (S_{nA}^x S_{n'B}^x + \right. \\ & \left. + J_{nn'}^{BA} (S_{nB}^x S_{n'A}^x + S_{nB}^y S_{n'A}^y) \right] - \\ & - h_A \sum_n S_{nA}^z - h_B \sum_n S_{nB}^z \\ (J_{\langle n, n' \rangle}^{AB} = & J_{\langle n', n \rangle}^{BA} = t, \quad h_\alpha = \varepsilon_\alpha - \mu). \end{aligned} \quad (3)$$

У фазі з бозе-конденсатом параметром порядку стає відмінне від нуля середнє

$$\langle b_{n\alpha} \rangle = \langle S_{n\alpha}^x \rangle \neq 0.$$

У зв'язку з цим застосовують перетворення повороту

$$\begin{aligned} S_{n\alpha}^z &= \sigma_{n\alpha}^z \cos \vartheta_\alpha + \sigma_{n\alpha}^x \sin \vartheta_\alpha, \\ S_{n\alpha}^x &= \sigma_{n\alpha}^x \cos \vartheta_\alpha - \sigma_{n\alpha}^z \sin \vartheta_\alpha, \\ S_{n\alpha}^y &= \sigma_{n\alpha}^y, \end{aligned} \quad (4)$$

де кути  $\vartheta_\alpha$  знаходять шляхом діагоналізації гамільтоніана середнього поля

$$H_{MF} = - \sum_{n\alpha} E_\alpha \sigma_{n\alpha}^z. \quad (5)$$

Оскільки  $\langle \sigma_{n\alpha}^z \rangle \neq 0$ ,  $\langle \sigma_{n\alpha}^x \rangle = \langle \sigma_{n\alpha}^y \rangle = 0$ , то  $\langle S_\alpha^x \rangle = - \langle \sigma_\alpha^z \rangle \sin \vartheta_\alpha$ .

У нормальній фазі

$$\sin \vartheta_\alpha = 0, \quad E_\alpha = h_\alpha, \quad \langle \sigma_{n\alpha}^z \rangle = \frac{1}{2} \tanh \frac{\beta h_\alpha}{2}. \quad (6)$$

У випадку SF фази внутрішні поля  $E_\alpha$  і кути  $\vartheta_\alpha$  визначаються із системи рівнянь [14]:

$$\begin{aligned} \sin^2 \vartheta_\alpha &= \frac{\langle \sigma_\alpha^z \rangle^2 \langle \sigma_\beta^z \rangle^2 J^4(0) - h_\alpha^2 h_\beta^2}{\langle \sigma_\alpha^z \rangle^2 J^2(0) [h_\alpha^2 + \langle \sigma_\beta^z \rangle^2 J^2(0)]}, \\ \langle \sigma_\alpha^z \rangle &= \frac{1}{2} \tanh \frac{\beta E_\alpha}{2}, \\ E_\alpha &= \langle \sigma_\alpha^z \rangle J(0) \frac{\sqrt{h_\alpha^2 + \langle \sigma_\beta^z \rangle^2 J^2(0)}}{\sqrt{h_\beta^2 + \langle \sigma_\alpha^z \rangle^2 J^2(0)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

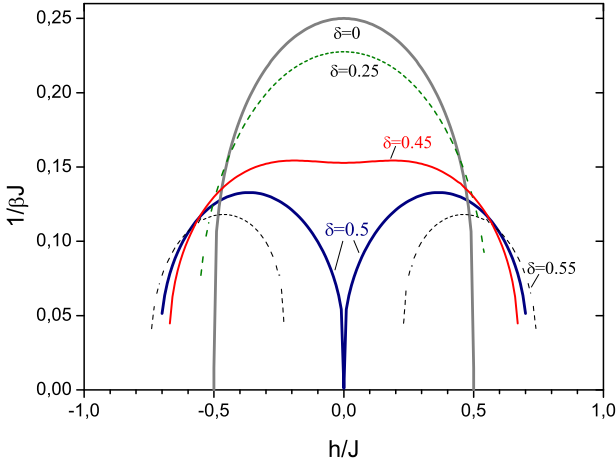


Рис. 1. Фазова діаграма на площині  $(T, h)$  при різних значеннях  $\delta$  ( $\delta = 0, 0,25, 0,45, 0,5, 0,55$ ) [14]

а перехід з однієї фази в другу відбувається в разі виконання умови

$$h_A h_B = \langle \sigma_A^z \rangle \langle \sigma_B^z \rangle J^2(0) \equiv \langle \sigma_A^z \rangle \langle \sigma_B^z \rangle 9t^2. \quad (8)$$

Співвідношення (8) визначає межі областей, в яких існують NO та SF фази. На рис. 1 зображено фазову діаграму на площині  $(T, h)$  [1, 14], де  $h = \frac{h_A + h_B}{2}$ , при різних значеннях параметра  $\delta = \frac{h_A - h_B}{2}$ .

