

О.О. ВАХНЕНКО,¹ В.О. ВАХНЕНКО²

¹ Відділ теорії нелінійних процесів у конденсованих середовищах,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(вул. Метрологічна 14-б, Київ 03143, Україна;
e-mail: vakhnenko@bitr.kyiv.ua; <https://orcid.org/0000-0001-8371-9499>)

² Відділення геодинаміки вибуху,
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України
(вул. Богдана Хмельницького 63-В, Київ 01054, Україна;
<https://orcid.org/0000-0002-1250-9563>)

ІНТЕГРОВАНА ПАРАМЕТРИЧНО ЗБУДЖУВАНА НЕЛІНІЙНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА ПСЕВДОЕКСИТОНІВ НА ДВОНІЖКОВІЙ ДРАБИНЧАТІЙ ҐРАТЦІ. ЯВНО ЗДІЙСНЕННЯ ФОРМУЛЮВАННЯ

Чітко і доступно сформульовано засадничі ознаки інтегрованої параметрично збуджуваної нелінійної динамічної системи псевдоекситонів на двоніжковій драбинчатій ґратці. Запропоновано та детально описано явну, проте досить загальну реалізацію параметричного рушія, придатного для послідовної побудови техніки інтегрування системи методом Дарбу–Беклунда.

Ключові слова: нелінійна динаміка, інтегрована система, двоніжкова драбинчата ґратка, параметричне збуджування, Гамільтонова динаміка.

1. Вступ

У 2002 році ми звернули увагу на дуже цікаву та перспективну властивість напівдискретних (диференційно-різницевих) нелінійних інтегрованих систем, котору в тогочасній науковій літературі або не помічали, або свідомо ігнорували. Ця властивість полягає в потенційній здатності певних напівдискретних нелінійних інтегрованих систем інкорпорувати довільну часову залежність параметричного збуджування без втрати інтегровності самої системи [1]. Кожна з таких параметрично збуджуваних систем не втрачає свого Гамільтонового формулювання всупереч відсутності закону збереження сумарної енергії з поміж ієрархії законів збереження. Назагал, специфіка формалізації

параметричного збуджування зазначених систем полягає у домноженні кількох доречних збережливих величин на деякі часозалежні параметри та наступному формуванні суми утворених комбінацій у прийнятну Гамільтонову функцію.

Відверто кажучи, наше спостереження щодо строгих Гамільтонових формулювань параметрично збуджуваних напівдискретних нелінійних інтегрованих систем повністю узгоджується з основними твердженнями загальної теорії часозалежних Гамільтонових систем [2–5].

Нещодавно ми розробили інтегровну параметрично збуджувану нелінійну динамічну систему псевдоекситонів на двоніжковій драбинчатій ґратці, де параметричне збуджування моделюється як часозалежними параметрами (множниками) міжвузлового зв'язку, так і просторово незалежними польовими функціями [6]. Загалом, такий симбіоз параметричних збуджувальних завадить прояву явних часових залежностей в строгих аналітичних розв'язках системи. Отже, дотепер ми обмежувались лише параметричними збуджуваннями типу гармонічних коливань на часонезалежному тлі [6].

Цитування: Вахненко О.О., Вахненко В.О. Інтегрована параметрично урухомлювана нелінійна динамічна система псевдозбуджень на двоніжковій драбинчатій ґратці. Явно здійсненне формулювання. *Укр. фіз. журн.* **71**, № 5, 453 (2026).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2026. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2026. Т. 71, № 5

У цій статті ми формулюємо досить перспективний підхід, що значно розширює клас довільних параметричних збуджувань, застосовних до побудови явних аналітичних розв'язків інтегрованої параметрично збуджуваної нелінійної динамічної системи псевдоекситонів на двоніжковій драбинчатій ґратці.

