

О.І. ВОЙТЕНКО¹, О.М. ГАБОВИЧ²

Інститут фізики НАН України

(Просп. Науки, 46, Київ 03028;

¹ email: alexander.i.voitenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0239-7027;

² email: alexander.gabovich@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1679-5472)

ВПЛИВ ПОЛЯРИЗАЦІЇ МЕЖІ ПОДІЛУ НА ВЗАЄМОДІЮ ЗАРЯДІВ У ДВОШАРОВИХ СИСТЕМАХ

УДК 539

Проаналізовано вплив плоскої межі поділу між двома напівнескінченими діелектрично різними ізоляторами на взаємодію між двома точковими зарядами, розташованими поблизу неї. Показано, що їхня взаємодія суттєво змінюється поляризаційними зарядами, індукованими на межі поділу. Зокрема, якщо заряди розташовані в одному й тому ж середовищі, то залежність енергії їхньої взаємодії W від відстані D між зарядами відрізняється від кулонівської. Водночас якщо заряди розташовані в різних середовищах, закон взаємодії залишається кулонівським, але з ефективним значенням діелектричної сталості. Відхилення від кулонівської взаємодії були розраховані кількісно й досліджені аналітично. Представлено карти $W(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p)$, що описують профілі W в залежності від координат зарядів $\mathbf{R}_s$ і $\mathbf{R}_p$. Отримано апроксимації $W(D)$ і проаналізовано їхню обґрунтованість. Зроблено висновок, що в шаруватих структурах поправки на поляризацію завжди слід враховувати під час вивчення різних властивостей заряджених об'єктів, наприклад, електронів і дірок, що утворюють екситони Ваньє–Мотта.

Ключові слова: двошарові структури, діелектрична невідповідність, взаємодія зарядів, поляризаційні сили, некулонівська залежність.

1. Вступ. Історичний екскурс

Відкриття закону обернено-квадратичної залежності електростатичної сили між двома ізольованими точковими зарядами – умовно назовемо їх джерелом Q_s і зондом Q_p – є досить драматичним з історичної точки зору. У вакуумі цей закон має вигляд (в одиницях CGS)

$$\mathbf{F}_C = Q_s Q_p \frac{\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|^3}, \quad (1)$$

Цитування: Войтенко О.І., Габович О.М. Вплив поляризації межі поділу на взаємодію зарядів у двошарових системах. *Укр. фіз. журн.* **71**, №10, 798 (2026).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2026. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

де $\mathbf{R}_i$ ($i = s, p$) позначають координати зарядів. Справа в тому, що формальним першовідкривачем закону (1) десь між 1771 і 1781 роками був Генрі Кавендіш. Його вимірювання показали, що [1, р. 231] “... електричне притягання та відштовхування повинні бути обернено пропорційні квадрату відстані, і що коли кулька позитивно електризована, надлишкова рідина в ній повністю осідає на її поверхні”. Це не було несподіваним для Кавендіша, оскільки саме він досліджував та експериментально підтвердив закон всесвітнього тяжіння Айзека Ньютона в земних умовах, який демонструє таку ж просторову залежність, що й вираз (1). Увесь комплекс електростатичних проблем ретельно досліджувався Кавендішем (див. також посилання [2]). Наприклад, він першим запровадив поняття ступеня електризації (пізніше назва-

ного діелектричною проникністю) та ємності [1, 3]. На жаль, на відміну від інших електричних досліджень, Кавендіш не опублікував відкритий ним закон (1), а отже (і це справедливо!) він не вважається його автором. Натомість Шарль-Огюстен де Кулон, який відкрив закон (1) пізніше, ніж Кавендіш, оприлюднив результати вимірювань та їх аналіз [4, 5], хоча цей аналіз був менш ґрунтовним, ніж аналіз Кавендіша. Тому цілком природно, що саме Кулона називають батьком закону електростатичної взаємодії, який більше двохсот років носить його ім'я.

З рівняння (1) випливає, що енергія взаємодії двох зарядів у вакуумі дорівнює

$$W_C = \frac{Q_s Q_p}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|}. \quad (2)$$

Слід підкреслити, що встановлення законів (1) і (2) було великим успіхом, оскільки до ХХ століття вчені не могли виокремити елементарні заряджені частинки [6]. Вони навіть не мали уявлення про їх існування! Натомість експериментатори спостерігали поведінку заряджених *макроскопічних тіл*; тому припущення про корпускулярну природу електрики [7–11] було сміливою гіпотезою, правильною та плідною на теоретичному рівні, але безпосередньо експериментально не обґрунтованою на той час. Проте, припущення закону обернених квадратів в електростатиці було стимульоване подібністю до закону гравітації Ньютона [12–14] (див. також підручник [15]), який застосовувався надзвичайно успішно в небесній механіці з моменту його відкриття [16]. Аналогія між гравітаційним притяганням, з одного боку, та електростатичним відштовхуванням або притяганням, з іншого боку, уможливила узагальнення рівняння (2) на системи багатьох точкових зарядів (в електростатиці, тоді як у випадку гравітації закон можна сформулювати аналогічно) [17–20], так що їхня повна потенціальна енергія описується таким рівнянням (його вперше написав Сімон Дені Пуассон [21, 22] у межах теорії ньютонівської гравітації):

$$\Delta \Phi = -4\pi\rho, \quad (3)$$

де ρ – об'ємна густина заряду, а Δ – оператор Лапласа. Слід зазначити, що сучасне розуміння величини Φ у рівнянні (3) як “потенціальної функції” належить Джорджу Гріну (1828) [23], тоді як Карл

Фрідріх Гаусс у 1839 році незалежно запропонував подібну інтерпретацію та назвав Φ “потенціалом” [24].

Після його формулювання, рівняння Пуассона (3) можна вважати загальним електростатичним рівнянням, що описує не лише вплив алгебраїчної суми окремих зарядів, але й дію довільної конфігурації зовнішніх полів будь-якого походження [19, 20]. Отже, концепція електричного поля неявно відображала короткодієвий характер посередництва електричних сил між тілами в просторі (що найбільш чітко проявляється в конденсованій матерії). Цю концепцію запропонував Майкл Фарадей [8, 9, 11, 25, 26] (див. також аналіз у посиланнях [27–30]).

Фарадєївська “опосередкована дія” через складові конденсованого середовища [8, 9] (атоми або молекули, як було чітко встановлено на початку двадцятого століття [31]) неминуче зумовила модифікацію як законів Кулона (1) та (2), так і рівняння Пуассона (3) шляхом введення діелектричної проникності ϵ (названої Фарадеем “питомою індуктивною здатністю” [3, 32]). У результаті маємо

$$W_D = \frac{Q_s Q_p}{\epsilon |\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|} \quad (4)$$

замість рівняння (2). Це означає, що будь-яку фактичну електростатичну взаємодію в середовищі, відмінному від вакууму, слід розглядати як задачу багатьох частинок [33, 34]. Навіть зараз цей аспект зазвичай не підкреслюється в підручниках. Більше того, таким чином електростатика постає як наближення до фактичного “поширення” електричної сили в середовищі. Таку картину поступово визнали сам Фарадей і особливо Вільям Томсон (лорд Кельвін з 1892 року); останній наслідував Гріна, який встановив зв'язки між електростатичними властивостями об'єму та поверхні [23]. Томсон включив міркування Фарадея в математичну теорію електростатики [35]. Пізніше ці погляди й відповідні рівняння були розвинуті в теорію електромагнітного поля Джеймсом Клерком Максвеллом [36, 37], який наголошував [37, р. 321]: “...ми можемо розглядати концепцію Фарадея про напружений стан в електромагнітному полі як метод пояснення дії на відстані за допомогою безперервної передачі сили, навіть якщо ми не знаємо, як виникає цей напружений стан”.

Дивовижна історія розвитку електростатики була детально вивчена і описана в інших джерелах [3, 30, 38–44]. Але вона не закінчена, і цю роботу варто вважати внеском у цю галузь.

Проте врахування реакції середовища на наявність зарядів – зокрема, виникнення екранувального поляризаційного заряду – призводить до “некулоновості” (sic!) кулонівської взаємодії між зарядами. Пояснимо цей “парадокс” на простому прикладі двох точкових зарядів, Q_{s1} та Q_{s2} ; останній гратиме роль поляризаційного заряду. У вакуумі заряд-зонд Q_p взаємодіятиме з вказаними зарядами за формулою, відмінною від виразу (1):

$$\mathbf{F}_C = Q_{s1}Q_p \frac{\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_{s1}}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_{s1}|^3} + Q_{s2}Q_p \frac{\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_{s2}}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_{s2}|^3}. \quad (5)$$

Жодними перетвореннями цю комбінацію не вдасться звести до одночленної формули типу (1). І результат її інтегрування також відрізнятиметься від виразу (2). До того ж виникає питання: звідки потрібно вимірювати відстань до заряду-зонда? Додатковим чинником є те, що якщо всі три заряди розташовуються не вздовж однієї прямої, то напрямки сили, з якою заряди-джерела діятимуть на заряд-зонд, відрізнятимуться від обох напрямків від зонда до джерел. Нижче саме неможливість подати енергію заряду-зонда у вигляді одночленного виразу (2) або (4) з показником ступеня -1 називатимемо “некулоновістю” закону взаємодії.

Отже, не дивно, що некулонівська поведінка взаємодії між зарядами загалом має бути повсюдною, тоді як вирази (1) і (2) – причому останній, поділений на діелектричну проникність ε (формула (4)) – є в кращому разі першими (можливо, провідними) членами нескінченного ряду, що описує електростатичні взаємодії в складній системі зарядів [45, 46]. Наголосимо, що обговорюване нижче наближення діелектричної проникності $\varepsilon = \text{const}$ для статичного екранування в напівпровідниках та ізоляторах було великим проривом у дев’ятнадцятому столітті, тоді як зараз просторова дисперсія діелектричної проникності [47–51] має враховуватися для опису пом’якшувального впливу середовища на електричне поле, скажімо, заряджених домішок, електроноподібних і діркових квазічастинок, а також дипольних молекул або екситонів. Ці надзвичайно важливі питання добре задоку-

ментовано в літературі, хоча вони не мають вирішального значення для цього дослідження, в якому класичного наближення діелектричної проникності ($\varepsilon = \text{const}$) достатньо для вивчення поставлених питань. Конкретніше, тут ми хочемо розглянути статичні сили зображення у двошарових структурах [20, 52–56] та їхню роль у відхиленнях від закону Кулона.

Метод сил зображення та зарядів зображення (фіктивних, які замінюють фактичні поляризаційні заряди, що виникають) був винайдений Томсоном [57, 58] для провідників (ідеальних металів) і згодом узагальнений на діелектрики [51, 59–63]. Вплив зарядів зображення на взаємодію заряд-заряд, заряд-диполь і диполь-диполь у шаруватих системах з чітко визначеними межами поділу був широко вивчений і зараз є рутинним методом (див., наприклад, роботи [63–70]).

Слід зазначити, що сама електростатика, будучи класичною макроскопічною теорією, не може забезпечити стабільності конфігурацій, що містять заряди (мультиполі), що вперше було продемонстровано преподобним Семюелем Ерншоу в 1842 році [71]. Це питання та пов’язані з ним проблеми продовжують вивчатися досі [72–77]. З іншого боку, спостережувана стабільність матерії є наслідком квантово-механічних ефектів [78, 79].

До того ж об’ємні власні енергії зарядів у конденсованій речовині (“внутрішній потенціал”) стають скінченними [66, 80–86], оскільки електростатичне екранування усуває розбіжності в рівняннях (1) і (2). Те саме стосується енергій сил зображення [80, 83, 87–89], які розходяться в рамках теорії, викладеної у підручниках з електростатики [20, 52–56].

Таким чином, багаточастинковий характер справжніх електростатичних сил робить їх суттєво слабшими за класичні кулонівські. Це означає, що основні двочастинкові закони (1) і (2) справедливі лише на мікроскопічному рівні, наприклад, у фізиці атома водню, де середня відстань між ядром та електроном дорівнює радіусу Бора, тому макроскопічний підхід не застосовується, і будь-яке екранування сусідніми атомами відсутнє на цьому масштабі. Різниця між теоретичними результатами моделі Нільса Бора та експериментальними енергетичними рівнями досить добре пояснюється на основі релятивістського квантово-механічного рівняння Поля Дірака [90]. Водночас

існують також незначні квантово-польові поправки, які спричиняють, зокрема, зсув Вілліса Лемба [91] між рівнями, що вироджуються в граничному випадку Дірака. Цей ефект зумовлений впливом віртуальних електрон-позитронних пар, що флуктують в електромагнітному вакуумі [90, 92, 93], і може розглядатися як багаточастинковий ефект вищого порядку, ніж розглянуті вище електростатичні ефекти.

