

О. МИХАЙЛІВ, Ю. МІЩЕНКО, О. ГАВРИЛИК

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143 Україна; e-mail: mykhailiv@bitp.kyiv.ua,
mishchenko@bitp.kyiv.ua, omgavr@bitp.kyiv.ua)

μ -ДЕФОРМОВАНІ РІВНЯННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ АЙНШТАЙНА ІЗ ЗАЛЕЖНОЮ ВІД μ ЕФЕКТИВНОЮ КОСМОЛОГІЧНОЮ СТАЛОЮ

УДК 539

Застосовуючи адаптований підхід Верлінде до узагальнених термодинамічних функцій μ -деформованого аналога моделі бозе-газу, ми отримали μ -деформовані рівняння Айнштейна. Показана основна роль параметра деформації, що забезпечує можливість варіювати значення космологічної сталої. Завдяки цьому запропоновано цікаве трактування проблеми космологічної сталої (КС) у рамках μ -деформаційного підходу. А саме: розглядаючи виведену μ -деформовану КС як ефективну та відповідно змінюючи параметр μ , ми отримали можливість радикально зменшити КС, з тим щоб наблизити її до реалістичного значення. Також обговорюється зв'язок із темною матерією.

Ключові слова: ентропійна сила, гравітація, μ -модель бозе-газу, ефективна космологічна стала, темна матерія.

1. Вступ

Різноманітні деформовані алгебри дають цінне розуміння широкого кола проблем у багатьох галузях фізики. Серед різних типів деформації, які найзручніше та найчіткіше характеризуються структурною функцією деформації (див., наприклад, [1]), існують дуже популярні та добре вивчені деформовані алгебри експоненціального типу, такі як q -осцилятори [2–4] або p, q -осцилятори [5]. На відміну від них, μ -деформація, вперше введена Яннусісом [6], належить до зовсім іншого класу неканонічних алгебр Гайзенберга, а саме до класу раціональних деформацій. Це передбачає існування дуже різних властивостей, і нефібоначчівська природа [7] є однією з них. Це розширення відкрило нові перспективи для дослідження квантових систем з модифікованими алгебраїчними структурами, пропонуючи потенційні застосування в таких галузях, як фізика високих енергій, квантова гравітація та фізика карликових галактик.

Цитування: Михайлів О., Міщенко Ю., Гаврилик О. μ -деформовані рівняння гравітаційного поля Айнштейна із залежною від μ ефективною космологічною сталою. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 12, 847 (2025).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Концепція μ -деформації розроблялась у кількох аспектах та застосовувалась до різних фізичних проблем. Наприклад, було встановлено квазіфібоначчівську природу нелінійного μ -деформованого осцилятора для запропонованих розширень або гібридних випадків $(\mu; p, q)$ [7], побудовано застосування до деформованих версій нерелятивістської моделі бозе-газу [8, 10, 11], та отримано точки перетину з функціями кореляції імпульсу r -частинок у μ -моделі бозе-газу [8, 9]. Були введені пов'язані, близькі деформації, та показано, що вони здатні враховувати композитність та взаємодію частинок [12]. Відповідний варіант деформації був успішно застосований для опису ентропії запутаності у композитних (квазі)бозонних системах [13, 14]. Варто також відзначити температурну залежність віріальних коефіцієнтів та перетини кореляційних функцій в моделі (μ, q) -бозе-газу [15, 16], конденсат μ -бозе-газу як ефективну модель темної матерії галактичних гало [17, 18], та профіль щільності гало карликових галактик або галактик з низькою поверхневою яскравістю та їх криві обертання [19].

Одним з відомих підходів до квантової гравітації є теорія індукованої гравітації. Як відомо, вона розгалужується на квантово-польовий підхід Сахарова [22, 23] та емерджентну (термостатистичну, ентропійну) теорію. У загальному контексті квантової гравітації, Верлінде сформулював тео-

рію індукованої гравітації, в якій гравітація розуміється як емерджентне явище, що виникає внаслідок ентропійних сил [24]. Його підхід ґрунтується на статистичній механіці та включає голографічний принцип, як це було спочатку запропоновано 'т Хофтом [25], але він відрізняється від термостатистичної перспективи Падманабхана щодо гравітації [26].

Схема Верлінде постулює, що гравітаційна динаміка, описана або теорією Ньютона, або загальною теорією відносності, не є фундаментальною взаємодією, а виникає як ефективний макроскопічний опис базової статистичної системи. Ця система регулюється класичною статистикою та голографічним принципом, де термодинамічні величини, такі як ентропія, відіграють ключову роль у виникненні геометрії простору-часу та гравітаційних сил. З цієї точки зору, ентропійну силу можна інтерпретувати як прояв основних мікроскопічних ступенів свободи, закодovаних у статистичних властивостях системи [24].

Крім того, у підході Верлінде припускається, що сам простір-час може бути індукованим явищем, що походить від колективної поведінки мікроскопічних ступенів свободи, подібно до того, як термодинамічні величини виникають з мікроскопічних станів матерії. Цей погляд має глибокі наслідки для розуміння квантової гравітації, забезпечуючи потенційний місток між термодинамічним описом простору-часу та квантово-механічним описом фундаментальних взаємодій. Голографічний принцип ще більше посилює цей зв'язок, припускаючи, що ступені свободи (біти інформації), які описують гравітаційну систему, закодovані на межі нижчої вимірності, подібно до відповідності AdS/CFT у теорії струн [54, 55]. Таким чином, підхід Верлінде відкриває нові шляхи для дослідження взаємозв'язку між гравітацією, термодинамікою та квантовою механікою.