Двочасова функція Гріна

$$\langle \langle b_{l\alpha} | b_{n\beta}^+ \rangle \rangle = \langle \langle S_{l\alpha}^+ | S_{n\beta}^- \rangle \rangle \equiv G_{l\alpha, n\beta}^{+-}, \quad (9)$$

за допомогою якої можна отримати бозонний спектр, була знайдена в [1, 14] методом рівнянь руху у наближенні хаотичних фаз. Для її фур'є-образу у імпульсно-частотному представленні отримано вираз

$$\langle \langle S_A^+ | S_A^- \rangle \rangle_{q, \omega} = \frac{\hbar}{2\pi} \langle \sigma_A^z \rangle P_q^A \left[ (\hbar^2 \omega^2 - E_A^2)(\hbar^2 \omega^2 - E_B^2) - 2M_q \hbar^2 \omega^2 - 2N_q E_A E_B + M_q^2 \right]^{-1}, \quad (10)$$

де чисельник функції Гріна

$$P_q^A(\hbar\omega) = [E_A (\cos^2 \vartheta_A + 1) + 2\hbar\omega \cos \vartheta_A] \times (\hbar^2 \omega^2 - E_B^2) - 2\hbar\omega M_q \cos \vartheta_A + \tilde{\Phi}_q^A E_B \quad (11)$$

і введено такі позначення:

$$M_q = \Phi_q \cos \vartheta_A \cos \vartheta_B, \quad N_q = \frac{1}{2} \Phi_q (1 + \cos^2 \vartheta_A \cos^2 \vartheta_B), \quad (12)$$

$$\tilde{\Phi}_q^A = \Phi_q \cos^2 \vartheta_A (1 + \cos^2 \vartheta_B),$$

$$\Phi_q = \langle \sigma_A^z \rangle \langle \sigma_B^z \rangle J^2(q);$$

тут

$$J(\mathbf{q}) = t \left[ e^{iq_y a} + 2e^{-iq_y a} \cos \left( q_x \frac{\sqrt{3}a}{2} \right) \right], \quad (13)$$

$$J(0) = 3t$$

( $a$  – відстань між найближчими сусідами у гексагональній ґратці).

Спектр збуджень бозонів у SF фазі складається з чотирьох попарно симетричних гілок:

$$\varepsilon_{1,2}^{(\text{SF})}(\mathbf{q}) = \pm (P_q + Q_q)^{1/2}, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{3,4}^{(\text{SF})}(\mathbf{q}) = \pm (P_q - Q_q)^{1/2},$$

де

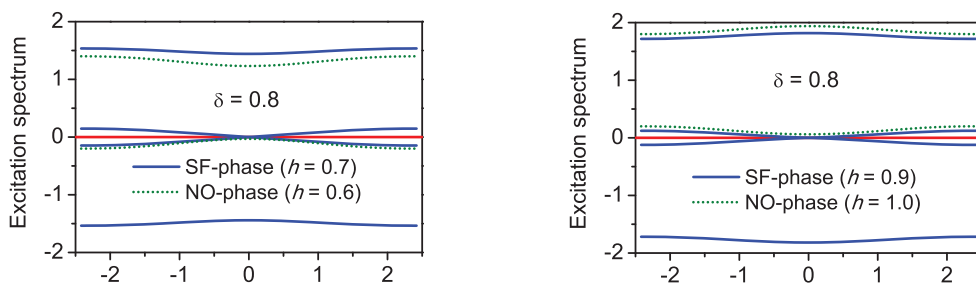
$$P_q = \frac{1}{2} (E_A^2 + E_B^2) + M_q,$$

$$Q_q = \left[ \frac{1}{4} (E_A^2 - E_B^2)^2 + 2N_q E_A E_B + M_q (E_A^2 + E_B^2) \right]^{1/2}. \quad (15)$$