Взаємодія пробного заряду з поверхневими зарядами в рамках електростатики Гріна [23], яка перетворилася на взаємодію з дзеркальними зображеннями-привидами в підході Томсона [35, 94], може зазнати подальшого втілення у зміщенні нульової енергії коливань поверхневих плазмонів [95–97]. На перший погляд, здається, що це лише зміна інтерпретації, але це не так. Опис, заснований на поверхневих плазмонах, виявився досить плідним. Дійсно, вплив реальних поверхневих плазмонів, збуджених рухомими пробними зарядами, може призвести до спостережуваних динамічних ефектів [53, 98–103].

Зі сказаного вище зрозуміло, що сили зображення та їх вплив на просторову залежність кулонівської взаємодії між зарядами є величезною галуззю досліджень. Водночас мета цієї статті подвійна. По-перше, ми хочемо чітко показати, як поляризаційні заряди на межі поділу (для спрощення ми обмежуємося планарним випадком, пам'ятаючи, що сферична й циліндрична геометрії не менш практично важливі [104–108]) спотворюють кулонівську взаємодію між зарядженими точковими об'єктами. І, справді, наші результати демонструють, що модифікації об'ємних залежностей з підручника є досить значними.

Ще однією метою є оцінка двох методів апроксимації, в яких взаємодія між двома точковими зарядами, розташованими в найпростішій неоднорідній системі – двох напівбезкінечних класичних (бездисперсних) діелектриках, розділених плоскою межею поділу – описується одночленними формулами, що залежать від параметрів системи. Зокрема, показано, що взаємодія між зарядами поблизу обов'язково поляризованої межі поділу істотно відрізняється від кулонівської поведінки (4). Цей факт раніше не враховувався і часто не враховується належним чином у деяких підручниках та фахових дослідженнях (див., наприклад, [109, 110]). У рамках нашого розгля-

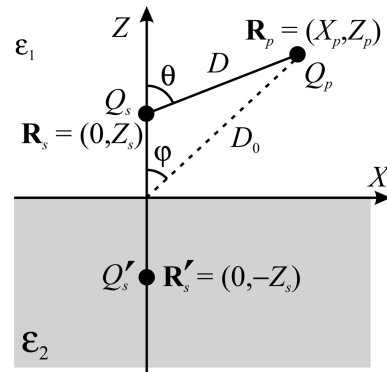


Рис. 1. Двошарова система з взаємодіючим зарядом джерела Q_s та зарядом зонда Q_p . ϵ_1 та ϵ_2 – діелектричні константи шарів (див. подальші пояснення в тексті)

ду всі розрахунки стають прозорими й простими, і їх можна узагальнити на диполі [61, 62, 111] та електростатичні мультиполі вищого порядку [112]. Такий підхід відповідає основним принципам оригінального підходу заряду-зображення в електростатиці.

План статті такий. У розділі 2 представлено та обговорено основні електростатичні формули для двошарових діелектричних структур. Деякі загальні зауваження щодо процедури розрахунку й представлення його результатів наведено в розділі 3. У розділах 4, 5 і 6 обчислюються та відображаються двокоординатні карти для електростатичної енергії W , нормованої енергії w та ефективної діелектричної проникності ϵ_{eff} відповідно. Квазікулонівське наближення з показником степеня $N \neq -1$ досліджується більш детально в розділі 7. У розділі 8 наведено висновки.

2. Основні електростатичні формули

Розглянемо два однорідні напівбезкінечні діелектрики (середовище 1 і середовище 2), розділені нескінченно тонкою межею поділу $Z = 0$; див. рис. 1. Діелектричні проникності середовищ становлять $\epsilon_1 = \text{const}$ ($Z > 0$) та $\epsilon_2 = \text{const}$ ($Z < 0$). Без втрати загальності можна припустити, що два точкові заряди (далі називатимемо їх джерелом Q_s і зондом Q_p ; звідси, такий поділ є умовним) розташовані в площині $Y = 0$. Заряд-джерело Q_s розташований у точці $\mathbf{R}_s = (0, Z_s)$ у середовищі s . Далі ми використовуємо нижній індекс $s = 1$ або 2 для середовища, де розташований заряд-джерело,

та нижній індекс s' для протилежного середовища ($s' = 2$, якщо $s = 1$, або $s' = 1$, якщо $s = 2$).

Заряд-джерело поляризує своє оточення. У нашому випадку система неоднорідна, тобто складається з двох середовищ. Отже, окрім об'ємної поляризації, яка виникає у нескінченно малому околі заряду Q_s і призводить до його екранування, з'являється також поляризаційний заряд на межі поділу $Z = 0$. Цей поляризаційний заряд створює електростатичне поле в усьому просторі, і це поле є симетричним відносно площини $Z = 0$. Згідно із застосованим тут класичним електростатичним методом, поле, що генерується в кожному з двох ізоляторів поляризаційним зарядом, розподіленним по їхній плоскій межі поділу, еквівалентне полю, що генерується уявним точковим зарядом (зарядом зображення), розташованим в іншому ізоляторі [51, 59–63].

Таким чином, наше завдання зводиться до задачі, де джерело й поляризаційні заряди фіксовані в нескінченному середовищі з діелектричною проникністю ε_s . Тоді, в області, зайнятій середовищем s , поле, індуковане поляризацією, еквівалентне полю, створеному в нескінченному середовищі з діелектричною проникністю ε_s уявним точковим зарядом (зарядом зображення 1), який має величину

$$Q'_s = K_{ss'} Q_s \quad (6)$$

і розташований у точці $\mathbf{R}'_s = (0, -Z_s)$. Точка $\mathbf{R}'_s$ є дзеркально відбитим зображенням точки $\mathbf{R}_s$, де розташований заряд джерела, відносно поверхні розділу як дзеркала. Отже, вона розташована в області, зайнятій середовищем s' .

Коефіцієнт діелектричної невідповідності

$$K_{ss'} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{s'}}{\varepsilon_s + \varepsilon_{s'}} = \frac{\varepsilon_s/\varepsilon_{s'} - 1}{\varepsilon_s/\varepsilon_{s'} + 1} \quad (7)$$

у рівнянні (6) залежить від співвідношення $\varepsilon_s/\varepsilon_{s'}$ між діелектричними константами, а не від кожної константи окремо. Значення $K_{ss'}$ може змінюватися від -1 до 1 , а знак залежить від співвідношення $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{s'}$. Отже, знаки Q_s і Q'_s можуть бути однаковими або протилежними. Ситуація з $\text{sign } Q_s = \text{sign } Q_{s'}$, якщо $\varepsilon_s > \varepsilon_{s'}$, може, на перший погляд, здатися досить дивною. Однак слід пам'ятати, що в класичній електростатиці ми маємо справу з двома поляризованими середовищами,

що складаються з позитивних і негативних зарядів [59, 113]. Відповідно до прийнятого підходу, інтерпретація така. Заряд Q_s (для визначеності нехай він буде позитивним) “відштовхує” позитивні заряди й “притягує” негативні в обох середовищах. “Зміщення” зарядів є більшим у більш поляризованому середовищі (з більшим ε). Скрізь в об'ємі обох середовищ ці “зміщені” заряди взаємно компенсують один одного, крім межі поділу. Тут зміщений некомпенсований позитивний (!) заряд у середовищі s підсумовується зі зміщеним некомпенсованим негативним (!) зарядом у середовищі s' . Знак суми залежить від того, яке значення переважає, тобто від співвідношення $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{s'}$. Насправді, межа поділу не є нескінченно тонкою площиною, і на межі поділу між різними середовищами завжди існує поверхневий (інтерфейсний) диполь, навіть за відсутності додаткових зовнішніх зарядів [114–117]. Однак пояснення впливу інтерфейсного диполя на сили зображення виходить за межі класичної електростатики.

Унаслідок цього точковий заряд зонда Q_p , якщо він також розташований у середовищі s у точці $\mathbf{R}_p = (X_p, Z_p)$, взаємодіє з обома зарядами, Q_s і Q'_s , а енергія цієї взаємодії дорівнює [порівняйте з рівнянням (2)]

$$W_{ss}(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p) = \frac{Q_s Q_p}{\varepsilon_s} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|} + \frac{K_{ss'}}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}'_s|} \right). \quad (8)$$

Таким чином, по суті, коефіцієнт невідповідності $K_{ss'}$ визначає внесок поляризаційних зарядів у загальне поле W_{ss} , і, отже, відхилення W_{ss} від W_D (4).

Водночас завдяки симетрії поля, створеного поляризаційним зарядом по обидва боки межі поділу, поле, створене в середовищі s' , еквівалентне полю, створеному іншим уявним зарядом (зарядом зображення 2) з ідентичним значенням Q'_s , розташованим симетрично до заряду зображення 1, тобто точно в точці $(\mathbf{R}'_s)' = \mathbf{R}_s$ у середовищі s , де розташований заряд-джерело Q_s . Отже, заряди Q_s і Q'_s накладаються в цій точці. У результаті в точці $\mathbf{R}_s$ виникає сумарний точковий заряд

$$Q_s + K_{ss'} Q_s = \frac{2\varepsilon_s}{\varepsilon_s + \varepsilon_{s'}} Q_s,$$

і для енергії взаємодії отримуємо один член замість двох для взаємодії заряду-зонда з цим ком-

бінованим зарядом,

$$W_{ss'}(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p) = \frac{2Q_s Q_p}{\varepsilon_s + \varepsilon_{s'}} \frac{1}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|}. \quad (9)$$

Таким чином маємо точну кулонівську залежність з ефективною діелектричною проникністю $\frac{1}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{s'})$. Слід пам'ятати, що це не є результатом компенсації заряду в точці $\mathbf{R}_s$ (заряд Q'_s – уявний), а зумовлено перекриттям двох електричних полів, створених як зарядом Q_s у середовищі s , так і поляризаційним зарядом, розподіленим по межі поділу.

Зауважимо, що рівняння (8) для W_{ss} відрізняється для середовищ $s = 1$ і 2 , коли обидва заряди розташовані в одному з них. Зокрема, $K_{12} = -K_{21}$. Навпаки, для зарядів, розташованих у різних середовищах ($s \neq s'$), із рівняння (9) неможливо визначити, який заряд насправді є джерелом чи зондом, як це і має бути завдяки симетрії задачі.

2.1. Варіант методу зображень

Як описано вище, у класичному методі зображень обчислення взаємодії двох точкових зарядів поблизу плоскої межі поділу двох нескінченних однорідних діелектриків зводиться до обчислення взаємодії трьох зарядів в однорідному нескінченному середовищі з діелектричною сталою ε_s . Це – заряд-джерело Q_s , заряд-зонд Q_p і уявний заряд Q'_s , який створює таке ж поле в точці розташування зонда, як і поляризаційний заряд на межі поділу. Водночас сам поляризаційний заряд, що виникає на межі поділу, не враховується. У будь-якому випадку величина заряду зображення (6) залежить від співвідношення $K_{ss'}$ між діелектричними сталими обох середовищ. Це становить певну незручність у випадку більш складних систем (наприклад, багатошарових структур) і мультиполів (наприклад, диполів).

Проте [118] “*Є шістдесят дев'ять способів скласти пісні племен, і кожен з них – правильний!*” Тому ми продемонструємо, що технічно досить зручно аналізувати фізику процесу в іншій моделі [69].

Отже, вираз (4) можна формально розглядати як такий, що відповідає взаємодії зарядів Q_s і Q_p у середовищі з діелектричною сталою ε . А можна розглядати його як такий, що описує взаємодію зарядів Q_s і Q_p/ε у середовищі з діелектричною сталою 1 . Такі варіанти завжди існують. Тобто вплив

на заряди внаслідок їхнього екранування можна звести до введення ефективною діелектричною проникності середовища, а самі заряди вважати незмінними.

Застосуємо це до виразу (8) для зарядів, що перебувають в одному середовищі. Його можна інтерпретувати як взаємодію неекранованих зарядів Q_s і Q_p через два канали: обидва є нескінченними діелектриками, але один (перший доданок) має діелектричну сталу ε_s (тут заряд Q_p розташований у точці $\mathbf{R}_p$, а заряд Q_s – у точці $\mathbf{R}_s$), а інший (другий доданок) – діелектричну сталу $\varepsilon_s/K_{ss'}$ (тут заряд Q_p також розташований у точці $\mathbf{R}_p$, але заряд Q_s – в точці $\mathbf{R}'_s$). У випадку, коли заряди перебувають у різних середовищах, їхню взаємодію також можна вважати такою, що відбувається через ті самі два канали. Але, як уже було вказано вище, в першому каналі заряд Q'_s розташований симетрично до Q_s відносно межі поділу, а в другому – збігається з ним. У результаті в другому випадку виникають два однакові канали взаємодії (множник $|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|^{-1}$) в однорідному середовищі з діелектричною сталою ε_s , але ці канали мають різні ваги, 1 і $K_{ss'}$. Склавши їх, отримуємо формулу (9) і можемо інтерпретувати її як взаємодію зарядів Q_s і Q_p (вони й надалі залишаються незмінними!) у єдиному ефективному каналі, що є нескінченним діелектриком з діелектричною проникністю $\frac{1}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{s'})$.