Окрім класичної статистики, деформовані аналоги квантової статистики можуть бути застосовані в контексті індукованої гравітації [32, 33]. Відповідні фізичні системи (наприклад, квантові чорні діри) будуть описуватися деформованими термостатичними функціями; отже, застосовуючи до них підхід Верлінде, можна отримати деформовані аналоги рівнянь поля Айнштейна. Прийняття однопараметричної квантової групи $SU_q(2)$ моделі взаємодіючого бозонного газу Убріако при-

водить до відповідних q -деформованих рівнянь гравітаційного поля Айнштейна [27], використання (p, q) -деформованої моделі фермі-газу індукує (p, q) -деформовані рівняння поля Айнштейна [28, 29], а для q -деформованої моделі ферміонного газу Вішванатана-Партхасараті-Джаганнатана-Чайчіана виникають q -деформовані рівняння поля Айнштейна [30]. Аналогічно, для q -деформованої моделі ферміонного газу у двовимірному просторі виникає ще один тип q -деформованих рівнянь гравітаційного поля Айнштейна [31].

Деформовані рівняння Айнштейна для моделей q -деформованого бозонного та q -ферміонного газів у границі високих температур досліджувалися в роботі [34]. Нарешті, в роботі [37] було отримано дві версії модифікованих рівнянь Айнштейна на основі GUP-скоригованої температури Унру та підходу Верлінде. Підхід Верлінде зіткнувся з неоднозначними відображеннями та деякою критикою; див., наприклад, роботи [38–45]. З іншого боку, існує широкий спектр модифікованих ентропійних гравітацій, що включає некомутивативність, ангравітацію як конформно-інваріантні поля, асимптотично безпечну гравітацію, поправку енергії Дебая, поверхневу ентропійну гравітацію тощо [45–49, 53].

Стаття організована таким чином. У розділі 2.1 наведено короткий огляд μ -бозе-термодинаміки. У розділі 2.2, виводиться μ -деформований аналог рівняння Айнштейна, дотримуючись логіки адаптованого підходу Верлінде та спираючись на μ -деформовану модель бозе-газу. Відмітимо, що в рамках розробленої версії ентропійної гравітації може бути отримане μ -деформоване рівняння Фрідмана та досліджене його застосування до космології. У розділі 3 детально аналізуються наслідки для отриманого ефективного (залежного від μ) розширення космологічної сталої. Робота завершується прикінцевими зауваженнями.

2. μ -деформовані рівняння Айнштейна з використанням адаптованого підходу Верлінде

2.1. Термостатика μ -моделі газу Бозе

Почнемо з нагадування деяких фактів, необхідних для подальшого розгляду [10, 11]. У стандартній моделі бозе-газу загальна кількість частинок $\mathcal{N}$ виражається як похідна логарифма великої стати-

стичної суми $\mathcal{Z}$,

$$\mathcal{N} = z \frac{d}{dz} \ln \mathcal{Z}. \quad (1)$$

Тут активність z як функція хімічного потенціалу $\tilde{\mu}$ задається формулою $z = e^{\beta \tilde{\mu}}$, де $\beta = \frac{1}{k_B T}$ – обернена безрозмірна температура, а k_B – стала Больцмана. Велика канонічна статистична сума $\mathcal{Z}$ визначається за допомогою такого виразу:

$$\ln \mathcal{Z} = - \sum_i \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_i}), \quad (2)$$

де

$$\epsilon_i = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = \frac{p_i^2}{2m}. \quad (3)$$

Надалі обмежимося тривимірним простором. Для формулювання термодинамічної основи для μ -аналога моделі бозе-газу, стандартний вираз для загальної кількості частинок $\mathcal{N}$ повинен враховувати μ -залежність. А саме, модифіковане визначення загальної кількості частинок дається формулою

$$\mathcal{N}^{(\mu)} = z \mathcal{D}_z^{(\mu)} \ln \mathcal{Z} = -z \mathcal{D}_z^{(\mu)} \sum_i \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_i}), \quad (4)$$

де ми використовуємо μ -похідну

$$\mathcal{D}_x^{(\mu)} f(x) = \int_0^1 f'_x(t^\mu x) dt, \quad f'_x(t^\mu x) = \frac{df(t^\mu x)}{dx}, \quad (5)$$

яка діє на мономи таким чином:

$$\mathcal{D}_x^{(\mu)} x^n = [n]_\mu x^{n-1}, \quad (6)$$

де

$$[n]_\mu \equiv \frac{n}{1 + \mu n}, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (7)$$

Потім μ -деформований оператор $\mathcal{D}^{(\mu)}$ застосовується до логарифма великої канонічної статистичної суми в рівнянні (2), і модифікована загальна кількість частинок дорівнює

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{(\mu)} &= z \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_i n} \frac{[n]_\mu}{n} z^{n-1} = \\ &= \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} (e^{-\beta \epsilon_i})^n z^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Для збіжності ряду має виконуватися така умова для добутку $e^{-\beta \epsilon_i}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} (e^{-\beta \epsilon_i})^n z^n < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq |z e^{-\beta \epsilon_i}| < 1. \quad (9)$$

Відокремимо внесок члена ($p_i = 0, i = 0$) від решти суми. Це дає

$$\mathcal{N}^{(\mu)} = \sum_i' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} (e^{-\beta \epsilon_i})^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} z^n. \quad (10)$$

Як добре відомо, для великого об'єму V та великої кількості частинок $\mathcal{N}$ спектр одночастинкових станів стає майже неперервним. Через це ми замінюємо підсумовування в рівнянні (8) на інтеграл по 3-вимірному імпульсному простору,

$$\sum_i \rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3k. \quad (11)$$

Тоді отримуємо

$$\mathcal{N}^{(\mu)} = \frac{V}{\lambda_T^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n^{5/2}} z^n + \mathcal{N}_0^{(\mu)}, \quad \mathcal{N}_0^{(\mu)} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} z^n. \quad (12)$$