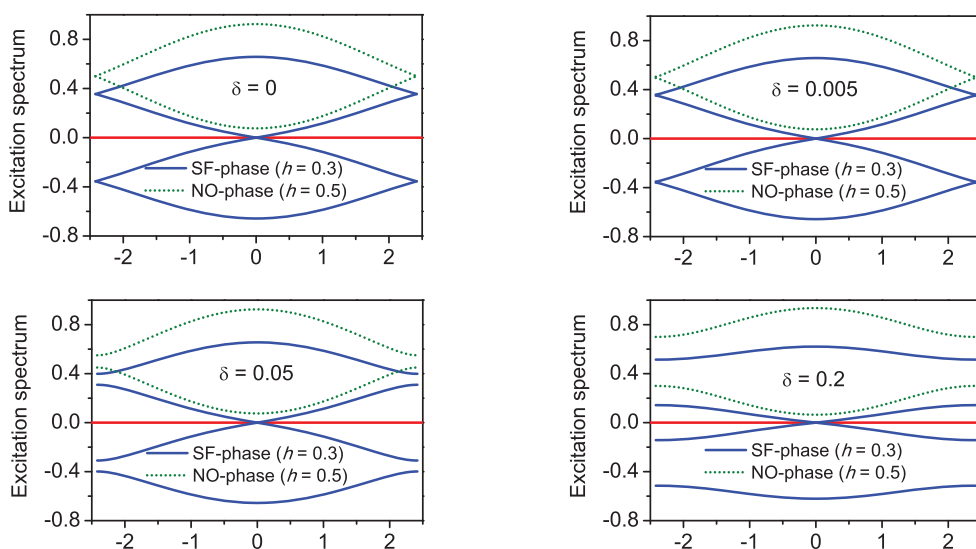
У порівнянні з нормальною фазою, де згідно з [14]:

$$\varepsilon_{1,2}(\mathbf{q}) = h \pm \sqrt{\delta^2 + \langle \sigma_A^z \rangle \langle \sigma_B^z \rangle |J(\mathbf{q})|^2}, \quad (16)$$

кількість гілок у спектрі у даному випадку є двічі більшою. Подвоєння типу дзеркального відбиття відносно рівня хімічного потенціалу настає в момент фазового переходу, коли при зміні параметрів моделі ( $\mu$ ,  $\delta$ , чи  $T$ ) край однієї з підзон (16) доторкається до рівня  $\mu$ . Така ситуація проілюстрована на рис. 2 і рис. 3 для випадків, коли спочатку (у NO фазі) хімпотенціал перебуває між підзонами або під ними. У другому з них, коли відсутня щілина у спектрі NO фази (тобто при  $\delta = 0$ ), на



**Рис. 2.** Форма гілок спектра та їх відповідність між NO фазою (штриховані лінії) і SF фазою (суцільні лінії) для випадків, коли хімпотенціал перебуває між зонами у NO фазі (зліва;  $h = 0,6$  у NO фазі й  $h = 0,7$  у SF фазі) та під ними (справа;  $h = 0,9$  у SF фазі й  $h = 1,0$  у NO фазі). Значення інших параметрів:  $\delta = 0,8$ ,  $\Theta = 0,05$ . Тут і на наступних рисунках відлік енергії ведеться від рівня хімічного потенціалу і вимірюється в одиницях  $J(0)$



**Рис. 3.** Поява точок Дірака при  $\delta = 0$ , розходження гілок на краях зони Бріллюена при зростанні  $\delta$  та зміна поведінки гілок у центрі зони Бріллюена при переході NO  $\rightarrow$  SF ( $h = 0,3$  у SF фазі й  $h = 0,5$  у NO фазі;  $\Theta = 0,2$ )

краю зони Бріллюена існують діраківські точки з лінійним законом дисперсії. Вони є аналогом таких точок в електронному зонному спектрі графену (див., наприклад, [15]). Кількість діраківських точок подвоюється після переходу до SF фазі. Нові точки цього типу з'являються в області від'ємних енергій, якщо у NO фазі бозонна зона розташована над рівнем хімічного потенціалу, або в області додатних енергій при її розташуванні під рівнем  $\mu$  (див. рис. 3).