2. Напівдискретна параметрично збуджувана нелінійна інтегровна система у стислій Гамільтоновій формі

Динамічні рівняння нашої параметрично збуджуваної нелінійної інтегрованої системи мають звичайний Гамільтоновий вигляд [6]

$$\frac{d}{d\tau}g_{21}(n) = -\frac{\partial H}{\partial g_{12}(n)} \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{d\tau}g_{12}(n) = +\frac{\partial H}{\partial g_{21}(n)} \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{d\tau}g_{23}(n) = -\frac{\partial H}{\partial g_{32}(n)} \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{d\tau}g_{32}(n) = +\frac{\partial H}{\partial g_{23}(n)} \quad (2.4)$$

з наступним нестандартним Гамільтоніаном [6]

$$\begin{aligned} H = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{21}(m)a_{11}g_{12}(m) - g_{21}(m+1)f_{11}g_{12}(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{21}(m)a_{13}g_{32}(m) - g_{21}(m+1)f_{13}g_{32}(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{23}(m)a_{33}g_{32}(m) - g_{23}(m+1)f_{33}g_{32}(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{23}(m)a_{31}g_{12}(m) - g_{23}(m+1)f_{31}g_{12}(m)] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[g_{21}(m)g_{12}(m) + g_{23}(m)g_{32}(m)]^2}{2\sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Тут символ n позначає дискретну повздовжню просторову координатну змінну, що пробігає значення від мінус нескінченности до плюс нескінченности, тоді як символ τ позначає неперервну часову змінну. Польові функції $g_{21}(n)$ та $g_{12}(n)$ мають сенс канонічно спряжених амплітуд динамічного поля, прив'язаних до однієї ніжки драбинчатої ґратки, тоді як польові функції $g_{23}(n)$ та $g_{32}(n)$

мають сенс канонічно спряжених амплітуд динамічного поля, прив'язаних до іншої ніжки драбинчатої ґратки.

Параметричне збуджування системи зумовлено часовою залежністю величин a_{jk} , а також часовою залежністю просторово незалежних функцій f_{jk} . Водночас функції f_{jk} мають задовольняти наступну лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{d\tau}f_{11} = a_{13}f_{31} - f_{13}a_{31} \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{d\tau}f_{13} = a_{11}f_{13} + a_{13}f_{33} - f_{11}a_{13} - f_{13}a_{33} \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{d\tau}f_{33} = a_{31}f_{13} - f_{31}a_{13} \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{d\tau}f_{31} = a_{33}f_{31} + a_{31}f_{11} - f_{33}a_{31} - f_{31}a_{11} \quad (2.9)$$

з часозалежними коефіцієнтами a_{jk} . Загалом ці коефіцієнти a_{jk} можуть бути довільними функціями часу τ . Ці, на позір дуже жорсткі, вимоги до функцій f_{jk} параметричного рушія вдається детально пом'якшити завдяки двом взаємним фундаментальним обмеженням

$$\frac{d}{d\tau}(f_{11} + f_{33}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{d\tau}(f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}) = 0 \quad (2.11)$$

на функції f_{jk} , що впливають безпосередньо з автентичних рівнянь їхнього руху (2.5)–(2.9).

Окрім параметричного збуджування функції f_{11} та f_{33} встановлюють однобічно прикладену взаємодію між сусідніми вузлами вздовж ланцюгів драбинчатої ґратки, тоді як функції f_{13} та f_{31} , а також параметри a_{13} та a_{31} встановлюють взаємодію між сусідніми вузлами впоперек ланцюгів.

Однобічно прикладений (асиметричний) тип лінійного зв'язку між вузлами вздовж певного ланцюга явно контрастує з двобічно прикладеним (симетричним) лінійним типом зв'язку між вузлами вздовж певного ланцюга, характерним для традиційних молекулярних екситонів [7–9]. Саме тому внутрішньовузлові збудження нашої напівдискретної нелінійної інтегрованої системи (2.1)–(2.5) і треба називати псевдоекситонними.