Тут теплова довжина хвилі λ_T визначається через масу частинки m та температуру T (яку розглядають як термодинамічну температуру),

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (13)$$

Стандартна функція Бозе-Айнштейна задається рядом

$$g_\ell(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\ell}. \quad (14)$$

Як узагальнення останнього, вводиться μ -полілогарифм, а саме

$$g_\ell^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n^{\ell+1}} z^n. \quad (15)$$

Тоді рівняння (10) перетворюється на

$$\mathcal{N}^{(\mu)} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z), \quad (16)$$

де

$$g_{3/2}^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n^{5/2}} z^n, \quad g_0^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} z^n. \quad (17)$$

Вираз для μ -деформованого $\ln \mathcal{Z}^{(\mu)}$ отримується шляхом застосування оберненої похідної Ейлера, а саме

$$\ln \mathcal{Z}^{(\mu)} = \left(z \frac{d}{dz} \right)^{-1} \mathcal{N}^{(\mu)}. \quad (18)$$

Після вставки $\mathcal{N}^{(\mu)}$ маємо

$$\left(z \frac{d}{dz}\right)^{-1} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_{\mu}}{n^{5/2}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_{\mu}}{n} z^n \right) = \\ = \frac{V}{\lambda_T^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_{\mu}}{n^{5/2}} \left(z \frac{d}{dz}\right)^{-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_{\mu}}{n} \left(z \frac{d}{dz}\right)^{-1} z^n, \quad (19)$$

тож отримуємо $\ln \mathcal{Z}^{(\mu)}$ у вигляді

$$\ln \mathcal{Z}^{(\mu)} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}^{(\mu)} + g_1^{(\mu)}. \quad (20)$$

Внутрішня енергія $\mathcal{U}^{(\mu)}$ визначається за допомогою співвідношення

$$\mathcal{U}^{(\mu)} = - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z}^{(\mu)} \right)_{z,V}. \quad (21)$$

Використовуючи звичайну β -похідну, ми отримуємо такий вираз для μ -деформованої внутрішньої енергії:

$$- \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}^{(\mu)} + g_1^{(\mu)} \right)_{z,V} \Rightarrow \mathcal{U}^{(\mu)} = -\tilde{\mu} \mathcal{N}^{(\mu)}. \quad (22)$$

Тоді рівняння стану має вигляд

$$\frac{(PV)_{\mu}}{k_B T} = \ln \mathcal{Z}^{(\mu)} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z). \quad (23)$$

Вільна енергія Гельмгольца моделі має вигляд

$$\mathcal{H}^{(\mu)} = \tilde{\mu} \mathcal{N}^{(\mu)} - (PV)_{\mu}. \quad (24)$$

Вираз для μ -деформованої ентропії можна отримати зі співвідношення $\mathcal{S}^{(\mu)} = \frac{1}{T_U} (\mathcal{U}^{(\mu)} - \mathcal{H}^{(\mu)})$, де T_U розглядається як температура Унру [55], що дає

$$\mathcal{S}^{(\mu)} = \frac{1}{T_U} \left(-2\tilde{\mu} \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}^{(\mu)}(z) - 2\tilde{\mu} g_0^{(\mu)}(z) + E \frac{V}{\lambda_T^3} \times \right. \\ \left. \times g_{5/2}^{(\mu)}(z) + E g_1^{(\mu)}(z) \right). \quad (25)$$

У μ -деформованому розширенні індукованої гравітації Верлінде ми ідентифікуємо $E = k_B T$, а не $\frac{1}{2} k_B T$, припускаючи, що кожен μ -бозон кодує два фундаментальні біти інформації. Фізично μ -бозони можна розглядати як композитні бозе-подібні частинки, побудовані з корельованих або заплутаних пар елементарних складових (фермі- [12–16] або бозе-типу). Отже, кожен μ -бозон несе вдвічі

більшу енергію, ніж один біт у стандартному рівномірному розподілі енергії, що приводить до повної енергії $E = N k_B T$ та зберігає термодинамічну узгодженість, коли μ -деформація змінює співвідношення ентропія-енергія разом з виникаючим гравітаційним зв'язком. Явно переписуючи вираз для теплової довжини хвилі та хімічного потенціалу через $E = k_B T$,

$$\lambda_T^3 = \left(\frac{2\pi \hbar^2}{mE} \right)^{3/2}, \quad \frac{\tilde{\mu}}{E} = \ln z, \quad (26)$$

отримуємо загальний вираз для μ -деформованої ентропії як функції E :

$$\mathcal{S}^{(\mu)} = \frac{1}{T_U} \left(-2V \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} g_{3/2}^{(\mu)}(z) E^{5/2} \ln z - 2E \times \right. \\ \left. \times g_0^{(\mu)}(z) \ln z + V \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} g_{5/2}^{(\mu)}(z) E^{5/2} + E g_1^{(\mu)}(z) \right). \quad (27)$$

Він має принципове значення для подальшого розгляду.