3. Деякі зауваження перед розрахунками

Тут слід зазначити такі обставини. Для вивчення відхилень від закону Кулона ми аналізуємо двомірні $(\mathbf{R}_p = (X_p, Z_p))$ коли $\mathbf{R}_s = \text{const}$ карти різних величин, що характеризують взаємодію двох точкових зарядів у двошаровій системі (див. рис. 1). Це – сама енергія взаємодії W , її нормований варіант w , і дві величини: ефективна діелектрична проникність ε_{eff} та ефективний показник степеня N , які можуть бути застосовані й застосовуються для квазікулонівського наближення до точної W -залежності. Ми також маємо намір простежити, як ці карти залежать від параметрів задачі. W -карти описуються рівняннями (8) і (9), які залежать від окремих значень величин ε_s , $\varepsilon_{s'}$ і добутку $Q_s Q_p$, тоді як формули для інших карт можна представити у формах, що містять лише співвідношення $\varepsilon_s/\varepsilon_{s'}$ або параметр $K_{ss'}$ (рівняння (7)).

Тому з самого початку ми прийняли, що

$$Q_s Q_p = 1, \quad (10)$$

що є певним видом нормування. (Щоб уникнути проблем з одиницями вимірювання, ми обрали їх довільно для всіх величин: зарядів, відстаней та енергій.) Аби простежити залежності карт від діелектричних параметрів ε_s і $\varepsilon_{s'}$, ми побудували карти для двох варіантів:

$$(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 2) \Rightarrow K_{12} = -\frac{1}{3} \quad (11)$$

та

$$(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 5) \Rightarrow K_{12} = -\frac{2}{3}. \quad (12)$$

Множина $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ є актуальною для W -карт, а коефіцієнт невідповідності K_{12} – для всіх інших карт. Карти були розраховані для обох варіантів. Якісно ці карти попарно подібні. Тому для ілюстрації еволюції кожної карти ми обрали той варіант, який, на нашу думку, краще демонструє її особливості.

4. W -карти

Спочатку розглянемо карту $W(X_p, Z_p) = W_{ij}(\mathbf{R}_s = \text{const}, \mathbf{R}_p)$, що описує взаємодію двох точкових зарядів, коли заряд-джерело розташований у точці $\mathbf{R}_s = (X_s, Z_s)$, і простежимо еволюцію цієї карти, коли джерело рухається перпендикулярно до межі поділу. Достатньо розглянути окремий випадок $X_s = 0$, коли заряд Q_s розташований на осі X . Ця карта має сингулярність $O(D^{-1})$, де $D = |\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|$ – відстань від зонда до джерела, у місці розташування джерела $\mathbf{R}_s$. Еволюція цієї сингулярності (і карти загалом) зі зміною положення заряду-джерела для набору параметрів (10), (12) проілюстрована на рис. 2.

Повертаючись до рис. 1, якщо відстань D між зарядами мала, внесок поляризаційних зарядів (другий член у рівнянні (8)) є незначним, тому залежність $W_{ij}(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p)$ стає майже кулонівською. Близькість заряду-джерела до межі поділу, де W -поверхня має вигин, спотворює гладкість і симетрію карти. Поперечний переріз сингулярності вже не є колом, але він дуже близький до нього. Це можна спостерігати на рис. 2, де поперечні перерізи (темно-сірого відтінку) виконані на довільно вибраному рівні $W_0 = 1,5$. Крім того, якщо $Z_s = 0$, то сингулярність відновлює свій точний кулонівський характер. Отже, ми можемо приблизно (див.

розділ 6) оцінити “радіус” R_0 цієї сингулярності на певному рівні енергії W_0 , використовуючи співвідношення

$$W_0 = \frac{Q_s Q_p}{\varepsilon_s R_0}. \quad (13)$$

Тут ε_s – це діелектрична проникність s -го ($s = 1, 2$) середовища, де розташований заряд-джерело. Якщо заряд-джерело розташований на межі поділу, закон Кулона застосовується для будь-якого D ; при цьому ефективна діелектрична проникність дорівнює $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Таким чином, “ефективні радіуси” W -сингулярності для позицій заряду-джерела “глибоко в середовищі 1”, “на межі поділу” та “глибоко в середовищі 2” пов’язані як $\frac{1}{\varepsilon_1} : \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} : \frac{1}{\varepsilon_2}$.

5. Нормовані w -карти

Виходячи з еволюції сингулярності W -карти (див. розділ 4), можна очікувати, що ця сингулярність плавно зберігає свій справжній кулонівський характер (4) принаймні поблизу заряду-джерела, оскільки внесок поляризації тут скінченний, тоді як пряма взаємодія джерела й зонда розходиться. Цю гіпотезу можна підтвердити або спростувати шляхом нормування карти $W(X_p, Z_p)$ на “справжню” кулонівську залежність (4), де ε – відповідна діелектрична проникність. Тоді, якщо гіпотеза справедлива, нормована карта $w = W/W_C$ має бути представлена майже плоскою поверхнею або принаймні круглим куполом поблизу сингулярності. Що стосується параметра ε у рівнянні (4), ми вибрали усереднений $\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ з двох причин. По-перше, якщо заряди розташовані у різних середовищах, то, згідно з рівнянням (9), результат не залежатиме від того, де розташований заряд-джерело (нагадаємо, що ми маємо намір відстежувати еволюцію карти, коли заряд-джерело “переміщується” з одного середовища в інше); тому нормована карта завжди буде площиною $w = 1$ у відповідних областях, що спрощує аналіз. По-друге, легко показати, що вираз (8) прямує до виразу (9), якщо $|\mathbf{R}_p| \rightarrow \infty$; ми обговоримо це нижче. Крім того, як зазначалося вище, це нормування виключає з подальшого розгляду не лише значення зарядів Q_s і Q_p , але й константи ε_1 і ε_2 як окремі сутності. Необхідний набір параметрів зводиться до одного параметра $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ або K_{12} .

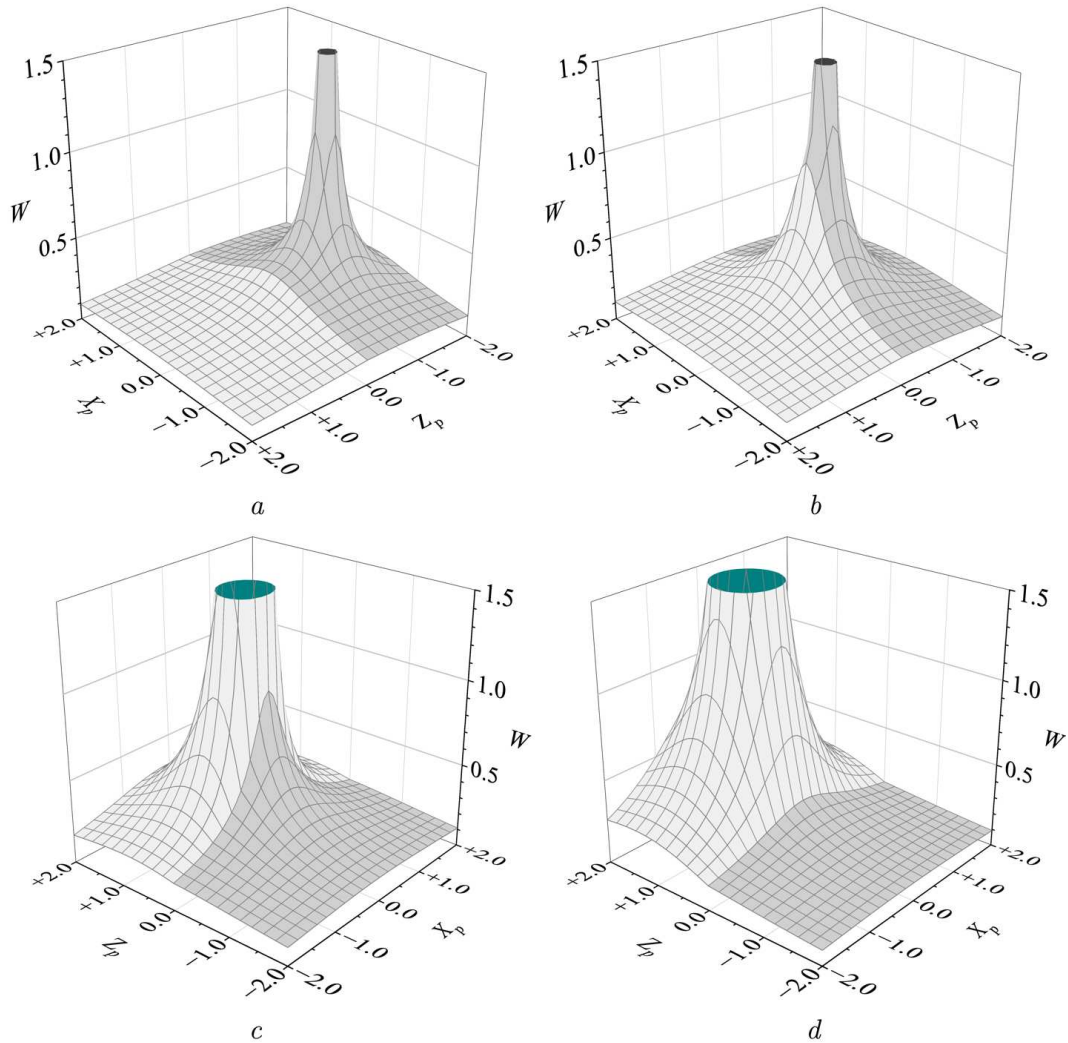


Рис. 2. W -карти, де W – енергія взаємодії (у довільних одиницях) між Q_s і Q_p для різних розташувань заряду-джерела Q_s : $\mathbf{R}_s = (X_s = 0, Z_s)$: $Z_s = -1$ (a), $-\frac{1}{3}$ (b), $\frac{1}{3}$ (c) і 1 (d), $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 5$. Область карти, що відповідає середовищу 1 (2), є світлішою (темнішою). На цьому рисунку панелі a і b повернуті відносно панелей c і d навколо осі W , щоб зробити особливості карти чіткішими

На рис. 3 зображено еволюцію нормованої карти для $K_{12} = -\frac{2}{3}$ ($\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{1}{5}$). Нормована карта містить конус, а не помилково очікувану плоску поверхню в місці розташування заряду-джерела.

Проте таку поведінку цілком можна пояснити. Розглянемо вираз (8) поблизу розташування заряду-джерела $\mathbf{R}_s$ для зарядів, розташованих на одній нормалі до межі поділу. Перший член у дужках має сингулярність, але другий є плавною залежністю від різниці $D = Z_p - Z_s$. Розкладаючи

його в ряд за D , отримуємо

$$W_{ss}(Z_s, Z_p) = \frac{A}{|Z_p - Z_s|} + B + C_1(Z_p - Z_s) + O[(Z_p - Z_s)^2].$$

Нормування цього виразу за допомогою виразу (4) дає

$$w_{ss}(Z_s, Z_p) = A' + B'|Z_p - Z_s| + O[|Z_p - Z_s|(Z_p - Z_s)]. \quad (14)$$