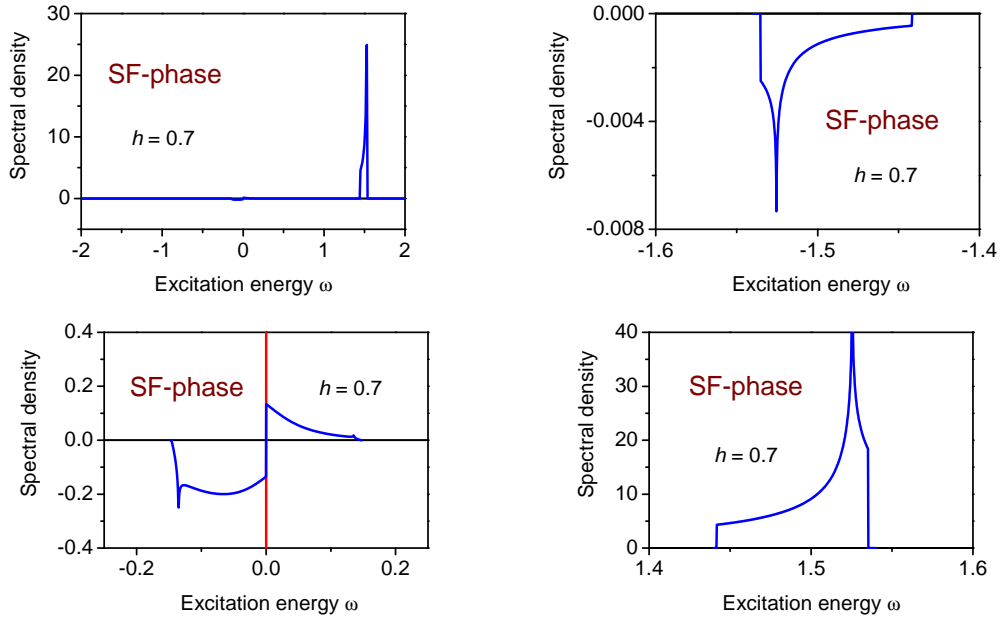
Зазначимо, що коли хімпотенціал  $\mu$  є між підзонами (для цього потрібно, щоб  $\delta \neq 0$ ), спектр перебудовується і діраківські точки зникають. Ситуація, коли хімпотенціал є в безпосередньому околі діраківських точок або на них накладається, у

випадку жорстких бозонів не реалізується (за винятком областей поблизу критичних точок, які на фазовій діаграмі на рис. 1 є точками максимумів кривих рівноваги фаз).

У SF фазі дві центральні підзони завжди доторкаються в точці  $\mathbf{q} = 0$  на рівні хімічного потенціалу. В цьому околі їх закон дисперсії лінійний, і в такому сенсі вони відповідають збудженням бозголюбівського типу у взаємодіючому бозе-газі, які існують за наявності бозе-конденсату [16].

### 3. Спектральна густина $\rho_\alpha(\omega)$ у SF фазі

Функцію спектральної густини для одночастинкових бозонних збуджень, розраховану на один вузол



**Рис. 4.** Структура спектральної густини  $\rho_A(\omega)$  в SF фазі: загальний вигляд (вгорі зліва) та збільшені зображення для трьох діапазонів значень енергії збуджень  $\hbar\omega$ , де спектральна густина відмінна від нуля (вгорі справа та внизу; вага різних підзон відрізняється на порядки). Залежності отримано при таких значеннях параметрів:  $J(0) = 1$ ,  $\delta = 0,8$ ,  $h = 0,7$ ,  $\Theta = 0,05$

ґратки, ми тут означимо як

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(\omega) &= -\frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}} \text{Im} \langle \langle b_\alpha | b_\alpha^+ \rangle \rangle_{\mathbf{q}, \omega + i\epsilon} = \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}} \text{Im} \langle \langle S_\alpha^+ | S_\alpha^- \rangle \rangle_{\mathbf{q}, \omega + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (17)$$

Виходячи з формули (10) та застосовуючи розклад на прості дроби, можна записати функцію  $\rho_\alpha(\omega)$  таким чином:

$$\rho_\alpha(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \langle \sigma_\alpha^z \rangle \sum_{i=1}^4 A_i^\alpha(\mathbf{q}) \delta\left(\omega - \frac{\varepsilon_i(\mathbf{q})}{\hbar}\right), \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} A_{1,2}^\alpha(\mathbf{q}) &= \frac{P_q^\alpha(\hbar\omega = \varepsilon_{1,2}(\mathbf{q}))}{4Q_q \varepsilon_{1,2}(\mathbf{q})}, \\ A_{3,4}^\alpha(\mathbf{q}) &= -\frac{P_q^\alpha(\hbar\omega = \varepsilon_{3,4}(\mathbf{q}))}{4Q_q \varepsilon_{3,4}(\mathbf{q})}. \end{aligned} \quad (19)$$

Обчислення суми за хвильовим вектором здійснюємо згідно з процедурою

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \Phi(|J(\mathbf{q})|^2) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \Phi(t^2 |\gamma_{\mathbf{q}}|^2) =$$