2.2. Виведення μ -деформованих рівнянь Айнштайна з використанням підходу Верлінде

В рамках адаптованого підходу Верлінде до ентропічної гравітації система наближається до статистичної рівноваги, якщо ентропічна сила, що виникає внаслідок змін ентропії, збалансовується силами, що сприяють збільшенню ентропії. Відповідно, формулювання передбачає, що саму гравітацію можна розуміти як індуковану силу, що виникає внаслідок ентропійної динаміки базових мікроскопічних ступенів свободи, а не як фундаментальну взаємодію. У рівновазі загальна ентропія $\mathcal{S}$ системи досягає екстремального значення і залишається сталою. Це є прямим наслідком другого закону термодинаміки, який стверджує, що ентропія має тенденцію зростати, доки не буде досягнуто максимуму за заданих обмежень. Надалі вважатимемо, що ентропія $\mathcal{S}^{(\mu)}(E, x^{\nu})$ задовольняє умову

$$\frac{d}{dx^{\nu}} \mathcal{S}^{(\mu)}(E, x^{\nu}) = 0. \quad (28)$$

З точки зору Верлінде, рівновага системи є не лише умовою балансу сил, а й відображенням глибокої термодинамічної природи гравітації,

$$\frac{\partial \mathcal{S}^{(\mu)}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \mathcal{S}^{(\mu)}}{\partial x^{\nu}} = 0, \quad (29)$$

де компоненти

$$\frac{\partial E}{\partial x^\nu} = -\mathcal{F}_\nu, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\nu} = \nabla_\nu \mathcal{S} \quad (30)$$

представляють градієнт енергії та ентропійну силу відповідно.

Для похідної $\mathcal{S}^{(\mu)}$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}^{(\mu)}}{\partial E} &= \frac{1}{T_U} \left(\frac{5V}{2} g_{5/2}^{(\mu)}(z) \left(\frac{mE}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} - 5V g_{3/2}^{(\mu)}(z) \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{mE}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \ln z + g_1^{(\mu)}(z) - 2g_0^{(\mu)}(z) \ln z \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Для спрощення скористаємося позначеннями

$$G_1(\mu; z) = \frac{5}{2} \frac{V}{\lambda_T^3} \left(g_{5/2}^{(\mu)}(z) - 2 \ln z g_{3/2}^{(\mu)}(z) \right), \quad (32)$$

$$G_2(\mu; z) = g_1^{(\mu)}(z) - 2g_0^{(\mu)}(z) \ln z. \quad (33)$$

Тоді формула для похідної набуває вигляду

$$\frac{\partial \mathcal{S}^{(\mu)}}{\partial E} = \frac{1}{T_U} \left(G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z) \right). \quad (34)$$

Підставляючи формули (34) та (30) у рівняння (29), отримуємо співвідношення

$$(G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)) \mathcal{F}_\nu = T_U \nabla_\nu \mathcal{S}. \quad (35)$$

Тут ентропійна сила $\mathcal{F}_\nu = -m e^\varphi \nabla_\nu \varphi$, де

$$\varphi = \frac{1}{2} \log(-\xi^\nu \xi_\nu) \quad (36)$$

є ЗТВ узагальненням потенціалу Ньютона. Зміна ентропії через голографічний екран, що виникає внаслідок зміщення частинки (біта) на одну теплову довжину хвилі λ_T вздовж деякого нормального до екрана напрямку $\mathbf{n}$, що визначається компонентами n_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$), має вигляд

$$\nabla_\nu \mathcal{S} = -2\pi \frac{m}{\hbar} n_\nu. \quad (37)$$

У рамках моделі індукованої гравітації Верлінде виведення рівнянь гравітаційного поля Айнштейна формулюється в термодинамічних термінах з використанням голографічного принципу, ефекту Унру та поверхневої ентропії Бекенштейна; всі з них можна природним чином інтерпретувати в

рамках відповідності AdS/CFT. Отже, спостерігача, що прискорюється, можна розглядати як суттєво пов'язаного з основою індукованої гравітації, оскільки температура Унру, що сприймається таким спостерігачем, являє собою макроскопічний прояв тих самих базових мікроскопічних ступенів свободи, колективна динаміка яких породжує індуковане гравітаційне поле. Тоді, прирівнюючи термодинамічну температуру до температури Унру, ми отримуємо співвідношення, яке містить μ -деформовану температуру у вигляді

$$T_U = (G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)) e^\varphi \nabla_\nu \varphi \frac{\hbar}{2\pi} n_\nu. \quad (38)$$

Якщо екран розташований на замкнутій поверхні $\tilde{\mathcal{S}}$ при "постійному червоному зміщенні", масу Комара можна записати таким чином:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} T_U d\mathcal{N}. \quad (39)$$

Згідно з ідеєю Бекенштейна [32], нескінченно малу зміну кількості бітів можна записати у вигляді

$$d\mathcal{N} = \frac{d\mathcal{A}}{G\hbar}. \quad (40)$$

Використовуючи рівняння (40) та (38) у рівнянні (39), отримуємо загальну масу

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi G} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathcal{G}_V(\mu; z) e^\varphi \nabla_\nu \varphi n_\nu d\mathcal{A}, \quad (41)$$

де

$$\mathcal{G}_V(\mu; z) \equiv G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z). \quad (42)$$

Далі, з теореми Стокса, рівняння Кіллінга та співвідношення $\nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu = -\mathcal{R}_\nu^\mu \xi^\nu$, ми отримуємо бажану повну масу, залежну від μ , у формі

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi G} \int_V \mathcal{G}_V(\mu; z) n^\nu \xi^\mu \mathcal{R}_{\mu\nu} dV. \quad (43)$$

З іншого боку, існує альтернативний вираз для маси Комара через тензор енергії-імпульсу,

$$\mathcal{M} = 2 \int_V \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{T} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right) n^\nu \xi^\mu dV. \quad (44)$$

У цій схемі μ -деформована маса відноситься до термодинамічної енергії μ -бозе-газу, розподіленого по голографічному об'єму. Маса Комара, навпаки, є μ -деформованою індукованою гравітаційною величиною, що відображає ефекти деформації