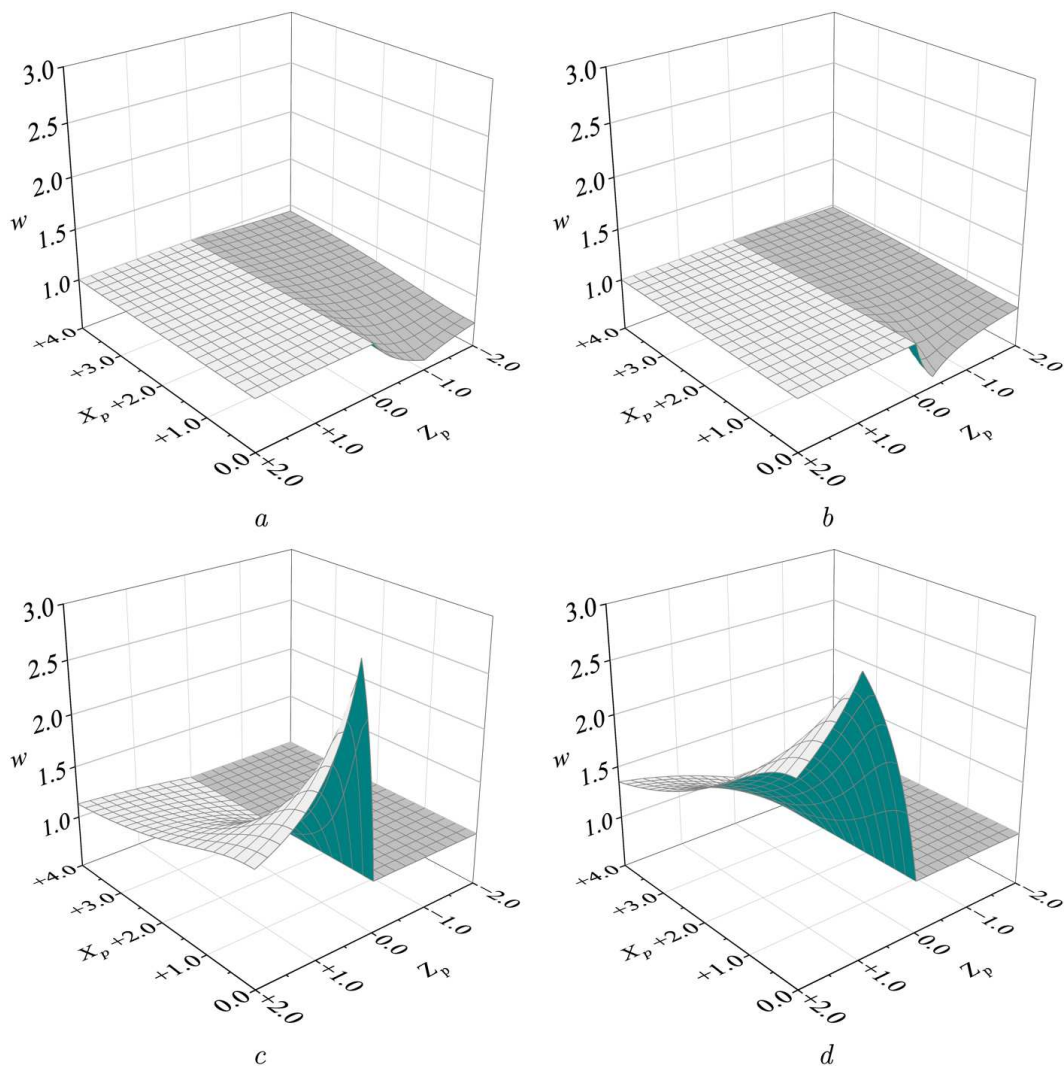


Рис. 3. Нормовані w -карти для $K_{12} = -\frac{2}{3}$ ($\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{1}{5}$). $Z_s = -1$ (a), $-\frac{1}{3}$ (b), $\frac{1}{3}$ (c) та 1 (d)

Якщо заряди розташовані на однаковій відстані від поверхні поділу, то

$$W_{ss}(X_s, X_p) = \frac{A}{|X_p - X_s|} + B + C_2 (X_p - X_s)^2 + O\left[|X_p - X_s| (X_p - X_s)^2\right]$$

та

$$w_{ss}(X_s, X_p) = A' + B' |X_p - X_s| + O\left[|X_p - X_s| (X_p - X_s)^2\right]. \quad (15)$$

Саме другі члени у виразах (14) і (15) відповідають за конічний характер w -карти поблизу $\mathbf{R}_s$.

Характерною рисою цієї особливості є сталість її максимального відхилення коли $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$ від площини $w = 1$; це відхилення відрізняється коли $Z_s \leq 0$. Дійсно, з формул (8) і (4) з $\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, можна отримати такий вираз для нормованої величини w :

$$w(X_p, Z_p) = \frac{1}{K_{ss'} + 1} \left(K_{ss'} \frac{\sqrt{X_p + (Z_p - Z_s)^2}}{\sqrt{X_p + (Z_p + Z_s)^2}} + 1 \right). \quad (16)$$

У результаті максимальне значення відхилення в середовищі s дорівнює

$$\max \Delta w_s = \lim_{X_p \rightarrow 0, Z_p \rightarrow Z_s} w(X_p, Z_p) - 1 = -\frac{K_{ss'}}{K_{ss'} + 1}. \quad (17)$$

Воно залежить лише від параметра $K_{ss'}$, тоді як залежність від Z_s зникає. Зокрема, якщо обидва заряди розташовані в середовищі $s = 1$, то для обраного значення $K_{12} = -\frac{2}{3}$ максимальна різниця має пік коли $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$, що дорівнює 2; порів. рис. 3, a і 3, b . Але якщо обидва заряди розташовані в середовищі $s = 2$, тоді $K_{21} = \frac{2}{3}$, а максимальне відхилення від рівня $w = 1$ досягає $-\frac{2}{5}$ коли $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$; порів. рис. 3, c і 3, d . Як впливає з формули (17), співвідношення між висотою піку й глибиною занурення дорівнює ($K_{21} = -K_{12}$)

$$\frac{\max \Delta w_{s=1}}{\max \Delta w_{s=2}} = \left| \frac{-\frac{K_{12}}{K_{12}+1}}{-\frac{K_{21}}{K_{21}+1}} \right| = \frac{1 - K_{12}}{1 + K_{12}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (18)$$

тобто 5 для $K_{12} = -\frac{2}{3}$.

Таким чином, напрямок відхилення w -поверхні від площини відліку $w = 1$ визначається знаком $K_{ss'}$. Це залежить від того, чи збігаються знаки заряду-джерела Q_s і заряду поляризації на межі поділу, чи ні; див. розділ 2. Заряд зонда починає відчувати заряд поляризації, навіть перебуваючи поблизу Q_s . Якщо $\varepsilon_s < \varepsilon_{s'}$, знаки зарядів джерела й поляризації збігаються, енергія взаємодії зонда з ними підсумовується, їх сума перевищує енергію взаємодії між зондом і джерелом, і виникає пік. Але якщо $\varepsilon_s > \varepsilon_{s'}$, знаки зарядів джерела й поляризації різні, енергія взаємодії між зондом і зарядом поляризації віднімається від енергії взаємодії зонд-джерело, результат менший за чисту енергію взаємодії зонд-джерело, створюючи таким чином провал.

Коли $Z_s = 0$ рівняння (16) дає плоску поверхню $w(X_p, Z_p) = 1$. Це межа, до якої вираз (16) прямує нерівномірно коли $Z_s \rightarrow -0$ і $Z_s \rightarrow +0$. Саме ця нерівномірність відповідає за наявність гострого краю на нормованих картах, розрахованих для $Z_s \neq 0$. Цей факт свідчить про те, що використання класичної кулонівської залежності (4) для опису електростатичної взаємодії між двома точковими зарядами поблизу межі поділу діелектрично різних середовищ є некоректним. Відхилення від рівняння (4) залишається значним, навіть

якщо відповідні заряди розташовані близько один до одного: воно є величиною першого, а не другого порядку за відстанню від джерела до зонда.. Це важливо, наприклад, для формування екситона або триона Ваньє–Мотта в шаруватих системах [119–121].

6. Ефективна діелектрична проникність. ε_{eff} -карти

Тільки для обмеженого сферично-симетричного розподілу заряду потенціал за його межами має всюди точну кулонівську залежність з показником степеня $N = -1$. Такі розподіли реально існують і мають практичне значення [122–126]. Водночас існує необхідність у простих аналітичних виразах для апроксимації реальної координатної поведінки складніших систем, принаймні в певному діапазоні відстаней. Це має сенс тому, що іноді відповідний розгляд дає змогу отримати аналітичні результати, які є важливими для подальших оцінок і планування обчислень.

Що стосується нашої системи (див. рис. 1), то рівняння (8) з пропущеним другим членом іноді використовується для спрощення аналізу [133, 134]; тобто, нехтують поляризаційним зарядом, що виникає на межі поділу. Однак навіть у випадку, коли молекулярні рівні поблизу меж поділу розглядалися з урахуванням впливу заряду зображення, розрахунки не проводилися послідовно з електростатичної точки зору (див., наприклад, [135, 136]). Щоб продемонструвати значущість ефекту поляризації межі поділу, перевіримо коректність спрощеної одночленної моделі, побудувавши (X_p, Z_p) -карту величини ε_{eff} , що задовольняє співвідношенню

$$W_{ss'}(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p) = \frac{1}{\varepsilon_{\text{eff}}} \frac{Q_s Q_p}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|}, \quad (19)$$

де ліва частина $W_{ss'}(R_s, R_p)$ описується повним виразом (8). Далі, оскільки карти симетричні відносно площини $X_p = 0$, ми продемонструємо лише їх ділянки, що відповідають $X_p \geq 0$. Таким чином ми краще проілюструємо особливість карти, що виникає в точці $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$. Тепер, як було описано вище, набір параметрів складається з однієї величини K_{12} . На рис. 4 показано ε_{eff} -карти для різних положень заряду-джерела Q_s (нагадаємо, що конкретні значення Q_s і Q_p можуть бути довільними в цьому випадку) у випадку $K_{12} = -\frac{2}{3}$

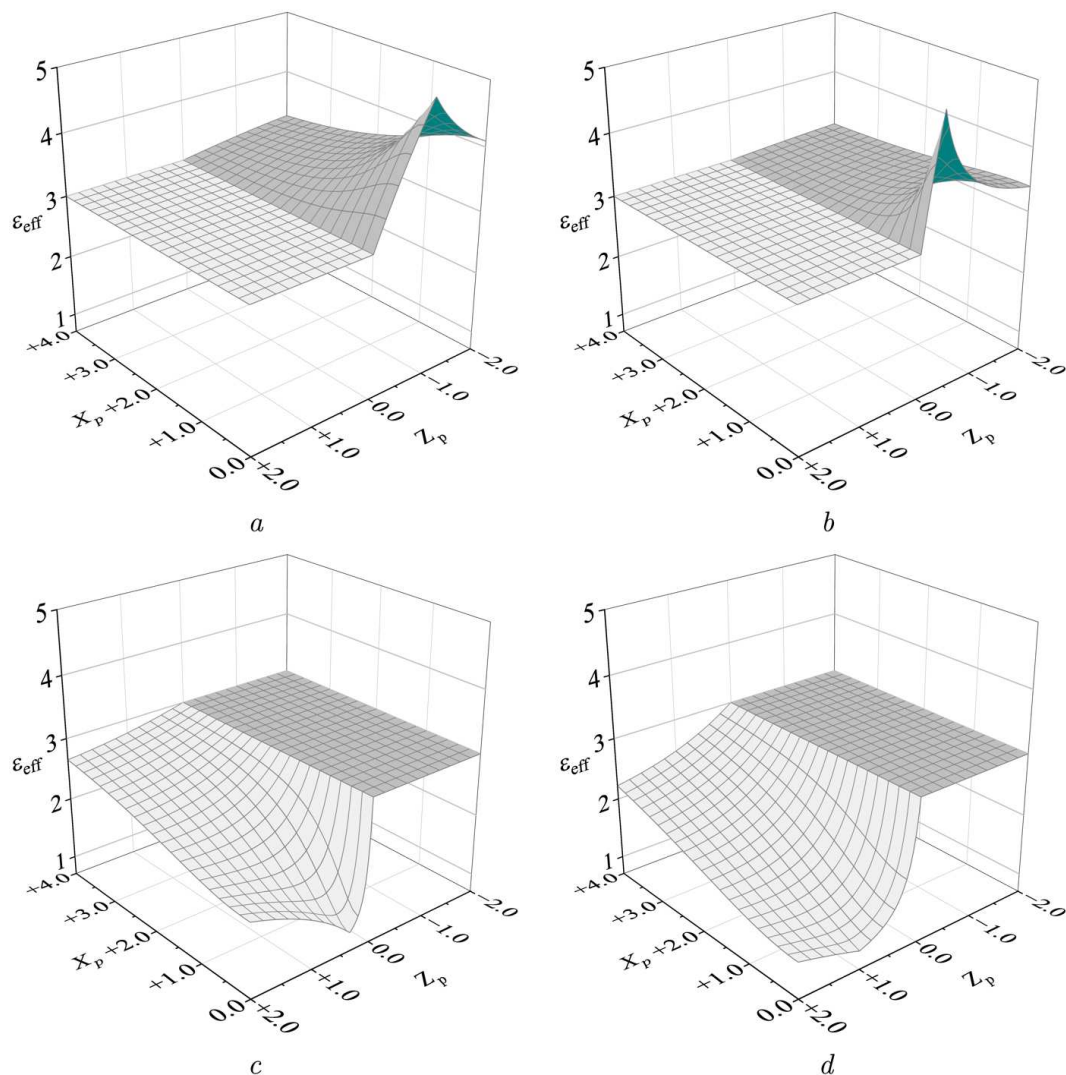


Рис. 4. ε_{eff} -карта для тих самих параметрів, що й на рис. 3

(набір параметрів (12)). Ситуація з плато в середовищі s' зрозуміла: тут $W_{ss'}(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p)$ описується формулою (9), так що має місце точна рівність $\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Увагу привертає той факт, що якщо обидва заряди розташовані в одному середовищі, то $\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_s$ лише в одній точці $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$, де карта має гостру конічну особливість.