3. Батьківська форма напівдискретної параметрично збуджуваної нелінійної інтегрованої системи та представлення нульової кривини для неї

Розглядувана напівдискретна параметрично збуджувана нелінійна інтегрована Гамільтонова система (2.1)–(2.5) постає з її батьківської форми [6]

$$\frac{d}{d\tau} f_{21}(n) = f_{21}(n+1)f_{11} + f_{23}(n+1)f_{31} - f_{21}(n)a_{11} - f_{22}(n)f_{21}(n) - f_{23}(n)a_{31} \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{d\tau} f_{12}(n) = a_{11}f_{12}(n) + f_{12}(n)f_{22}(n) + a_{13}f_{32}(n) - f_{11}f_{12}(n-1) - f_{13}f_{32}(n-1) \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{d\tau} f_{23}(n) = f_{21}(n+1)f_{13} + f_{23}(n+1)f_{33} - f_{21}(n)a_{13} - f_{22}(n)f_{23}(n) - f_{23}(n)a_{33} \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{d\tau} f_{32}(n) = a_{31}f_{12}(n) + f_{32}(n)f_{22}(n) + a_{33}f_{32}(n) - f_{31}f_{12}(n-1) - f_{33}f_{32}(n-1) \quad (3.4)$$

$$f_{22}(n) = \frac{f_{21}(n)f_{33}f_{12}(n) + f_{23}(n)f_{11}f_{32}(n)}{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}} - \frac{f_{21}(n)f_{13}f_{32}(n) + f_{23}(n)f_{31}f_{12}(n)}{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}. \quad (3.5)$$

Своєю чергою батьківська система (3.1)–(3.5) допускає напівдискретне представлення нульові кривини [10–13]

$$\frac{d}{d\tau} L(n|\lambda) = A(n+1|\lambda)L(n|\lambda) - L(n|\lambda)A(n|\lambda), \quad (3.6)$$

специфіковане спектральною [6]

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12}(n) & f_{13} \\ f_{21}(n) & f_{22}(n) + \lambda & f_{23}(n) \\ f_{31} & f_{32}(n) & f_{33} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

та еволюційною [6]

$$A(n|\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & f_{12}(n-1) & a_{13} \\ f_{21}(n) & \lambda & f_{23}(n) \\ a_{31} & f_{32}(n-1) & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

допоміжними матрицями. Тут часонезалежний спектральний параметр позначено як λ .

Відповідно до загальних правил [14–17] наявність представлення нульової кривини (3.6)–(3.8) для батьківської напівдискретної нелінійної системи (3.1)–(3.5) є запорукою інтегровності в сенсі Лакса для батьківської системи (3.1)–(3.5), а отже і для її Гамільтонової модифікації (2.1)–(2.5).

4. Взаємозв'язок між батьківською та Гамільтоновою напівдискретними параметрично збуджуваними нелінійними інтегровними системами

Зв'язок між батьківськими польовими функціями $f_{21}(n)$, $f_{12}(n)$, $f_{23}(n)$, $f_{32}(n)$ та Гамільтоновими функціями $g_{21}(n)$, $g_{12}(n)$, $g_{23}(n)$, $g_{32}(n)$ ґрунтується на формулах перетворення [6]

$$g_{21}(n) = f_{21}(n)e_{11} + f_{23}(n)e_{31} \quad (4.1)$$

$$g_{12}(n) = e_{11}f_{12}(n) + e_{13}f_{32}(n) \quad (4.2)$$

$$g_{23}(n) = f_{21}(n)e_{13} + f_{23}(n)e_{33} \quad (4.3)$$

$$g_{32}(n) = e_{31}f_{12}(n) + e_{33}f_{32}(n), \quad (4.4)$$

підпорядкованих фізично вмотивованій умові

$$g_{21}(n)g_{12}(n) + g_{23}(n)g_{32}(n) = f_{22}(n) \sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}. \quad (4.5)$$

Завдяки прийнятій умові (4.5) часозалежні трансформаційні коефіцієнти e_{jk} набувають явного формульного виду

$$e_{11} = \frac{1}{2e} + \frac{f_{33}}{2e \sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}} \quad (4.6)$$

$$e_{13} = -\frac{f_{13}}{2e \sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}} \quad (4.7)$$

$$e_{33} = \frac{1}{2e} + \frac{f_{11}}{2e \sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}} \quad (4.8)$$

$$e_{31} = -\frac{f_{31}}{2e \sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}}. \quad (4.9)$$

Тут

$$e^2 = \frac{1}{2} + \frac{f_{11} + f_{33}}{4 \sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}}, \quad (4.10)$$

і справджується тотожність

$$e_{11}e_{33} - e_{13}e_{31} \equiv 1. \quad (4.11)$$

Похідні часозалежних коефіцієнтів e_{jk} задають формули

$$\frac{d}{d\tau} e_{11} = a_{13}e_{31} - e_{13}a_{31} \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{d\tau} e_{13} = a_{11}e_{13} - e_{11}a_{13} + a_{13}e_{33} - e_{13}a_{33} \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{d\tau} e_{33} = a_{31}e_{13} - e_{31}a_{13} \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{d\tau} e_{31} = a_{33}e_{31} - e_{33}a_{31} + a_{31}e_{11} - e_{31}a_{11}, \quad (4.15)$$

що впливають з еволюційних рівнянь для функцій збуджування (2.6)–(2.9).