від базової термодинамічної системи через відповідність AdS/CFT. Тоді з рівнянь (44) та (43), ми робимо висновок про те, що

$$2 \int_V \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{T} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right) n^\nu \xi^\mu dV = \frac{\mathcal{G}_V(\mu; z)}{4\pi G} \int_V \mathcal{R}_{\mu\nu} n^\nu \xi^\mu dV. \quad (45)$$

Звідси ми отримуємо μ -деформовані рівняння Айнштайна, які описують μ -індуковану гравітацію, що діє на деформовані поля матерії,

$$2 \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{T} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right) = \frac{\mathcal{G}_V(\mu; z)}{4\pi G} \mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (46)$$

Нарешті, беручи слід рівняння (46), ми приходимо до бажаного μ -деформованого рівняння Айнштайна

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} + \frac{\Lambda}{\mathcal{G}_V(\mu; z)} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\mathcal{G}_V(\mu; z)} \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (47)$$

Як видно, у цьому рівнянні з'явилася модифікована (або ефективна $\Lambda_{\text{eff}} \equiv \frac{\Lambda}{\mathcal{G}_V(\mu; z)}$) космологічна стала (ЕКС), а також модифікована гравітаційна стала.

У деформованому ($\mu > 0$) і недеформованому ($\mu = 0$) випадках, ЕКС разом з гравітаційною сталою (ГС) у результуючих μ -деформованих рівняннях Айнштайна залежать від змінної леткості z базової індукуючої системи. Природним шляхом позбутися z є фіксація z , наприклад, $z = 1$ або деяке значення, дуже близьке до 1. Це означає, що ми матимемо справу з бозе-подібним конденсатом. Тепер ключовим моментом є те, що випадок $\mu = 0$ (тобто стандартного бозе-газу) при фіксованому $z = 1$ приводить до зникнення СС та ГС, що явно нефізично. Таким чином, стандартний бозе-газ не може служити базовою (або індукуючою) системою, тоді як (μ -)деформоване розширення матиме принципове значення, як це буде видно з подальшого розгляду.

3. Аналіз ефективної космологічної сталої

Тут ми вивчатимемо поведінку ефективної космологічної сталої та побудуємо ілюстративні графіки для величини $\mathcal{G}_V(\mu; z) \equiv G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)$.

Функції $G_1(\mu; z)$ та $G_2(\mu; z)$, визначені рівняннями (32) та (33), містять повільно збіжні μ -полілогарифмічні ряди (див., наприклад, [11] стосовно їх визначення та деяких застосувань) $g_s^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \mu n)^{-1} \frac{z^n}{n^s}$, де $s = 0, 1, \frac{3}{2}$ та $\frac{5}{2}$. З огляду на нетривіальність обчислень ряду $g_s^{(\mu)}(z)$ при z близьких до 1 та малих μ , ми застосували наближення сум Рімана до відповідних членів у $G_2(\mu; z)$, див. нижче, а також формулу Ейлера–Маклорена [60] при розгляді $G_1(\mu; z)$. Крім того, ми використовуємо розклад полілогарифма $\text{Li}_s(z)$ в ряд по $(\ln z)^n$,

$$\text{Li}_s(z) = \Gamma(1-s) \left(\ln \frac{1}{z} \right)^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(s-n) \frac{(\ln z)^n}{n!}, \quad (48)$$

$$s \neq 1, 2, 3, \dots, \quad |\ln z| < 2\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а також його аналог при цілочисельному значенні s ; див., наприклад, [58] або [60, 61].

3.1. Функція $G_1(\mu; z)$

Введемо допоміжне позначення $\Xi_T \equiv \frac{V}{\lambda_T^3}$. Переходячи від активності $z = e^{\beta\tilde{\mu}}$ до нової редукованої змінної

$$\lambda = \lambda(z, \mu) = -\frac{1}{\mu} \ln z \approx \frac{1-z}{\mu}, \quad (49)$$

для z близьких до 1 ми отримуємо бажане наближення “малих μ ”,

$$G_1(\mu; z) = \frac{5}{2} \Xi_T \left\{ \zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (\lambda - 1) \mu - 2\sqrt{\pi} \left[\left(\frac{4}{3}\lambda - 1\right) \lambda^{\frac{1}{2}} + (2\lambda - 1) \text{M}_{\text{erfc}}(\sqrt{\lambda}) \right] \mu^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) (3\lambda - 2) \lambda \mu^2 + \frac{1}{3!} \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) (5\lambda - 3) \lambda^2 \mu^3 \right\} + \lambda' O(\mu^2 \lambda'^2), \quad (50)$$

де $\mu \rightarrow 0$, $\lambda \ll \frac{2\pi}{\mu}$, $\lambda' \equiv \lambda + 1$, $\zeta(x)$ – дзета-функція Рімана, а відношення Міллса $\text{M}_{\text{erfc}}(x)$ для доповнювальної функції помилок

$$\text{erfc}(x) \equiv 1 - \text{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (51)$$

визначається виразом [60, 61]

$$\text{M}_{\text{erfc}}(x) = \frac{\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt}{e^{-x^2}} \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \text{erfc}(x), \quad (52)$$