Ще однією особливістю ε_{eff} -карт є те, що $\varepsilon_{\text{eff}} \rightarrow \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, якщо відстань від джерела до зонда $D = |\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|$ прямує до нескінченності. Таким чином, якщо джерело розташоване в середовищі 1 ($\varepsilon_1 = 1 < \varepsilon_2 = 5$), а зонд віддаляється від нього, значення ε_{eff} спочатку різко зростає від $\varepsilon_{\text{eff}} = 1$, а

потім продовжує монотонно наближатися до значення $\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. З іншого боку, якщо джерело розташоване в середовищі 2 ($\varepsilon_1 = 5$), то значення ε_{eff} спочатку різко зменшується від $\varepsilon_{\text{eff}} = 5$, а потім продовжує зменшуватися монотонно до значення $\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Ця тенденція має просте пояснення.

Згідно з міркуваннями, наведеними в розділі 2, якщо заряд-джерело розташований в середовищі 1, то енергія взаємодії дорівнює сумі енергій взаємодії заряду зонда як із зарядом-джерелом, так і з зарядом зображення. Тут важливо, що згідно з рівняннями (6) і (7), знаки заряду-джерела й

заряду зображення різні ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, отже $K_{12} < 0$). Дуже близько до джерела його взаємодія із зондом сильно переважає (вона має кулонівську розбіжність), так що ми можемо розглядати другий член у рівнянні (8) як невелику поправку до першого. Однак на великих відстанях $D \gg Z_s$ внески обох членів стають одного порядку. З точки зору віддаленого пробного заряду, заряди, які індують поле, зближуються між собою, утворюючи комбінований заряд зі значенням $Q_s + Q'_s$, яке за величиною менше, ніж Q_s ($-1 < K_{12} < 0$). Тепер

$$W_{ss}(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p) \approx \frac{(Q_s + Q'_s) Q_p}{\varepsilon_1} \frac{1}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|}, \quad (20)$$

і в рамках ε_{eff} -підходу можна приблизно вважати

$$\frac{(Q_s + Q'_s)}{\varepsilon_1} \approx \frac{Q_s}{\varepsilon_{\text{eff}}}.$$

Тоді

$$\varepsilon_{\text{eff}} \approx \varepsilon_1 \frac{Q_s}{Q_s + Q'_s} = \frac{\varepsilon_1}{1 + K_{12}} > \varepsilon_1. \quad (21)$$

Натомість якщо заряд-джерело розташований в середовищі 2 ($\varepsilon_{s=2} = 5 > \varepsilon_{s'=1} = 1$), те саме дослідження приводить до співвідношення

$$\varepsilon_{\text{eff}} \approx \frac{\varepsilon_2}{1 + K_{21}} < \varepsilon_2, \quad (22)$$

оскільки тепер $K_{21} = -K_{12} > 0$.

Важливо зазначити, що ε_{eff} -карта – це “обернена” w^{-1} -карта, помножена на коефіцієнт $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Отже, існування областей, де $\varepsilon_{\text{eff}} = \text{const}$, та конічна поведінка карти при $\mathbf{R}_p \rightarrow \mathbf{R}_s$ мають належне пояснення.

Як показують ε_{eff} -карти, в аналізованій геометрії ε_{eff} -наближення є точним у випадку, коли заряди розташовані в різних середовищах. В іншому випадку, область у середовищі s , де $\varepsilon_{\text{eff}} \approx \varepsilon_s$, розташована досить далеко від заряду-джерела, і ми маємо $\varepsilon_{\text{eff}} \neq \varepsilon_s$ по всьому середовищу s . Отже, можна зробити висновок, що в цьому випадку застосовані ε_{eff} - і ($\varepsilon = \varepsilon_s = \text{const}$)-моделі іноді дають лише грубі наближення до шуканої залежності $W(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p)$.

7. Квазікулонівське наближення

7.1. N -карти

Ґрунтуючись на нашому попередньому аналізі [63, 65], розглянемо таке квазікулонівське наближення

отриманих вище електростатичних залежностей:

$$W(D) \approx CD^N. \quad (23)$$

Тут параметри C і N залежать від положень $\mathbf{R}_s$ і $\mathbf{R}_p$ обох зарядів. Перейдемо до полярної системи координат з початком координат у точці $\mathbf{R}_s$ (див. рис. 1). Тоді C і N – це деякі функції відстані від джерела до зонда D і кута θ : $C(D, \theta)$ і $N(D, \theta)$. Для фіксованого значення θ_* можна припустити, що в межах деякого D -інтервалу навколо відстані D_* , C і N змінюються несуттєво, а тому їх можна вважати константами C_* і N_* відповідно. Якщо відома фактична залежність $W(D, \theta_*)$, значення C_* і N_* можна обчислити за допомогою рівнянь

$$N_* = \left[\frac{D}{W} \frac{dW}{dD} \right]_{D=D_*}, \quad (24)$$

$$C_* = \left[\frac{W}{D^{N_*}} \right]_{D=D_*}. \quad (25)$$

Отже, виникає питання: чи існує певне значення N в рівнянні (23), яке зробило б його хоча б приблизно застосовним до нашої задачі? Для цього слід побудувати карту $N(X_p, Z_p)$. Завдяки простоті задачі, відповідний вираз можна отримати в аналітичному вигляді.

Зокрема, якщо заряди розташовані в різних середовищах, формула (24) застосовується до виразу (9), а N -карта в середовищі s' є площиною $N(X_p, Z_p) = -1$. Якщо точка (X_p, Z_p) розташована в середовищі s на відстані D від заряду-джерела, а відрізок, що з'єднує заряди, орієнтований під кутом θ відносно напрямку осі Z (див. рис. 1), обчислення за формулами (24) і (8) призводять до виразу

$$N(D, \theta) = -\frac{G^3 + K_{ss'} D^2 (D + 2Z_s \cos \theta)}{G^2 (G + K_{ss'} D)}, \quad (26)$$

де

$$G = \sqrt{D^2 + 4DZ_s \cos \theta + 4Z_s^2}. \quad (27)$$

Тут набір параметрів також зводиться до одного співвідношення $\varepsilon_s/\varepsilon_{s'}$ або параметра $K_{ss'}$. Перехід від $N(D, \theta)$ до $N(X_p, Z_p)$ є тривіальним.

Отримані N -карти, розраховані для $K_{12} = -\frac{1}{3}$ ($\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$) і різних позицій заряду-джерела, показано на рис. 5. Ми обрали саме цей варіант для ілюстрації, оскільки в іншому випадку N досягає значення -5 на межі поділу, і конічна особливість

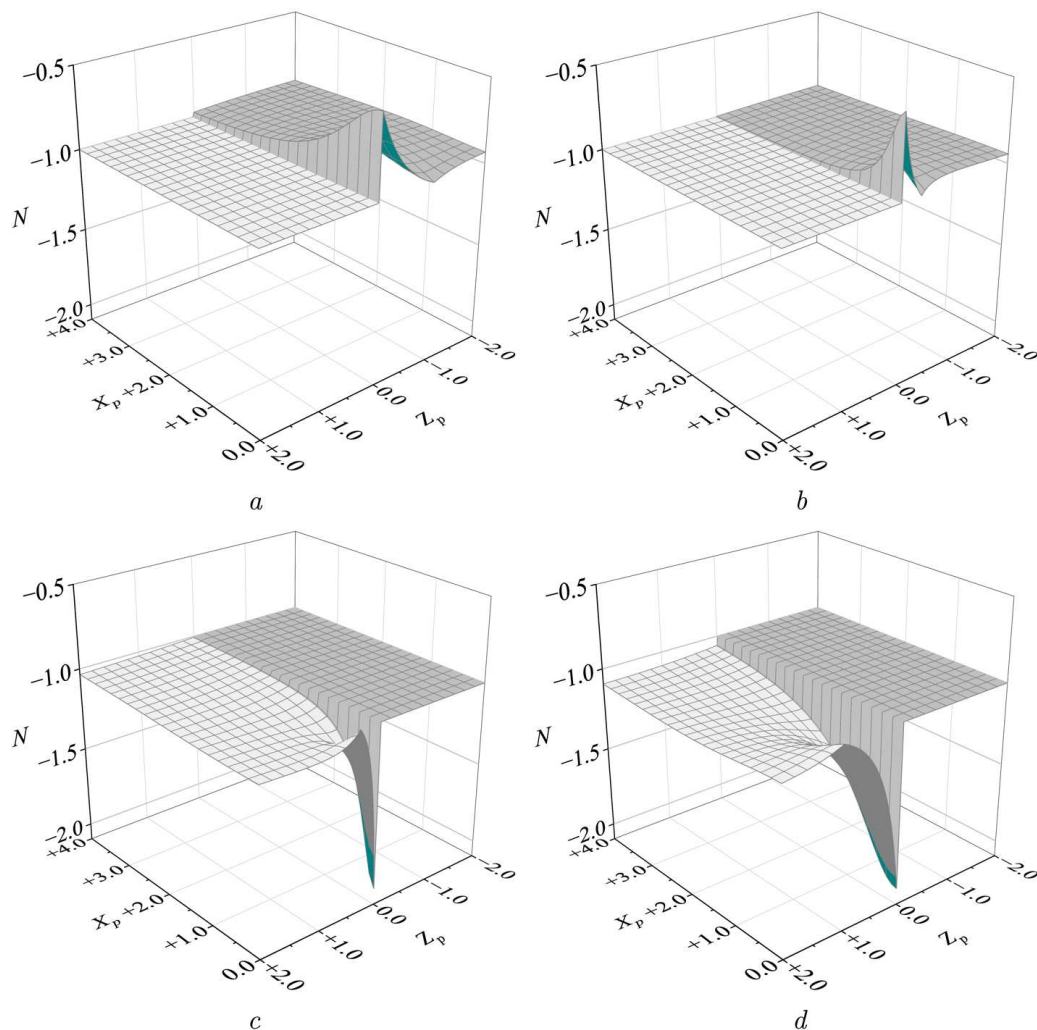


Рис. 5. N -карти для тих самих параметрів, що й на рис. 2 (див. пояснення в тексті)

карти погано помітна у відповідному масштабі. Отже, поблизу межі поділу ми можемо отримати несподівано велике значення N , максимум якого, згідно з формулою (26), дорівнює

$$N(Z_s, \pi) = \frac{K_{ss'} - 1}{K_{ss'} + 1} = -\frac{\varepsilon_{s'}}{\varepsilon_s}. \quad (28)$$

Справедливість формули (26) у цьому випадку можна продемонструвати так. Виходячи з рівняння (24), розглянемо співвідношення (нагадаємо, що $D = Z_s - Z_p$)

$$\frac{N(D \rightarrow Z_s - 0, \pi)}{N(D \rightarrow Z_s + 0, \pi)} =$$

$$= \frac{\lim_{D \rightarrow Z_s - 0} \frac{D}{W_{ss'}}}{\lim_{D \rightarrow Z_s + 0} \frac{D}{W_{ss'}}} \times \frac{\lim_{Z_p \rightarrow +0} \frac{dW_{ss}}{dZ_p}}{\lim_{Z_p \rightarrow -0} \frac{dW_{ss'}}{dZ_p}} \quad (29)$$

між значеннями N на межі поділу з обох її боків. Оскільки залежність $W(Z_p)$ є неперервною при перетині межі поділу, $W_{ss}(Z_p = 0) = W_{ss'}(Z_p = 0)$, перший дріб у правій частині цього співвідношення дорівнює 1. Водночас похідні $\frac{dW_{ss}}{dZ_p}$ і $\frac{dW_{ss'}}{dZ_p}$ пропорційні значенням електричного поля. Таким чином, отримуємо співвідношення між величинами електричного поля вздовж межі поділу, яке має бути оберненим до співвідношення між діелектричними проникностями середовищ. Враховуючи, що згідно з рівнянням (9), знаменник

$N(D \rightarrow Z_s + 0, \pi)$ у лівій частині рівняння (29) дорівнює -1 , отримуємо формулу (28).

Неочікуваний результат полягає в тому, що співвідношення $\varepsilon_{s'}/\varepsilon_s$ може в принципі набувати будь-якого позитивного значення. Відповідно, ефективний показник степеня N може досягати будь-якого негативного значення $-(\varepsilon_{s'}/\varepsilon_s)$. Наприклад, якщо середовище s' є сегнетоелектриком або “класичним” металом з $\varepsilon_{s'} \rightarrow \infty$, то N прямує до нескінченності. Маємо ефект, подібний до того, що спостерігається в тришарових структурах [65]. Звичайно, цей результат, що описує сильний вплив поляризації межі поділу (“зарядів зображення”), отримано в рамках класичної електростатики. Однак результат найімовірніше збережеться, якщо врахувати просторову дисперсію діелектричної проникності (див., наприклад, роботи [51, 69] і посилання в них).