Прості, але дещо громіздкі маніпуляції з формулами перетворення (4.1)–(4.11) та еволюційними рівняннями батьківської системи (3.1)–(3.5), доповнені виразами (4.12)–(4.15) для похідних за часом $de_{jk}/d\tau$, трансформують батьківську напівдискретну нелінійну інтегровну систему (3.1)–(3.5) у Гамільтонову (2.1)–(2.5).

Встановлений зв'язок між Гамільтоною (2.1)–(2.5) та батьківською (3.1)–(3.5) формами нашої напівдискретної параметрично збуджуваної нелінійної інтегрованої системи є надзвичайно важливим підґрунтям для практичного інтегрування рівнянь цих систем методом перетворення Дарбу–Беклунда, заснованим на матрицезначній допоміжній лінійній задачі

$$X(n+1|\lambda) = L(n|\lambda)X(n|\lambda) \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{d\tau} X(n|\lambda) = A(n|\lambda)X(n|\lambda) \quad (4.17)$$

зі спектральною $L(n|\lambda)$ та еволюційною $A(n|\lambda)$ матрицями (3.7) та (3.8), родовими для батьківської системи (3.1)–(3.5).

5. Неприйнятний окремий варіант супровідного параметричного збуджування

Перш ніж узятися до написання нашої попередньої статті [6], ми спробували розробити техніку одягання Дарбу–Беклунда для отримання явних аналітичних розв'язків запропонованої напівдискретної параметрично збуджуваної нелінійної інтегрованої системи (2.1)–(2.5), спираючись на підстановку [6]

$$f_{jk} = u_{jk} + v_{jk} \quad (5.1)$$

$$a_{jk} = u_{jk} - v_{jk}, \quad (5.2)$$

де доданки u_{jk} покладено незалежними від часу

$$\frac{d}{d\tau} u_{jk} = 0. \quad (5.3)$$

У результаті ми одержали гармонічно осцилюючі вирази для часозалежних доданків v_{jk} [6].

На жаль, усі спроби впровадити цей здогадно обнадійливий результат до методу Дарбу–Беклунда виявилися марними, оскільки нам так і не вдалося встановити явні часові залежності для засівних польових розв'язків.

Що ж стосується численних рекомендацій, пропонує теорією лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для пошуку наближених розв'язків [2, 3], то вони за своєю суттю абсолютно не придатні для побудови точних аналітичних розв'язків, декларованих теорією нелінійних інтегровних систем.

6. Прийнятний явно визначений веріант супровідного параметричного збуджування

Аби подолати перешкоди, описані у попередньому розділі для неприйняттого варіанту супутнього параметричного збуджування, запостулюємо наступні підстановки

$$a_{11} = f_{11} + v_{11} \quad (6.1)$$

$$a_{13} = f_{13} \quad (6.2)$$

$$a_{33} = f_{33} + v_{33} \quad (6.3)$$

$$a_{31} = f_{31}. \quad (6.4)$$

Тоді система звичайних диференціальних рівнянь з часозалежними коефіцієнтами (2.6)–(2.9) набуває дуже простої форми

$$\frac{d}{d\tau} f_{11} = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{d}{d\tau} f_{13} = v_{11}f_{13} - f_{13}v_{33} \quad (6.6)$$

$$\frac{d}{d\tau} f_{33} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{d}{d\tau} f_{31} = v_{33}f_{31} - f_{31}v_{11}, \quad (6.8)$$

котора явно інтегровна за будь-якого довільного вибору часових залежностей збуджувальних коефіцієнтів v_{11} та v_{33} .