Вихідна змінна активності z обчислюється за формулою

$$z = z(\lambda, \mu) = e^{-\mu\lambda}. \quad (53)$$

Щоб дослідити поведінку доданка $G_1(\mu; z)$ та суми $\mathcal{G}_V(\mu; z)$, ми покладаємо $\Xi_T = 1$, якщо не зазначено протилежне. Для зручності та як підтвердження неперервної чи розбіжної поведінки при $z \rightarrow 1$, ми також наводимо явні вирази для $G_{1,2}(\mu; z)$ при $\mu = 0$ через $\tilde{\lambda} \equiv -\ln(z)$, $|\ln z| < 2\pi$:

$$G_1(0; z) = \frac{5}{2} \left(\zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tilde{\lambda} - \frac{8}{3} \sqrt{\pi} \tilde{\lambda}^{3/2} - \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \frac{\zeta(r+1/2)}{r+1/2} \frac{(2r+3)!!}{(r+2)!} \left(-\frac{\tilde{\lambda}}{4\pi}\right)^r \right), \quad (54)$$

де $\left[\frac{r+1}{2}\right]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує $\frac{r+1}{2}$, а $n!! = n(n-2)(n-4) \cdot \dots$ – подвійний факторіал. Зауважимо, що, як видно з формул (50) та (54), поблизу $z = 1$, де функція $G_2(0; z)$ логарифмічно розходиться, вплив від $G_1(\mu; z) \approx G_1(0; 1) = \frac{5}{2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$ при малих μ є скінченним (пропорційним Ξ_T). Точність наближеної формули (50) та розкладу (54) у порівнянні з числовими обчисленнями безпосередньо з визначень продемонстрована на рис. 1, а.

3.2. Функція $G_2(\mu; z)$

Зауважимо, що саме функція G_2 робить набагато більший внесок у суму, якщо $1-\delta < z < 1$ та $\mu \rightarrow 0$. Щоб вивести аналогічну наближену формулу для G_2 , ми спочатку застосовуємо наближення цілочисельного μ^{-1} (що є доцільним через малість μ), яке має вигляд

$$g_0^{(\mu)}(z) = \mu^{-1} e^{\lambda(z, \mu)} \left(\text{Li}_1(z) - \sum_{n=1}^M \frac{z^n}{n} \right) - O(1), \quad (55)$$

$$g_1^{(\mu)}(z) = \text{Li}_1(z) - \mu g_0^{(\mu)}(z), \quad (56)$$

для довільного неперервного $0 < \mu < 1$, з цілою частиною $M \equiv [\mu^{-1}]$ оберненого до нього. Тоді, щоб явно (але наближено) обчислити суму $\sum_{n=1}^M \frac{z^n}{n}$, ми застосуємо квадратурну формулу прямокутників, а саме

$$\sum_{n=1}^M \frac{1-z^n}{n} = \int_{\mu/2}^{(M+1/2)\mu} \frac{1-e^{-\lambda x}}{x} dx - O_\lambda(\mu^2) =$$

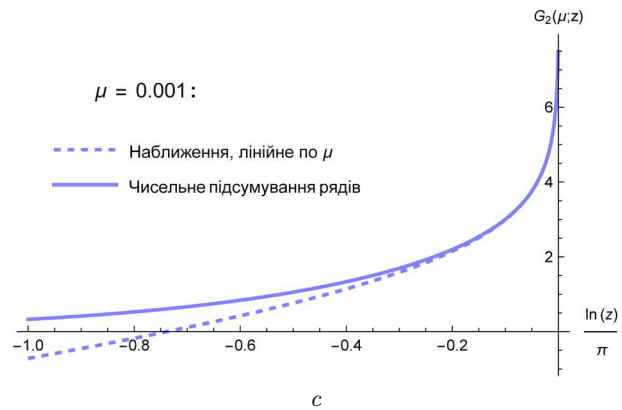
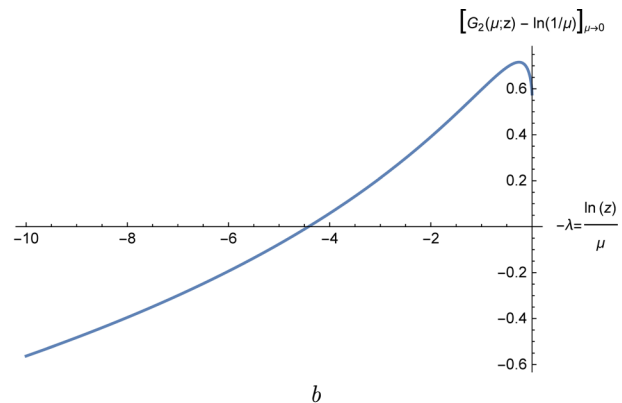
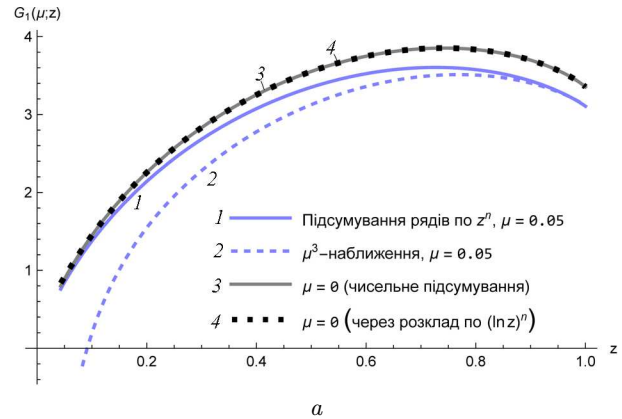