Розглянемо N -карти в цілому. Можна побачити, що, окрім середовища s' , кулонівське значення $N = -1$ показника степеня в наближенні (23) для середовища s справедливе лише в одній точці $\mathbf{R}_s$, де розташований заряд-джерело. Значення $N = -1$ також досягається асимптотично на нескінченності, $D \rightarrow \infty$, оскільки тут ми наближаємося до кулоноподібної залежності; див. також розділ 6. Отже, залежність $N(D, \theta)$ від D є немонотонною, а область середовища s , де N суттєво відхиляється від -1 , досить велика в усіх напрямках. Отже, все залежить від того, чи є достатнім застосування класичного значення $N = -1$ як наближення. У будь-якому разі це слід робити з обережністю.

N -карти показують, що якщо заряди розташовані в середовищі з нижчою діелектричною проникністю, $\varepsilon_s < \varepsilon_{s'}$, то поляризаційний заряд на межі поділу посилює залежність їхньої взаємодії від відстані D між ними порівняно із законом Кулона, тобто ефективне $N < -1$. Якщо ж $\varepsilon_s > \varepsilon_{s'}$, ця залежність стає слабшою, $-1 < N < 0$.

7.2. Еволюція карт

Специфічною особливістю моделі, проаналізованої в цій роботі, є відсутність природного масштабу довжини. А саме, єдиним можливим параметром довжини є відстань $|Z_s|$ заряду-джерела від поверхні поділу. Отже, якщо у картах $w(X_p, Z_p)$, $\varepsilon_{\text{eff}}(X_p, Z_p)$ і $N(X_p, Z_p)$ ми підставимо $X_p =$

$= D_0 \sin \varphi$ і $Z_p = D_0 \cos \varphi$ (тут D_0 – відстань від заряду зонда до початку координат $(0,0)$; див. рис. 1) і здійснимо нормування $D_0 = d_0 |Z_s|$, отримані формули міститимуть як змінні лише величини d_0 , φ і $K_{ss'}$; зокрема, величина $|Z_s|$ зникає. Тоді, наприклад, для N -карт, отримуємо

$$N(d_0, \varphi) = \frac{K_{ss'} (1 - d_0^2) k_- - k_+^3}{k_+^2 (K_{ss'} k_- + k_+)}, \quad (30)$$

де

$$k_{\pm} = \sqrt{1 + d_0^2 \pm 2d_0 \cos \varphi}.$$

Іншими словами, для фіксованого $K_{ss'}$, отримані формули описуватимуть статичні універсальні карти в нормованих радіальних (d_0, φ) -координатах (або декартових $(x_p = X_p/|Z_s|, z_p = Z_p/|Z_s|)$ -координатах). Якщо координата Z_s змінюється, зазначені карти радіально деформуються (вони стискаються до початку координат, якщо $|Z_s|$ зменшується, або віддаляються від нього, якщо $|Z_s|$ збільшується). У результаті всі піки й провали в середовищі s , що походять від карт у (X_p, Z_p) -координатах, збережуть свої величини під час руху до або від початку координат. Загалом, коли $Z_s \rightarrow 0$, ми маємо неоднорідну збіжність w -карт до площини $w = 1$, ε_{eff} -карт до площини $\varepsilon_{\text{eff}} = 1$ і N -карт до площини $N = -1$. Водночас зазначені карти в середовищі s' також радіально деформовані. Однак оскільки вони плоскі в цьому середовищі, перетворення є “прихованим”.

7.3. N -наближення

Тепер зрозуміло, що не можна вибрати певне фіксоване значення параметра N у формулі (23), щоб остання адекватно описувала взаємодію між двома точковими зарядами в досліджуваній двошаровій системі, коли ці заряди розташовані в одному середовищі. Тоді виникає нове питання: наскільки добре параметри, визначені формулами (24) і (25), можуть апроксимувати цю взаємодію в межах скінченного інтервалу відстаней між зарядами?

Щоб відповісти на це питання, проаналізуємо поведінку формул (26) і (27), коли заряд-зонд Q_p наближається до заряду-джерела Q_s вздовж прямої лінії, орієнтованої під кутом θ відносно нормалі до межі поділу (див. рис. 1). Для спрощення, далі ми вважатимемо, що обидва заряди розташовані в

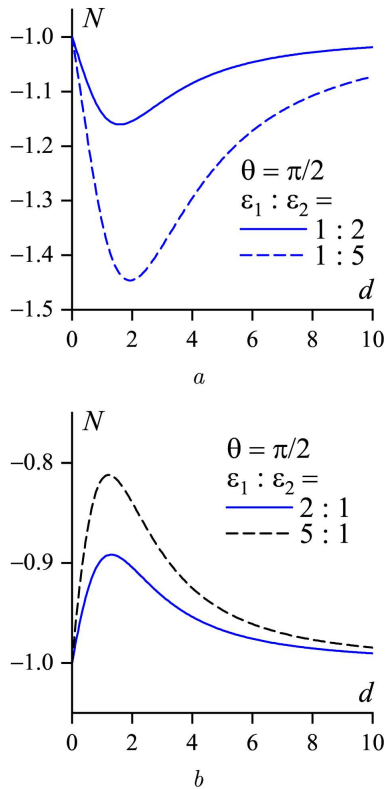


Рис. 6. Залежності показника степеня N у рівнянні (23) від нормалізованої відстані $d = D/Z_s$ між зарядами, розташованими в середовищі 1 на однаковій відстані від межі поділу ($\theta = \frac{\pi}{2}$) для різних співвідношень $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$

середовищі 1 ($Z > 0, s = 1$), так що $Z < 0$ і $s' = 2$ для середовища 2. Як і раніше, нормуючи відстані за допомогою $Z_s > 0$, тобто $D/Z_s \equiv d$, отримуємо формули, універсальні для всіх $Z_s > 0$:

$$N(d, \theta) = -\frac{k^3 + K_{ss'} d^2 (d + 2 \cos \theta)}{k^2 (k + K_{ss'} d)}, \quad (31)$$

де

$$k = \sqrt{d^2 + 4d \cos \theta + 4}. \quad (32)$$

Звісно, залежність від безрозмірного коефіцієнта $K_{ss'}$ зберігається. Продemonструємо вплив $K_{ss'}$ на залежність (31). Нам слід проаналізувати два випадки: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ і $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Крім того, ми обмежимо наш аналіз випадками $\theta = 0$ (заряди розташовані на одній нормалі до межі поділу, а заряд-зонд “рухається” в глибину середовища 1) і $\frac{\pi}{2}$ (заряди розташовані на однаковій відстані від межі поділу).

На рис. 6 порівнюються залежності $N(d, \frac{\pi}{2})$, розраховані для $K_{12} = -\frac{1}{3}(\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{1}{2})$ і $K_{12} = -\frac{2}{3}(\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{1}{5})$ (панель *a*) і $K_{12} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{2}{1})$ і $K_{12} = \frac{2}{3}(\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{5}{1})$ (панель *b*). Очевидно, що відхилення N від кулонівського значення $N = -1$ більші, якщо середовища мають більшу діелектричну різницю. Водночас знак відхилень відповідає співвідношенню $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ між діелектричними проникностями. Видно, що відхилення від $N = -1$ є максимальними в практично найцікавішому інтервалі $0,5 \lesssim d \lesssim 5$. Зауважимо, що залежності, показані суцільними кривими, є належним чином нормованими перерізами N -карт, зображених на рис. 5 площинами, проведеними через конічну особливість карти й паралельно до (X_P, N) -площини.

Результати для залежностей $N(d, 0)$ аналогічні, і тому тут не наводяться.

Тепер ми готові відповісти на питання, поставлене на початку цього розділу. З процедури знаходження апроксимаційних залежностей (23) видно, що вони є дотичними до залежностей $W(D, \theta)$ у шуканих контрольних точках. Отже, більшість з них мають одну спільну точку з такою залежністю. Те саме стосується нормованих залежностей $w(d)$ та їх нормованих квазікулонівських наближень. Доцільно проілюструвати наближення, розраховані для кількох точок, розташованих на різних відстанях від точкового заряду-джерела вздовж двох зазначених вище прямих ліній ($\theta = 0$ і $\frac{\pi}{2}$).

На рис. 7 ми демонструємо якість w -наближення (23) у випадку $K_{12} = -\frac{1}{3}(\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{1}{2})$ для $\theta = 0$ (панель *a*; зонд “віддаляється” від джерела в об’єм середовища 1) і $\frac{\pi}{2}$ (панель *b*; зонд і джерело розташовані на однаковій відстані від межі поділу). Як і раніше у випадку з рис. 5, криві є поперечними перерізами відповідних карт, розглянутих вище, $(\theta = 0)$ -криві – це поперечні перерізи карт площиною, проведеною через конічну особливість карти й паралельно до (Z_P, N) - або (Z_P, w) -площини, тоді як $(\theta = \frac{\pi}{2})$ -криві – це поперечні перерізи карт площиною, проведеною через конічні особливості карт і паралельно до (X_P, N) - або (X_P, w) -площини.

Самі конічні особливості на графіках стали пологими, оскільки вони побудовані в логарифмічному масштабі параметра d (незмінені конічні профілі особливостей можна бачити на рис. 6). Логарифмічна шкала вздовж осі d була обрана для того,

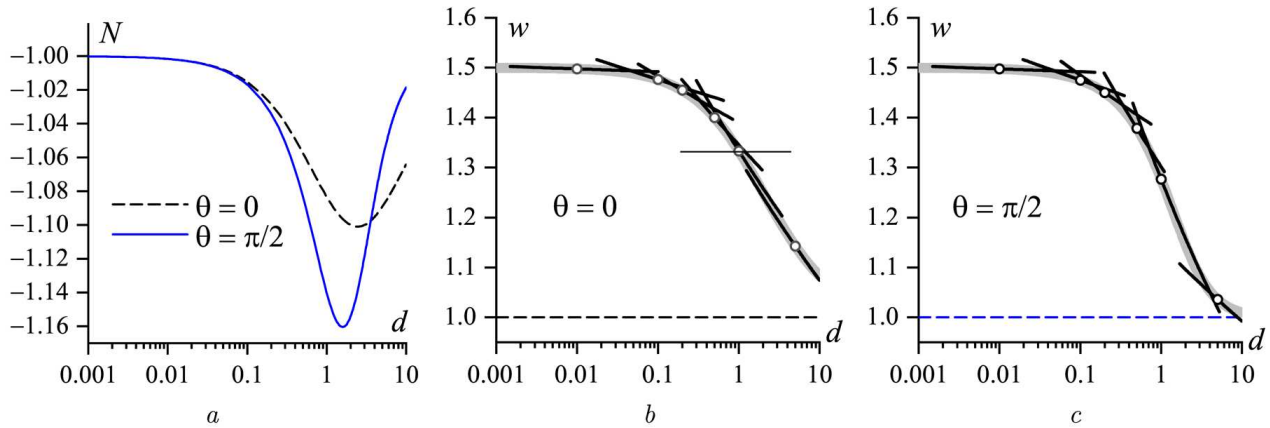


Рис. 7. *a* – порівняння залежностей $N(d)$ для зарядів, розташованих у середовищі 1 на однаковій відстані від межі поділу ($\theta = \frac{\pi}{2}$) і на тій самій нормалі до межі поділу ($\theta = 0$); *b* – залежність $w(d)$ (товста сіра крива) та її апроксимації квазікулонівськими залежностями за формулою (23) (суцільні криві) у різних точках логарифмічної шкали d , $\theta = 0$. Асимптотику $w(d \rightarrow \infty)$ показано пунктирною лінією. Тонка горизонтальна лінія відповідає “справжній” кулонівській залежності ($N = -1$), розрахованій з $d = 1$. *c* – те саме, що й на панелі (*b*), але для $\theta = \frac{\pi}{2}$. Для всіх панелей $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 1 : 2$

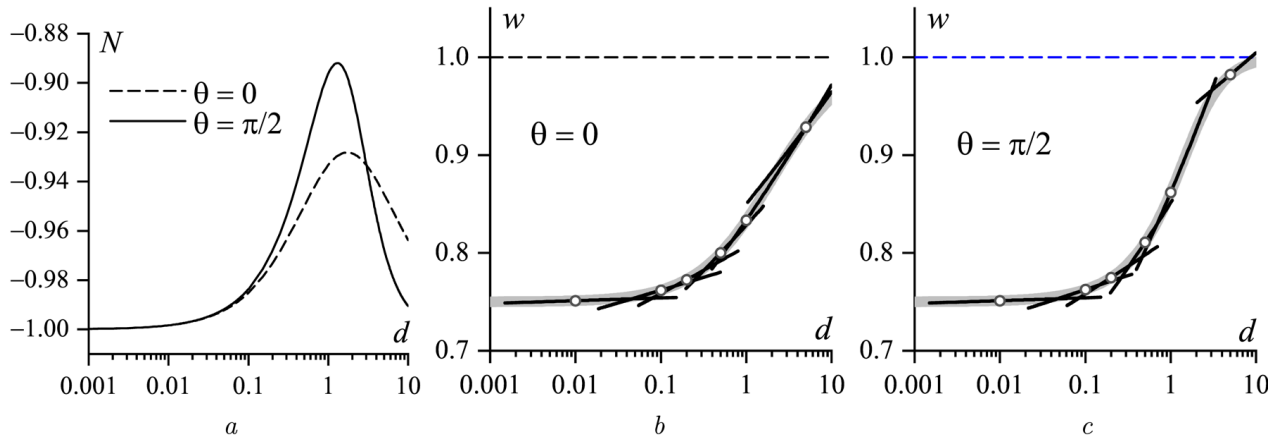


Рис. 8. Те саме, що й на рис. 7, але для $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 2 : 1$

щоб охопити досліджувані точки в достатньо широкому діапазоні відстаней, $d = 0,01, 0,1, 0,2, 0,5, 1$, і 5 , які є найбільш цікавими для практичних розрахунків. Крім того, нормовані апроксимаційні залежності (23) виявилися майже лінійними (це є результатом малості коефіцієнта діелектричної невідповідності $R_{12}^{\varepsilon\varepsilon}$) і чітко помітними у вибраному форматі. Справжнє кулонівське наближення в кожній точці виглядало б як горизонтальна лінія (тут ми маємо справу з нормованою w -залежністю, а не з W -залежністю). Наприклад, на рис. 7, *b* ми побудували графік одного з таких наближень (коли $d = 1$) тонкою суцільною лінією. Очевидно, що

для $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ відповідні криві будуть лежати десь між нанесеними кривими.