У такий спосіб одержуємо

$$f_{11} = u_{11} \quad (6.9)$$

$$f_{13} = u_{13} \exp(+V_{11} - V_{33}) \quad (6.10)$$

$$f_{33} = u_{33} \quad (6.11)$$

$$f_{31} = u_{31} \exp(+V_{33} - V_{11}), \quad (6.12)$$

де

$$\frac{d}{d\tau} V_{11} \equiv v_{11} \quad (6.13)$$

$$\frac{d}{d\tau} V_{33} \equiv v_{33}, \quad (6.14)$$

а параметри u_{jk} не залежать від часу

$$\frac{d}{d\tau} u_{jk} = 0. \quad (6.15)$$

Одержані явні вирази (6.9)–(6.15) для функцій збуджування f_{jk} вочевидь підтверджують їхні раніше вказані фундаментальні властивості (2.10)–(2.11).

Насправді параметричне збуджування напівдискретної нелінійної інтегрованої системи чи то в батьківському (3.1)–(3.5), чи то в Гамільтоновому (2.1)–(2.5) уособленні строго регулюється часовою поведінкою лише двох функцій V_{11} та V_{33} , котрі можна дібрати довільно відповідно до потреб конкретної розв'язуваної задачі.

Звернімо увагу на те, що будь-яка процедура беспосереднього інтегрування має бути розроблена виключно на основі властивостей батьківської системи як родової. Після цього одержані розв'язки можна легко переформулювати в термінах Гамільтонової системи, використовуючи результати нашого поточного дослідження.

7. Явне представлення засівних полів як один з визначальних чинників інтегрування методом Дарбу–Беклунда

Відомо, що одним з визначальних чинників у розроблюванні доречного методу інтегрування Дарбу–Беклунда для напівдискретних нелінійних інтегрованих систем є правильний вибір так званих засівних розв'язків [12, 13, 15].

З огляду на практичність явного варіанта супутнього параметричного збуджування, сформульованого в розділі 6, слушно будувати той чи інший засівний розв'язок батьківської напівдискретної нелінійної інтегрованої системи (3.1)–(3.5) в рамках саме цього явного варіанта (6.9)–(6.15). Принагідно подамо найпростіший продуктивний засівний розв'язок батьківської системи в такому явному вигляді

$${}^0 f_{12}(n) = u_{12} \exp(+V_{11}) \quad (7.1)$$

$${}^0 f_{21}(n) = 0 \quad (7.2)$$

$${}^0 f_{23}(n) = 0 \quad (7.3)$$

$${}^0 f_{32}(n) = u_{32} \exp(+V_{33}). \quad (7.4)$$

Тут просторово незалежні коефіцієнти u_{12} та u_{32} вважаємо також і часонезалежними

$$\frac{d}{d\tau} u_{12} = 0 = \frac{d}{d\tau} u_{32}. \quad (7.5)$$

Основна мета майбутньої техніки інтегрування досліджуваної системи (3.1)–(3.5) методом перетворення Дарбу–Беклунда полягає в одяганні наведеного вище засівного розв'язку (7.1)–(7.4) до так званого ужинкового аналітичного розв'язку, що охоплював би найбільш характерні риси просторово-часової динаміки системи.

8. Висновки

У цій статті ми зробили важливий технічний крок до фактичного аналітичного інтегрування параметрично збуджуваної нелінійної динамічної системи псевдоекситонів на двоніжковій драбинчатій ґратці. Розглядувана тут нелінійна динамічна система була побудована в нашій попередній праці [6]. Проте дотепер було неясно яким чином застосувати факт її інтегровності в сенсі Лакса в явно здійснених термінах, оскільки раніше запропонована конкретна форма параметричного збуджування не приводила до явних часових залежностей засівних значень польових функцій. Тепер цю задачу розв'язано за допомоги досить загальної форми параметричного збуджування, що допускає явні часові залежності для засівних розв'язків польових функцій. Явні ж часозалежні засівні розв'язки відкривають прямий практично здоланий шлях до інтегрування системи в термінах доречно розробленої техніки одягання засівних розв'язків методом перетворення Дарбу–Беклунда.