Рис. 1. Залежності $G_1(z)$ (а). Суцільні криві 1 та 3 показують результат числових розрахунків на основі підсумовування визначальних z^n -рядів для $\mu = 0,05$ та 0 відповідно. Штрихова крива 2 та пунктирна крива 4 отримані за допомогою μ^3 -апроксимації (50) та розкладу в ряд (54) по $(\ln z)^n$ для $\mu = 0,05$ та 0 відповідно. Залежність різниці $G_2 - \ln \frac{1}{\mu}$ від $-\lambda = \frac{\ln(z)}{\mu}$ (б). Розходження між апроксимацією та числовою оцінкою для G_2 (с). Пунктирна крива відповідає лінійному по μ наближенню, див. (59) та примітку 1, тоді як суцільна крива обчислюється за допомогою ряду підсумовування. В обох випадках $\mu = 0,001$

$$= \text{Ein} \left(\lambda + \frac{1}{2} \mu \lambda \right) - \text{Ein} \left(\frac{1}{2} \mu \lambda \right) - 2 O \left(\mu + \frac{\mu^2 \lambda^3}{72} \right) \quad (57)$$

з модифікованою інтегральною показниковою функцією [59, 60]

$$\text{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt. \quad (58)$$

Після деяких перетворень отримуємо¹

$$G_2(\mu; z) = \ln \left(\frac{1}{\mu} \right) + [(2\lambda - 1) e^\lambda E_1(\lambda) - \ln(\lambda)] + e^{\lambda+2} \left(O(\mu) + \left[12 + \left(\frac{\delta z}{\mu} \right)^2 \right] O(\delta z) \right), \quad (59)$$

де $\mu \rightarrow +0$, $\delta z \equiv 1 - z \rightarrow +0$,

$$\lambda \equiv \lambda(z, \mu) = \frac{|\ln z|}{\mu} = \frac{\delta z}{\mu} \left(1 + \frac{\delta z}{2} + \dots \right), \quad (60)$$

а $E_1(\lambda)$ – інтегральна показникова функція [59, 60]

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg(x)| < \pi. \quad (61)$$

Оскільки для надзвичайно малих (але додатних) значень μ функції $G_1(\mu; z) \approx \text{const}$, то коли z близьке до 1, переважна поведінка суми $G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)$ визначається першими значущими членами G_2 . Відповідна залежність від λ показана на рис. 1, *b*. Справедливість апроксимації (59) в околі $z = 1$ продемонстрована на рис. 1, *c*.

Умову екстремуму для λ ,

$$(1 + 2\lambda)E_1(\lambda) = 2e^{-\lambda} \quad (62)$$

можна розв'язувати аналітично або чисельно. Перший метод використовує відомий розклад $E_1(\lambda)$ у степеневий ряд (див., наприклад, [59])

$$E_1(\lambda) = -\gamma - \ln(\lambda) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{nn!}, \quad (63)$$

¹ Більш детальні розрахунки на основі обернено-цілочисельного представлення для μ дає формулу з лінійною за μ поправкою: $G_2(\mu; z) = \ln \frac{1}{\mu} + [(2\lambda - 1) e^\lambda E_1(\lambda) - \ln(\lambda)] - \frac{1}{2}(\lambda - 1)\mu + e^\lambda O(\mu^2 \lambda^4)$.

по малому λ , де $\gamma = 0,577215\dots$ – стала Ейлера, і для $n \leq 2$ приводить до квадратного рівняння

$$7,25\lambda^2 - (1 + 4 \ln 2 - 2\gamma)\lambda + (1 + \gamma - 2 \ln 2) = 0$$

з $\lambda \approx 0,2597\dots$. Другий метод забезпечує точніший розв'язок $\lambda = \lambda^{(0)} = 0,2589\dots$, знайдений за допомогою пакета *Wolfram Mathematica*. Відповідна активність дорівнює $z_0 \approx 1 - 0,26\mu$, а відповідне максимальне значення $G_2(\mu; z)$ безпосередньо випливає з формули (59):

$$\begin{aligned} \bar{G}_2 &= \ln \left(\frac{1}{\mu} \right) + \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[G_2(\mu, z(\lambda^{(0)}, \mu)) - \ln \left(\frac{1}{\mu} \right) \right] = \\ &= 0,7159\dots + \ln \left(\frac{1}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Зауваження. З визначення (49) параметра $\lambda = \lambda(z, \mu)$ та відомого визначення активності $z = e^{\beta \tilde{\mu}}$ ми безпосередньо отримуємо зв'язок між хімічним потенціалом $\tilde{\mu}$ та параметром деформації μ :

$$\tilde{\mu} \equiv \beta^{-1} \ln z = -\mu \frac{\lambda(z, \mu)}{\beta}. \quad (65)$$

Отже, у даному випадку, коли $G_2(\mu; z)$ більше від $G_1(\mu; z)$ поблизу $z = 1$, ми оцінюємо хімічний потенціал у точці максимуму суми $G_1 + G_2$, де $\lambda(z_0, \mu) \equiv \lambda^{(0)}$, за формулою

$$\tilde{\mu}_0 = -\lambda^{(0)} \mu k_B T \approx -0,26\mu \times k_B T, \quad (66)$$

при цьому μ має достатньо мале значення.

Явний вираз для $G_2(\mu; z)$ при $\mu = 0$ та $|\ln z| < 2\pi$ має вигляд

$$\begin{aligned} G_2(0; z) &= -\ln |\ln z| + 2 - \frac{1}{2} \tilde{\lambda} + \frac{1}{6} \tilde{\lambda}^2 {}_1F_1(2; 4; -\tilde{\lambda}) - \\ &- \sum_{m=2}^{\infty} B_m \frac{\tilde{\lambda}^m}{m m!}, \quad \tilde{\lambda} \equiv -\ln(z). \end{aligned} \quad (67)$$

Тут ${}_1F_1(\dots)$ – гіпергеометрична функція Куммера, а B_m – числа Бернуллі; див., наприклад, [59] для їх визначення.