Для повноти картини на рис. 8 той самий аналіз проведено для випадку $K_{12} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \frac{2}{1})$, і отримані результати дуже схожі. Беручи до уваги, що в обох випадках існує інтервал відстаней, на якому степеневе квазікулонівське наближення є досить задовільним, можна зробити висновок, що це наближення може бути корисним для розрахунків.

8. Висновки

Аналіз, проведений у цій статті в межах класичної електростатики, свідчить про те, що взає-

модія між двома точковими зарядами, розташованими поблизу межі поділу двох діелектрично різних середовищ, суттєво спотворюється поляризаційним зарядом, індукованим на межі поділу через діелектричну невідповідність між середовищами. Оцінено величину ефекту й запропоновано просте наближення енергії електростатичної взаємодії.

Взаємодія між зарядами, розташованими в різних середовищах, включно з випадком, коли один або обидва заряди розташовані на межі поділу, є суто кулонівською, зі зміненою ефективною діелектричною проникністю.

Випадок, коли заряди розташовані в одному середовищі, є цікавішим. Тут основним результатом розрахунків є конічний характер w -, ε_{eff} - і N -карт у точці $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$, де $\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_s$ і $N = -1$ лише в цій точці. Тому спроби використовувати ε_{eff} - (рівняння (19)) або N_{eff} -наближення (рівняння (23)) стають корисними лише в обмежених інтервалах відстаней від джерела до зонда D , а довжина цих інтервалів зменшується зі зближенням зарядів один з одним. Варто зазначити, що відхилення N від -1 є немонотонними відносно D і сильно залежать від співвідношення $\varepsilon_s \leq \varepsilon'_s$.

Ми наголошуємо, що неочікувані нетривіальні залежності, виявлені шляхом ретельного аналізу в базовому випадку двошарової системи з діелектричною невідповідністю, чітко демонструють, що слід бути дуже обережним, застосовуючи *априорні* якісні міркування, навіть у простих задачах. У тій самій галузі досліджень, пов'язаних із поляризацією межі поділу й методом зарядів зображень, нещодавно було зроблено аналогічний висновок під час розв'язання парадоксу щодо поверхневого дипольного моменту [137].

Отримані результати становлять загальний інтерес і можуть бути застосовані, зокрема, в поверхневій трибоелектриці [125, 138] і в дослідженнях екситонів Ваньє-Мотта в шаруватих системах, де діелектричну невідповідність слід враховувати під час розрахунку енергій зв'язку [119, 127].

Ця робота була виконана в Інституті фізики Національної академії наук України (гранти 1.4.В-219 та IF-2026/2).

1. *The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish*, F. R. S. Written between 1771 and 1781. Edited by J.C. Maxwell (Cambridge University Press, 1879).

2. H. Cavendish. LV. An attempt to explain some of the principal phenomena of electricity, by means of an elastic fluid. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **155**, 584 (1771).
3. W.C.D. Whetham. *The Theory of Experimental Electricity* (Cambridge University Press, 1905).
4. C.A. Coulomb. Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme. In: *Histoire de L'Academie royale des sciences. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie* (L'Imprimerie Royale, 1785), p. 569.
5. C.A. Coulomb. Second mémoire sur l'électricité et le magnétisme. In: *Histoire de L'Academie royale des sciences. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie* (L'Imprimerie Royale, 1785), p. 578.
6. S. Weinberg. *The Discovery of Subatomic Particles* (W.H. Freeman and Company, 1983).
7. M. Faraday. VI. Experimental researches in electricity. – Seventh series. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **124**, 77 (1834).
8. M. Faraday. I. Experimental researches in electricity. – Eleventh Series. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **128**, 1 (1838).
9. M. Faraday. I. Experimental researches in electricity. – Twelfth Series. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **128**, 83 (1838).
10. M. Faraday. XIII. Experimental researches in electricity. – Fourteenth series. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **128**, 265 (1838).
11. M. Faraday. XXXV. On the conservation of force. *Phil. Mag.* **13**, 225 (1857).
12. I. Newton. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (University of California Press, 1999).
13. A.H. Cook. The inverse square law of gravitation. *Contemp. Phys.* **28**, 159 (1975).
14. A.H. Cook. Experiments on gravitation. *Rep. Prog. Phys.* **51**, 707 (1988).
15. A.B. Pippard. *Forces and Particles. An Outline of the Principles of Classical Physics* (Macmillan Education, 1972).
16. R. Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics* (Cambridge University Press, 2012).
17. S.D. Poisson. Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. In *Mém. Classe Sci. Math. Phys. Inst. Imp. France, 1811* **12**, 1 (1812).
18. S.D. Poisson. Second mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. In *Mém. Classe Sci. Math. Phys. Inst. Imp. France, 1813* **12**, 163 (1814).
19. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля* (Наука, 1988).
20. J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, 1998).
21. S.D. Poisson. Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes. In *Bull. Sci. Soc. Philomat.* **3**, 388 (1813).
22. S.D. Poisson. Mémoire sur la Théorie du magnétisme en mouvement. In: *Mémoires de L'Académie Royale des Sciences de L'Institut de France. Année 1823. Tome 6* (Chez Firmin Didot, Père et Fils, Libraires, 1827, 1827), p. 441.

23. *Mathematical Papers of the Late George Green*. Edited by N.M. Ferrers (Macmillan, 1871).
24. C.F. Gauss. General Propositions relating to Attractive and Repulsive Forces acting in the inverse ratio of the square of the distance. In: *Scientific Memoirs. Selected from the Transactions of Foreign Academies of Science and Learned Societies and from Foreign Journals. Volume 3s*. Edited by R. Taylor (Richard and John E. Taylor, 1843), p. 153.
25. M. Faraday. I. Experimental researches in electricity. – Fifteenth series. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **129**, 1 (1839).
26. M. Faraday. LIV. Thoughts on ray-vibrations. *Phil. Mag.* **28**, 345 (1846).
27. L.P. Williams. *The Origins of Field Theory* (Random House, Inc., 1966).
28. W. Berkson. *Fields of Force. The Development of a World View from Faraday to Einstein* (Routledge, 1974).
29. D. Gooding. Final steps to the field theory: Faraday's study of magnetic phenomena, 1845–1850. *Hist. Stud. Phys. Sci.* **11**, 231 (1981).
30. Ю.А. Любимов. *Очерки по истории электромагнетизма и диэлектриков* (Бином, Лаборатория Знаний, 2008).
31. G.E. Smith, R. Seth. *Brownian Motion and Molecular Reality. A Study in Theory-Mediated Measurement* (Oxford University Press, 2020).
32. A.H. Sihvola. *Electromagnetic Mixing Formulas and Applications* (Institution of Electrical Engineers, 1999).
33. J.M. Ziman. The method of neutral pseudo-atoms in the theory of metals. *Adv. Phys.* **13**, 89 (1964).
34. G.D. Mahan. *Many-Particle Physics* (Kluwer Academic, 2000).
35. W. Thomson. *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism* (Macmillan, 1884).
36. J.C. Maxwell. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Vol. 1* (Dover Publications, 2011).
37. J.C. Maxwell. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Vol. 2* (Dover Publications, 2011).
38. O.D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory* (Springer Verlag, 1967).
39. J.Z. Buchwald. William Thomson and the mathematization of Faraday's electrostatics. *Hist. Stud. Phys. Sci.* **8**, 101 (1977).
40. M.N. Wise. The flow analogy to electricity and magnetism, part I: William Thomson's reformulation of action at a distance. *Arch. Hist. Exact Sci.* **25**, 19 (1981).
41. R.W. Home. Poisson's memoirs on electricity: academic politics and a new style in physics. *Brit. J. Hist. Sci.* **16**, 239 (1983).
42. W.A. Atherton. *From Compass to Computer. A History of Electrical and Electronics Engineering* (Macmillan Press, Ltd, 1984).
43. A. H-D. Cheng, D.T. Cheng. Heritage and early history of the boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.* **29**, 268 (2005).
44. G.C. Pantoja, W.S. Elias. Integration between Physics and Mathematics: the relation between Green's functions and method of images as a worked example. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **16**, 4308 (2015).
45. G.D. Mahan, R.M. Mazo. Coulomb interactions in an atomic dielectric. *Phys. Rev.* **175**, 1191 (1968).
46. R.D. Mindlin. On the electrostatic potential of a point charge in a dielectric solid. *Int. J. Solids Structures* **9**, 233 (1973).
47. J.C. Inkson. Screened exchange in semiconductors. *J. Phys. C* **6**, L181 (1973).
48. K. Schulze, K. Unger. The linear dielectric response of a semiconductor: a new analytic form for the dielectric function. *Phys. Status Solidi B* **66**, 491 (1974).
49. R. Resta. Macroscopic polarization in crystalline dielectrics: the geometric phase approach. *Rev. Mod. Phys.* **66**, 899 (1994).
50. R. Resta. Why are insulators insulating and metals conducting? *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, R625 (2002).
51. J.G. Hedley, K.K. Bhatt, H. Berthoumieux, A.A. Kornyshev. What does an ion feel at the electrochemical interface? Revisiting electrosorption through nonlocal electrostatics. *J. Chem. Phys.* **162**, 114703 (2025).
52. W.R. Smythe. *Static and Dynamic Electricity* (McGraw-Hill, 1950).
53. J. Heinrichs. Response of metal surfaces to static and moving point charges and to polarizable charge distributions. *Phys. Rev. B* **8**, 1346 (1973).
54. V.V. Batygin, I.N. Toptygin. *Problems in Electrodynamics* (Academic Press, 1978).
55. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред* (Наука, 1982).
56. D.J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, 1999).
57. W. Thomson. III. Geometrical investigations with reference to the distribution of electricity on spherical conductors. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Volume III*. Edited by W. Thomson (Macmillan, Barclay, and Macmillan, 1848), p. 141.
58. W. Thomson. XLV. On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors. *Phil. Mag.* **5**, 287 (1853).
59. M. Abraham, R. Becker. *The Classical Theory of Electricity and Magnetism* (Blackie and Son, 1932).
60. G.D. Mahan. Surface polaritons and the theory of image charge. *Phys. Rev. B* **5**, 739 (1972).
61. A.A. Kornyshev. Non-local enhancement of the dipole-dipole interaction at the interface of two dielectrics. *J. Electroanal. Chem.* **255**, 297 (1988).
62. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. Electrostatic interaction near the interface between dielectric media taking into account the nonlocality of the Coulomb field screening. *J. Mol. Liq.* **267**, 166 (2018).
63. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. The “non-Coulombic” character of classical electrostatic interaction between charges near interfaces. *Eur. J. Phys.* **39**, 045203 (2018).

64. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. Electrostatic interaction of point charges in three-layer structures: the classical model. *Condens. Matter* **4**, 44 (2019).
65. A.M. Gabovich, M.S. Li, H. Szymczak, A.I. Voitenko. Non-Coulombic behavior of electrostatic charge-charge interaction in three-layer heterostructures. *J. Electrostat.* **102**, 103377 (2019).
66. A.M. Gabovich, M.S. Li, H. Szymczak, A.I. Voitenko. Electric dipole image forces in three-layer systems: The classical electrostatic model. *J. Chem. Phys.* **152**, 094705 (2020).
67. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. Orientation of adsorbed polar molecules (dipoles) in external electrostatic field. *J. Phys.: Condens. Matter* **33**, 035004 (2021).
68. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. Electrostatic image force energy for charges in three-layer structures: Exact formulas and their approximations. *J. Phys.: Condens. Matter* **33**, 205002 (2021).
69. A.M. Gabovich, M.S. Li, H. Szymczak, A.I. Voitenko. Charge-charge interaction in three-layer systems: Classical approach. *Phys. Rev. B* **105**, 115415 (2022).
70. A.M. Gabovich, V.N. Gorshkov, V.F. Semeniuk, A.I. Voitenko. Influence of image forces on charge-dipole interaction in two-layered systems. *J. Chem. Phys.* **160**, 184710 (2024).
71. S. Earnshaw. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Transact. Cambridge Philosoph. Soc.* **7**, 97 (1842).
72. R. Weinstock. On a fallacious proof of Earnshaw's theorem. *Amer. J. Phys.* **44**, 392 (1970).
73. W. Jones. Earnshaw's theorem and the stability of matter. *Eur. J. Phys.* **1**, 85 (1980).
74. M.D. Simon, A.K. Geim. Diamagnetic levitation: Flying frogs and floating magnets (invited). *J. Appl. Phys.* **87**, 6200 (2000).
75. Y. Levin. Strange electrostatics in physics, chemistry, and biology. *Physica A* **352**, 49 (2005).
76. V. Ivchenko. Minimum energy principles in electrostatics. *Eur. J. Phys.* **46**, 015201 (2025).
77. N. Bruch, M. Eikerling, T. Binninger. Classical theory of electron-ion correlations at electrochemical interfaces: closing the circuit from double-layer charging to ion adsorption. *PRX Energy* **5**, 013009 (2026).
78. E.H. Lieb. The stability of matter. *Rev. Mod. Phys.* **48**, 553 (1976).
79. E.H. Lieb, R. Seiringer. *The Stability of Matter in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2009).
80. A.V. Sidiyakin. Calculation of the polarization contribution to the energy of interaction of a charge with the surface of a metal. *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **58**, 573 (1970).
81. N.D. Lang. The density-functional formalism and the electronic structure of metal surfaces. *Solid State Phys.* **28**, 225 (1973).
82. P.J. Jennings, S.M. Thurgate. The inner potential in LEED. *Surf. Sci.* **104**, L210 (1981).
83. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. Surface tension at the interface between electrolyte solution and metal (semiconductor) electrode. Spatial dispersion effects. *Electrochim. Acta* **28**, 1771 (1983).
84. P.J. Jennings, R.O. Jones. Beyond the method of images – the interaction of charged particles with real surfaces. *Adv. Phys.* **37**, 341 (1988).
85. D.K. Saldin, J.C.H. Spence. On the mean inner potential in high- and low-energy electron diffraction. *Ultramicroscopy* **55**, 397 (1994).
86. J.A. Sobota, Y. He, Z.-X. Shen. Angle-resolved photoemission studies of quantum materials. *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025006 (2021).
87. L. Onsager, N.N.T. Samaras. The surface tension of Debye-Hückel electrolytes. *J. Chem. Phys.* **2**, 528 (1934).
88. В.Е. Бравина. Некоторые вопросы теории поверхностного натяжения растворов сильных электролитов. *Вестн. Моск. ун-в.* N 2, 85 (1958).
89. V. Sahni. Quantum mechanics of asymptotic effective potential and “image” charge at metal surfaces. *Progr. Surf. Sci.* **54**, 115 (1997).
90. H.A. Bethe, E.E. Salpeter. *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Springer Verlag, 1957).
91. W.E. Lamb, Jr, R.C. Retherford. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.* **72**, 241 (1947).
92. I.J.R. Aitchison. Nothing's plenty. The vacuum in modern quantum field theory. *Contemp. Phys.* **26**, 333 (1985).
93. В.Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. *Квантовая электродинамика* (Физматлит, 1989).
94. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Volume III*. Edited by W. Thomson (Macmillan, Barclay, and Macmillan, 1848).
95. J.W. Gadzuk. The effects of screened exchange and correlation on the surface potential of an electron gas. *Surf. Sci.* **11**, 465 (1968).
96. J.C. Inkson. The electron-electron interaction near an interface. *Surf. Sci.* **28**, 69 (1971).
97. R.H. Ritchie. Surface plasmons and the image force in metals. *Phys. Lett. A* **38**, 189 (1972).
98. R. Ray, G.D. Mahan. Dynamical image charge theory. *Phys. Lett. A* **42**, 301 (1972).
99. M. Jonson. The dynamical image potential for tunneling electrons. *Solid State Commun.* **33**, 743 (1980).
100. A.M. Gabovich, V.M. Rosenbaum, A.I. Voitenko. Dynamical image forces in three-layer systems and field emission. *Surf. Sci.* **186**, 523 (1987).
101. P. Guéret, E. Marclay, H. Meier. Experimental observation of the dynamical image potential in extremely low GaAs/Al_xGa_{1-x}As/GaAs tunnel barriers. *Appl. Phys. Lett.* **53**, 1617 (1988).
102. A.M. Gabovich, V.M. Rozenbaum, A.I. Voitenko. Importance of the plasmon damping for the dynamical image forces. *Phys. Status Solidi B* **214**, 29 (1999).
103. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. Dynamic image forces near a metal surface and the point-charge motion. *Eur. J. Phys.* **33**, 1289 (2012).

104. M.A. Vorotyntsev. Model nonlocal electrostatics: II. Spherical interface. *J. Phys. C* **11**, 3323 (1978).
105. A.A. Kornyshev, M.A. Vorotyntsev. Model nonlocal electrostatics: III. Cylindrical interface. *J. Phys. C* **12**, 4939 (1979).
106. R. Messina. Image charges in spherical geometry: Application to colloidal systems. *J. Chem. Phys.* **117**, 11062 (2002).
107. A.A. Kornyshev, D.J. Lee, S. Leikin, A. Wynveen. Structure and interactions of biological helices. *Rev. Mod. Phys.* **79**, 943 (2007).
108. F. Loran, S. Moghimi-Araghi. Does a curved mirror honestly reflect your identity? A study of multipole images in front of a grounded sphere. *Eur. J. Phys.* **47**, 015104 (2026).
109. G. Wang, A. Chernikov, M.M. Glazov, T.F. Heinz, X. Marie, T. Amand, B. Urbaszek. Colloquium: Excitons in atomically thin transition metal dichalcogenides. *Rev. Mod. Phys.* **90**, 021001 (2018).
110. H.T. Nguyen-Truong. Exciton binding energy and screening length in two-dimensional semiconductors. *Phys. Rev. B* **105**, L201407 (2022).
111. A.M. Gabovich, A.I. Voitenko. Electrostatic charge-charge and dipole-dipole interactions near the surface of a medium with screening non-locality (Review Article). *Fiz. Nizk. Temp.* **42**, 841 (2016).
112. F.S. Cipcigan, J. Crain, V.P. Sokhan, G.J. Martyna. Electronic coarse graining: Predictive atomistic modeling of condensed matter. *Rev. Mod. Phys.* **91**, 025003 (2019).
113. C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley and Sons, 2005).
114. J. Tersoff. Theory of semiconductor heterojunctions: The role of quantum dipoles. *Phys. Rev. B* **30**, 4874 (1984).
115. M. Peressi, N. Binggeli, A. Baldereschi. Band engineering at interfaces: theory and numerical experiments. *J. Phys. D* **31**, 1273 (1998).
116. X. Crispin. Interface dipole at organic/metal interfaces and organic solar cells. *Solar Energy Materials and Solar Cells* **83**, 147 (2004).
117. N.C. Bristowe, P.B. Littlewood, E. Artacho. The net charge at interfaces between insulators. *J. Phys.: Condens. Matter.* **23**, 081001 (2011).
118. R. Kipling. In the neolithic age. In: *The Seven Seas* (Methuen and Co., 1986), p. 125.
119. R.T. Senger, K.K. Bajaj. Binding energies of excitons in polar quantum well heterostructures. *Phys. Rev. B* **68**, 205314 (2003).
120. L.S.R. Cavalcante, A. Chaves, B. VanDuppen, F.M. Peeters, D.R. Reichman. Electrostatics of electron-hole interactions in van der Waals heterostructures. *Phys. Rev. B* **97**, 125427 (2018).
121. E.C. Regan, D. Wang, E.Y. Paik, Y. Zeng, L. Zhang, J. Zhu, A.H. MacDonald, H. Deng, F. Wang. Emerging exciton physics in transition metal dichalcogenide heterobilayers. *Nat. Rev. Mater.* **7**, 778 (2022).
122. C.F. Gallo, W.L. Lama. Electrostatic model for the correlation between the work function and the ionization energy of the metallic elements. *IEEE Trans. Ind. Appl.* **IA-10**, 496 (1974).
123. C.F. Gallo, W.L. Lama. Classical electrostatic description of the work function and ionization energy of insulators. *IEEE Trans. Ind. Appl.* **IA-12**, 7 (1976).
124. C.F. Gallo, W.L. Lama. Some charge exchange phenomena explained by a classical model of the work function. *J. Electrostatics* **2**, 145 (1976).
125. A.G. Bailey. Electrostatic phenomena during powder handling. *Powder Technol.* **37**, 71 (1984).
126. K. Wong, S. Vongehr, V.V. Kresin. Work functions, ionization potentials, and in between: Scaling relations based on the image-charge model. *Phys. Rev. B* **67**, 035406 (2003).
127. M. Kumagai, T. Takagahara. Excitonic and nonlinear optical properties of dielectric quantum-well structures. *Phys. Rev. B* **40**, 12359 (1989).
128. K.S. Thygesen. Calculating excitons, plasmons, and quasiparticles in 2D materials and van der Waals heterostructures. *2D Mater.* **4**, 022004 (2017).
129. H. Zahra, A. Hichri, S. Jaziri. Comparative study of the exciton binding energies of thin and ultrathin organic-inorganic perovskites due to dielectric mismatch effects. *J. Appl. Phys.* **122**, 015701 (2017).
130. J.R. Barker, A. Martinez. Image charge models for accurate construction of the electrostatic self-energy of 3D layered nanostructure devices. *J. Phys.: Condens. Matter.* **30**, 134002 (2018).
131. C. Katan, N. Mercier, J. Even. Quantum and dielectric confinement effects in lower-dimensional hybrid perovskite semiconductors. *Chem. Rev.* **119**, 3140 (2019).
132. C. Jiao, S. Pei, S. Wu, Z. Wang, J. Xia. Tuning and exploiting interlayer coupling in two-dimensional van der Waals heterostructures. *Rep. Prog. Phys.* **86**, 114503 (2023).
133. G.D. Scholes. Insights into excitons confined to nanoscale systems: Electron-hole interaction, binding energy, and photodissociations. *ACS Nano* **2**, 523 (2008).
134. D. Neilson, A. Perali, A.R. Hamilton. Excitonic superfluidity and screening in electron-hole bilayer systems. *Phys. Rev. B* **89**, 060502 (2014).
135. T.A.S. Pereira, J.S. deSousa, J.A.K. Freire, G.A. Farias. On the interplay between quantum confinement and dielectric mismatch in high- κ based quantum wells. *J. Appl. Phys.* **108**, 054311 (2010).
136. J.M. Garcia-Lastra, K.S. Thygesen. Renormalization of optical excitations in molecules near a metal surface. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 187402 (2011).
137. A. Garg. An instructive paradox in the method of images. *Amer. J. Phys.* **94**, 197 (2026).
138. A.G. Bailey. Charging of solids and powders. *J. Electrostatics* **30**, 167 (1993).

Одержано 11.09.26

A.I. Voitenko, A.M. Gabovich

INFLUENCE OF INTERFACE
POLARIZATION ON CHARGE-CHARGE
INTERACTION IN TWO-LAYER SYSTEMS

The influence of a plane interface between two semi-infinite dielectrically dissimilar insulators on the interaction of two point charges located near it has been analyzed. It was shown that their interaction is significantly modified by the polarization charges induced at the interface. In particular, if the charges are in the same medium, then the dependence of their interaction energy W on the distance D between the charges differs from the Coulomb law. At the same time, if the charges are in different media, the interaction law remains Coulom-

bic, but with an effective dielectric constant value. Deviations from the Coulombic interaction were calculated quantitatively and investigated analytically. The maps $W(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_p)$ describing the profiles of W as a function of the charges' coordinates $\mathbf{R}_s$ and $\mathbf{R}_p$ are presented. The approximations of $W(D)$ were obtained and their validity was analyzed. It was concluded that in layered structures, polarization corrections should always be taken into account when studying various properties of charged entities, e.g., electrons and holes forming Wannier-Mott excitons.

Keywords: two-layer structures, dielectric mismatch, charge-charge interaction, polarization forces, non-Coulombic dependence.