$$= \int dx \rho_0(x) \Phi(t^2 x), \quad (20)$$

де

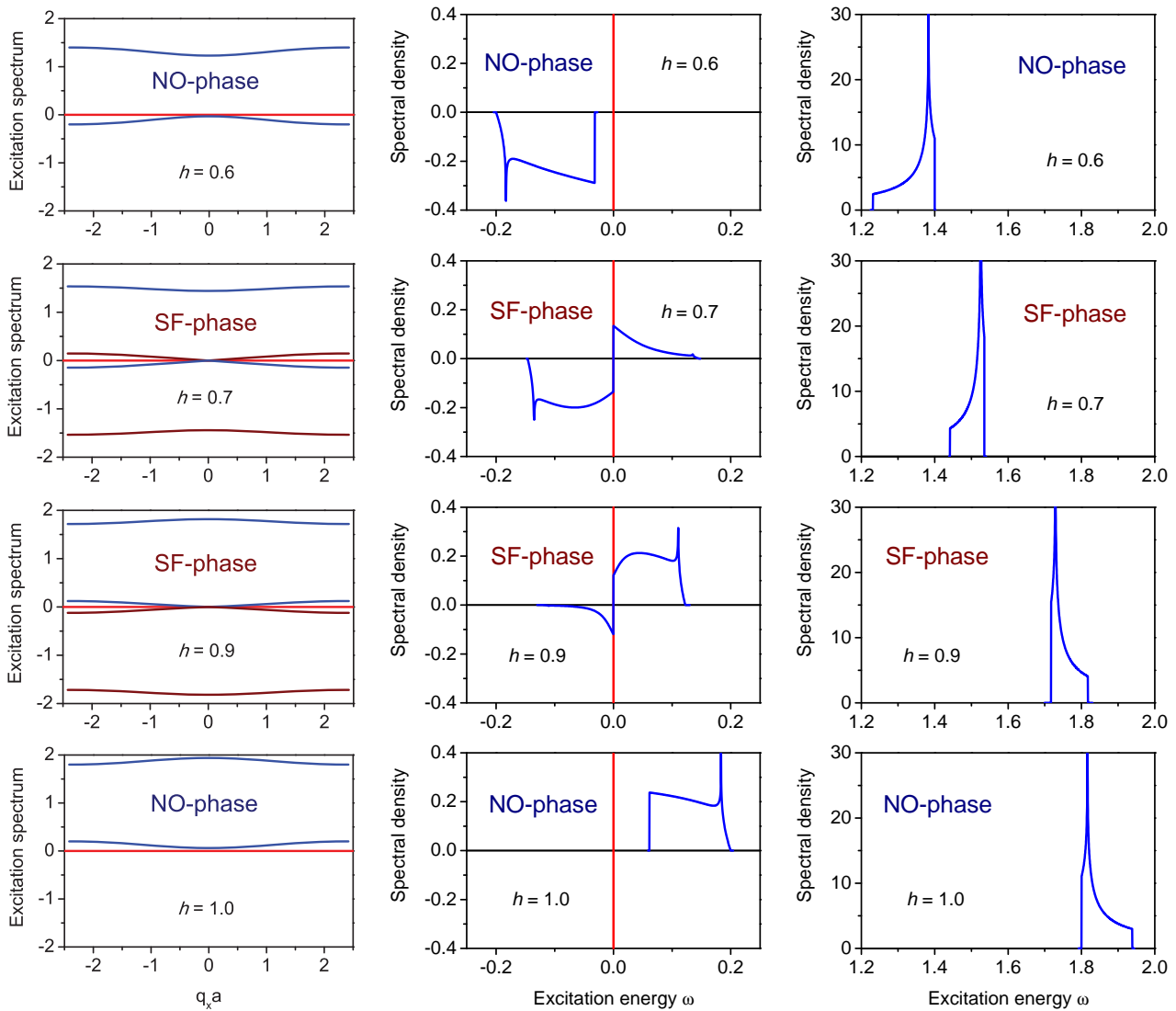
$$\begin{aligned} |\gamma_{\mathbf{q}}|^2 &= 1 + 4 \cos\left(q_x \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cos\left(q_y \frac{3}{2}a\right) + \\ &+ 4 \cos^2\left(q_x \frac{q\sqrt{3}}{2}\right), \end{aligned}$$

а  $\rho_0(x) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \delta(x - |\gamma_{\mathbf{q}}|^2)$  – допоміжна функція, що характеризує розподіл за квадратом енергії і пов'язана з зонною густиною станів  $g(\mathcal{E})$  для ґратки графену таким співвідношенням:

$$\rho_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(\sqrt{x}). \quad (21)$$

Функція  $g(\mathcal{E})$  має вигляд

$$\begin{aligned} g(\mathcal{E}) &= \frac{2}{\pi^2} \frac{|\mathcal{E}|}{\sqrt{Z_0}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{Z_1}{Z_0}}\right), \\ Z_0 &= \begin{cases} (1 + |\mathcal{E}|)^2 - \frac{1}{4} (|\mathcal{E}|^2 - 1)^2, & |\mathcal{E}| \leq 1, \\ 4|\mathcal{E}|, & 1 \leq |\mathcal{E}| \leq 3, \end{cases} \\ Z_1 &= \begin{cases} 4|\mathcal{E}|, & |\mathcal{E}| \leq 1, \\ (1 + |\mathcal{E}|)^2 - \frac{1}{4} (|\mathcal{E}|^2 - 1)^2, & 1 \leq |\mathcal{E}| \leq 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$