Розлогі пошуки явних аналітичних розв'язків для інтегрованої параметрично збуджуваної нелінійної динамічної системи псевдоекситонів на двоніжковій драбинчатій ґратці методом перетворення Дарбу–Беклунда натепер тривають.

Олексій О. Вахненко висловлює подяку Національній академії наук України за підтримку в рамках проекту № 0122U000887. В'ячеслав О. Вахненко висловлює подяку Національній академії наук України за підтримку в рамках проекту № 123U100182. Олексій О. Вахненко також висловлює подяку Фонду Саймонса (США) за підтримку в рамках ґранта SFI-PD-Ukraine-00014573.

1. O. O. Vakhnenko. Solitons in parametrically driven discrete nonlinear Schrödinger systems with the exploding range of intersite interactions. *J. Math. Phys.* **43** (5), 2587 (2002).

2. V.A. Yakubovich, V.M. Starzhinskii. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. Vol. 1–2* (John Wiley, New York, 1975).
3. V.A. Yakubovich, V.M. Starzhinskii. *Parametric Resonance in Linear Systems* (Nauka, Moscow, 1987).
4. A. Dewisme, S. Bouquet. First integrals and symmetries of time-dependent Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.* **34** (3), 997 (1993).
5. Jü. Struckmeier, C. Riedel. Invariants for time-dependent Hamiltonian systems. *Phys. Rev. E* **64** (2), 026503 (9 pages) (2001).
6. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko. Development and analysis of novel integrable nonlinear dynamical systems on quasi-one-dimensional lattices. Parametrically driven nonlinear system of pseudo-excitations on a two-leg ladder lattice. *Ukr. J. Phys.* **69** (8), 577 (2024).
7. A.S. Davydov. *Theory of Molecular Excitons* (Plenum Press, New York–London, 1971).
8. A.S. Davydov, N.I. Kislukha. Solitary excitons in one-dimensional molecular chains. *Phys. Stat. Solidi B* **59** (2), 465 (1973).
9. A.S. Davydov, N.I. Kislukha. Solitons in one-dimensional molecular chains. *Phys. Stat. Solidi B* **75** (2), 735 (1976).
10. L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
11. G.-Z. Tu. A trace identity and its applications to the theory of discrete integrable systems. *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (17), 3903 (1990).
12. O.O. Vakhnenko. Semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling. *J. Nonlin. Math. Phys.* **24** (2), 250 (2017).
13. O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable dynamics of coupled vibrational and intra-site excitations on a regular one-dimensional lattice. *Phys. Lett. A* **405**, 127431 (6 pages) (2021).
14. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko. Development and analysis of novel integrable nonlinear dynamical systems on quasi-one-dimensional lattices. Two-component nonlinear system with the on-site and spatially distributed inertial mass parameters. *Ukr. J. Phys.* **69** (3), 168 (2024).
15. O.O. Vakhnenko, A.P. Verchenko. Nonlinear system of \mathcal{PT} -symmetric excitations and Toda vibrations integrable by the Darboux–Bäcklund dressing method. *Proc. R. Soc. A* **477** (2256), 20210562 (18 pages) (2021).
16. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, A.P. Verchenko. Physical insight into the semi-discrete nonlinear integrable systems with the true and false multicomponentness. *Chaos, Solitons and Fractals* **200** (2), 117043 (24 pages) (2025).
17. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko. Integrable twelve-component nonlinear dynamical system on a quasi-one-dimensional lattice. *SIGMA* **21**, 089 (17 pages) (2025).

Одержано 25.11.25.

Переклала українською мовою Зоя І. Вахненко

O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko

INTEGRABLE PARAMETRICALLY
DRIVEN NONLINEAR DYNAMICAL
SYSTEM OF PSEUDO-EXCITATIONS
ON A TWO-LEG LADDER LATTICE.
EXPLICITLY MANAGEABLE FORMULATION

The basic features of the integrable parametrically driven nonlinear dynamical system of pseudo-excitations on a two-leg ladder lattice are formulated in clear and understandable terms. The explicit but rather general realization of parametric drive suitable for the strict development of system's Darboux–Bäcklund integration technique is proposed and described in details.

Keywords: nonlinear dynamics, integrable system, two-leg ladder lattice, parametric drive, Hamiltonian dynamics.