**Рис. 5.** Спектр (лівий стовпчик) і спектральна густина  $\rho_A(\omega)$  (центральний та правий стовпчики) в NO і SF фазах при зміні енергії  $h$ . Інші параметри зафіксовано з такими значеннями:  $J(0) = 1$ ,  $\delta = 0,8$ ,  $\Theta = 0,05$ . Графіки  $\rho_A(\omega)$  для найнижчої гілки у SF фазі не подано

де  $F(\pi/2, y)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду (див. [17, 18]).

Для  $\delta$ -функції у формулі (18) використовуємо представлення

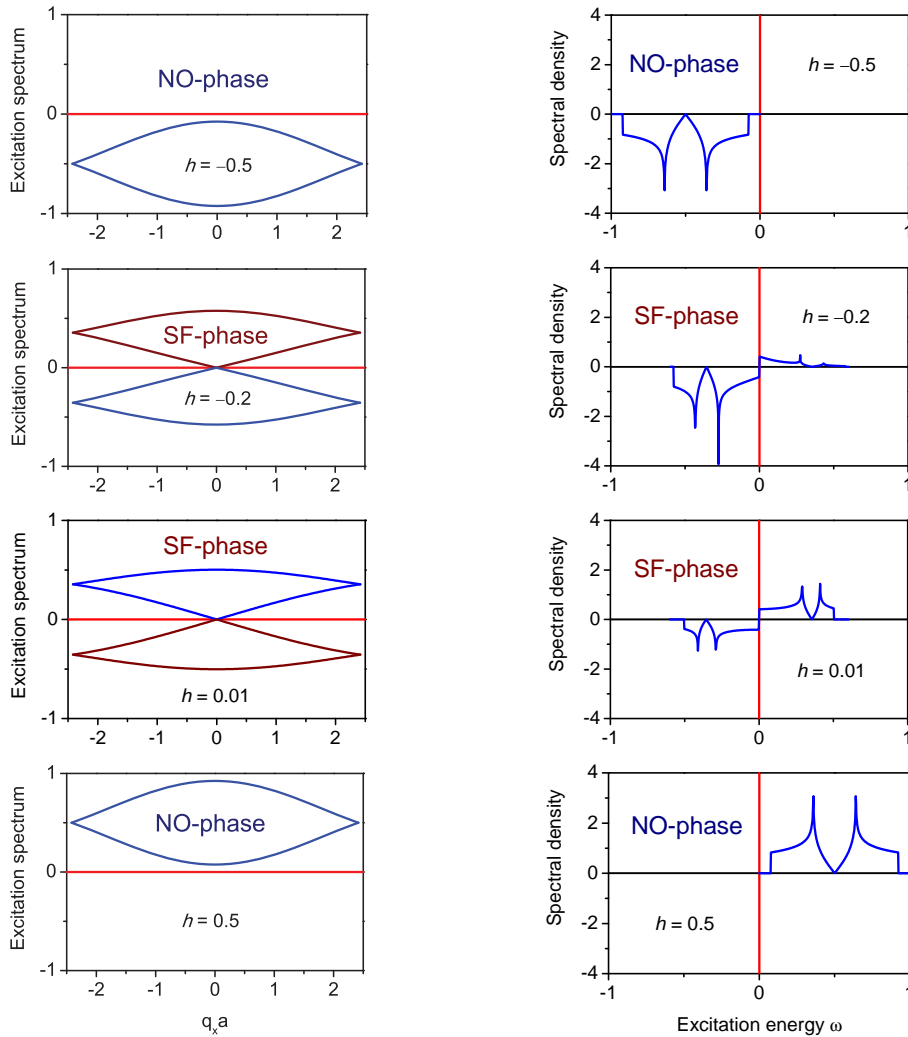
$$\delta\left(\omega - \frac{\varepsilon_i(x)}{\hbar}\right) = \delta(x - \tilde{x}_i) 2\hbar |\varepsilon_i| \left| b + \frac{d}{2(\hbar^2 \omega^2 - a - b\tilde{x}_i)} \right|^{-1}, \quad (23)$$

де  $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(q) \Big|_{|\gamma_q|^2 \rightarrow x}$ ,  $\tilde{x}_i$  – корінь рівняння  $\hbar\omega = \varepsilon_i(x)$ . Запроваджено також позначення

$$a = \frac{E_A^2 + E_B^2}{2},$$

$$b = \langle \sigma_A^z \rangle \langle \sigma_B^z \rangle \cos \vartheta_A \cos \vartheta_B t^2 \equiv m \cos \vartheta_A \cos \vartheta_B, \quad (24)$$

$$d = m (E_A + E_B \cos \vartheta_A \cos \vartheta_B) \times (E_B + E_A \cos \vartheta_A \cos \vartheta_B).$$



**Рис. 6.** Спектр (лівий стовпчик) і спектральна густина  $\rho_A(\omega)$  (правий стовпчик) в NO і SF фазах для  $\delta = 0$  при зміні енергії  $h$ . Інші параметри зафіксовано з такими значеннями:  $J(0) = 1$ ,  $\Theta = 0,2$

В результаті для спектральної густини  $\rho_A(\hbar\omega) = \rho_A(\omega)/\hbar$ , що характеризує розподіл за енергією, отримуємо

$$\rho_A(\hbar\omega) = \sum_{i=1}^4 \rho_0(\tilde{x}_i) \langle \sigma_A^z \rangle \times \frac{k + l\tilde{x}_i}{|2b(\hbar^2\omega^2 - a - b\tilde{x}_i) + d|} (-1)^{i-1}, \quad (25)$$

$$k = [E_A(\cos^2 \vartheta_A + 1) + 2\hbar\omega \cos \vartheta_A](\hbar^2\omega^2 - E_B^2), \quad (26)$$

$$l = m \cos^2 \vartheta_A [(1 + \cos^2 \vartheta_B)E_B - 2\hbar\omega \cos \vartheta_B].$$

Вираз для  $\rho_B(\hbar\omega)$  отримуємо з наведеного заміною індексів  $A \rightleftharpoons B$ .

З використанням формули (25) проведено числові розрахунки і отримано криві  $\rho_A(\hbar\omega)$ , які описують частотну залежність спектральної густини для підґратки  $A$ . На рис. 4–6 проілюстровано отримані результати для різних значень параметрів  $h$ ,  $\delta$  і температури (як і раніше, енергетичні величини подано в одиницях  $J(0)$ ).

Спільною рисою отриманих графіків є зміна знака функції  $\rho_A(\omega)$  при проходженні через точку  $\omega = 0$ . При  $\omega < 0$  (нижче рівня хімічного потенціалу) спектральна густина від'ємна, а при

$\omega > 0$  (вище рівня  $\mu$ ) – додатна. Додаткові підзони, що виникають у SF фазі, мають спочатку набагато меншу вагу і їх спектральна густина може відрізнятися навіть на кілька порядків від значень  $\rho_A$  для підзон, що існують у NO фазі (див. рис. 4). При заглибленні хімпотенціалу у підзону, в якій він перебуває (цьому відповідає зміна параметра  $h$  рис. 5), відбувається перерозподіл інтенсивності додатної і від’ємної гілок функції  $\rho_A$ . Криві дисперсії  $\varepsilon_i(\mathbf{q})$  зазнають при цьому незначних змін.

На рис. 6 показано перебудову спектральної густини  $\rho_A(\hbar\omega)$  при переміщенні хімічного потенціалу в межах зони у випадку  $\delta = 0$ . Зона тут є нерозщепленою (щільна відсутня) і в спектрі існують діраківські точки. У SF фазі в порівнянні з нормальною їх кількість подвоюється. На спектральній густині  $\rho_A$  це проявляється у появі додаткових проміжних точок, де  $\rho_A(\hbar\omega)$  дорівнює нулеві (в околі цих точок її залежність від частоти апроксимується лінійною функцією).

#### 4. Висновки

Проведені розрахунки законів дисперсії  $\varepsilon_i(\mathbf{q})$  і спектральних густин  $\rho_\alpha(\hbar\omega)$  виявили основні особливості структури зонного спектра жорстких бозонів у двовимірній ґратці типу графену. Описано зміни у їх спектральних характеристиках при переході від NO до SF фази. Показано, що вигляд функцій  $\rho_\alpha(\hbar\omega)$  ( $\alpha = A, B$ ) набагато чутливіший до значень енергетичних параметрів системи, у тому числі до розташування хімічного потенціалу бозонів, аніж закони дисперсії  $\varepsilon_i(\mathbf{q})$  у бозонних зонах. З цієї причини функції  $\rho_\alpha(\hbar\omega)$  можна вважати основними характеристиками зонного спектра. Сам лише вигляд залежностей  $\varepsilon_i(\mathbf{q})$  не дає його вичерпної картини.

Встановлено, що у випадку ґратки з енергетично еквівалентними підґратками (при  $\delta = 0$ ) діраківські точки у спектрі зберігаються при переході до SF фази, а їх кількість подвоюється. Хімічний потенціал бозонів залишається в загальному випадку поза околом діраківських точок і не може на них накладатися.

Отримані результати можуть скласти основу подальшого дослідження термодинамічних властивостей системи бозе-частинок у гексагональній ґратці із структурою типу графену.

1. I.V. Stasyuk, I.P. Дулепа, O.B. Величко, УФЖ **59**, 889 (2014).
2. M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, and I. Bloch, Nature **415**, 39 (2002).
3. M. Greiner, O. Mandel, T.W. Hänsch, and I. Bloch, Nature **419**, 51 (2002).
4. P. Soltan-Panahi, J. Struck, A. Bick, W. Plenkers, G. Meineke, C. Becker, P. Windpassinger, K. Sengstock, P. Hauke, and M. Lewenstein, Nature Physics **7**, 434 (2011).
5. D.-S. Lühmann, Phys. Rev. A **87**, 043619 (2013).
6. Q.-Q. Lu and J.-M. Hou, Commun. Theor. Phys. **53**, 861 (2010).
7. P. Soltan-Panahi, D.-S. Lühmann, J. Struck, P. Windpassinger, and K. Sengstock, Nature Physics **8**, 71 (2012).
8. E. Albus, X. Fernandez-Gonzalvo, J. Mur-Petit, J.J. Garcia-Ripoli, and J.K. Pachos, Ann. Phys. **328**, 64 (2013).
9. M.P.A. Fisher, P.B. Weichman, G. Grinstein, and D.S. Fisher, Phys. Rev. B **40**, 546 (1989).
10. D. Jaksch, C. Bruder, J.I. Cirac, C.W. Gardiner, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **81**, 3108 (1998).
11. Z. Chen and B. Wu, Phys. Rev. Lett. **107**, 065301 (2011).
12. S. Koghee, L.-K. Lim, M.O. Goerbig, and C. Morais-Smith, Phys. Rev. A **85**, 023637 (2012).
13. R.T. Whitlock and P.R. Zilsel, Phys. Rev. **131**, 2409 (1963).
14. I.V. Stasyuk and O. Vorobyov, Condens. Matter Phys. **16**, 23005 (2013).
15. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
16. Н.Н. Боголюбов, Изв. АН СССР (сер. физ.), **11**, 77 (1947).
17. H.V. Rosenstock, J. Chem. Phys. **16**, 2064 (1953).
18. J.P. Hobson and W.A. Nierenberg, Phys. Rev. **89**, 662 (1953).

Одержано 10.06.14

*И.В. Стасюк, О.В. Величко, И.Р. Дулепа*

ИССЛЕДОВАНИЕ БОЗОННОГО СПЕКТРА ДВУМЕРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ РЕШЕТОК СО СТРУКТУРОЙ ТИПА ГРАФЕНА. СВЕРХТЕКУЧАЯ ФАЗА

Резюме

Исследован энергетический спектр системы бозе-атомов в сверхтекучей фазе в оптических решетках типа графена. Расчет законов дисперсии в зонах и одночастичных спектральных плотностей проведен в приближении хаотических фаз с использованием формализма жестких бозонов. Описаны их изменения при переходе от нормальной к сверхтекучей фазе. Во время такой перестройки число подзон возрастает вдвое. В случае энергетической эквивалентности подрешеток дираковские точки в спектре сохраняются, а их количество удваивается. При энергетическом отличии между подрешетками точки Дирака отсутствуют. Показа-



но, что форма спектральных плотностей чувствительна к изменению температуры и расположению химического потенциала.

*I.V. Stasyuk, O.V. Velychko, I.P. Dulepa*

INVESTIGATION OF THE BOSONIC  
SPECTRUM OF TWO-DIMENSIONAL OPTICAL  
GRAPHENE-TYPE LATTICES. SUPERFLUID PHASE

S u m m a r y

The energy spectrum of a system of Bose atoms in the superfluid phase in an optical lattice of the graphene type has been

studied. The dispersion laws for the energy bands and the single particle spectral densities are calculated in the random phase approximation and in the framework of the hard-core boson formalism, and their changes at the transition from the normal phase to the superfluid one are described. As a result of this transformation, the number of subbands doubles. In the case of the subband energetic equivalence, the Dirac points in the spectrum survive, and their number becomes twice as much. When the subbands are energetically nonequivalent, the Dirac points are absent. The shape of spectral densities is shown to be sensitive to the changes in the temperature and the chemical potential position.