3.3. Сума $G_1 + G_2$ при z близькому до одиниці

Відмітимо певну “універсальність” у залежності суми $G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)$ від z : в околі $z = 1$ при малих μ вона проявляється саме через комбіновану змінну $\lambda(z, \mu)$, як видно з виразів (50) та (59).

Використовуючи цей факт та наведені вище наближення для $G_1(\mu; z)$ та $G_2(\mu; z)$, ми встановимо такий факт.

Твердження. Вузкий, випуклий догори максимум $\bar{\mathcal{G}}_V(\mu)$ існує при як завгодно малих μ , $0 < \mu < \delta$, і неперервно прямує до нескінченності $(+\infty)$, коли μ прямує до нуля, $\mu \rightarrow +0$. Водночас відповідна активність, що визначається як

$$z_0 \simeq 1 - \mu \lambda^{(0)} \approx 1 - \frac{\mu}{4}, \quad (68)$$

неперервно прямує зліва до одиниці ($\delta z_0 \equiv 1 - z_0 \simeq \frac{\mu}{4} \rightarrow +0$). Висота максимуму при малих μ задається з похибкою “порядку μ ” за формулою

$$\bar{\mathcal{G}}_V(\mu) \approx 0,7159... + \frac{5}{2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \Xi_T + \ln\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad (69)$$

та логарифмічно зростає зі збільшенням $\frac{1}{\mu}$.

Наслідок. Взавши вираз для космологічної сталої, що входить до μ -деформованого рівняння Айнштейна (47), у вигляді

$$\Lambda_\mu = \Lambda_{\text{eff}}(\mu; z) = \frac{1}{G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)} l_P^{-2}, \quad (70)$$

де l_P – планківська довжина, знаходимо відповідне значення $\mu = \mu^*$ параметра деформації, яке відповідає відомому на цей час значенню космологічної сталої

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{ex}} &= 3 \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \Omega_\Lambda = 1,466 \cdot 10^{-52} m^{-2} = \\ &= \underbrace{3,827 \cdot 10^{-123}}_{\Lambda_{\text{ex}}^{(P)}} l_P^{-2}, \end{aligned} \quad (71)$$

де індекс “ex” означає “спостережуваний”. З огляду на надзвичайну малість $\Lambda_{\text{ex}}^{(P)}$, ми очікуємо досягти належного значення (71) ефективної космологічної сталої (70) у точці мінімуму на кривій $\Lambda_\mu(z)$. Отже, щоб отримати це “правильне” значення для Λ_μ , ми покладемо

$$\Lambda_\mu(z_0) = \frac{1}{\bar{\mathcal{G}}_V(\mu; z_0)} l_P^{-2} = \Lambda_{\text{ex}}^{(P)} l_P^{-2}.$$

що еквівалентно, див. (69), рівності

$$\bar{\mathcal{G}}_V(\mu; z_0) \approx 0,72 + \frac{5}{2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{\mu}\right) \Big|_{\mu=\mu^*} = \frac{1}{\Lambda_{\text{ex}}^{(P)}}. \quad (72)$$

Це дає відповідне значення параметра деформації μ^* , яке забезпечує існування наведеного вище значення (71) в екстремумі,

$$\mu^* \approx e^{-1/\Lambda_{\text{ex}}^{(P)} + 0,72 + 5/2 \zeta(5/2)} \sim e^{-2,61 \cdot 10^{122}}. \quad (73)$$

Фактично, екстремум при $z = z_0$ настільки близький до точки $z = 1$ на кривій $\mu = \mu^*$, що несуттєво, яке значення активності береться з інтервалу $[z_0, 1]$, що приводить до майже рівних значень $\Lambda_{\text{eff}}(\mu; z) \approx \Lambda_{\text{ex}}$ з дуже високою точністю². Активність z_0 для цього екстремуму впливає з виразу (59):

$$z_0 = e^{-\mu \lambda^{(0)}} \approx 1 - \lambda^{(0)} \mu, \quad (74)$$

що для кривої апроксимації ($\mu = \mu^*$) дає чисельно

$$1 - z_0 \approx \lambda^{(0)} \cdot \mu^* \sim \exp(-2,61 \cdot 10^{122}). \quad (75)$$

Відповідний хімічний потенціал $\tilde{\mu}$ впливає з формули (66):

$$\tilde{\mu}_0 = -\lambda^{(0)} \mu \cdot k_B T \Big|_{\mu=\mu^*} \sim -\exp(-2,61 \cdot 10^{122}) \cdot k_B T. \quad (76)$$

Крім того, з (75) та (76) ми бачимо, що

$$1 - z_0 \approx -\frac{\tilde{\mu}_0}{k_B T}. \quad (77)$$

Зауваження. Оцінимо відношення $\frac{G_2(\mu; z)}{G_1(\mu; z)}$ для значення параметра деформації $\mu = \mu^*$ у деякому $\varepsilon\mu$ -околі максимуму. Тобто, маємо $(\lambda^{(0)} - \varepsilon)\mu^* < 1 - z < (\lambda^{(0)} + \varepsilon)\mu^*$. Крім того, припустимо, що $\varepsilon < 1/8$. Тоді, роблячи типові оцінки, отримуємо

$$\begin{aligned} G_1(\mu^*; z) &= \\ &= \frac{5}{2} \left\{ \zeta\left(\frac{5}{2}\right) - \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (1 - \lambda^{(0)} + \varepsilon) O(\mu^*) + 2\pi O(\mu^{*3/2}) \right\}, \end{aligned}$$

$$G_2(\mu^*; z) = G_2(\mu^*; z_0) \pm 18O(\varepsilon) + 12e^3 O(\mu^*),$$

² Використовуючи рівняння (50) та (59), зауважимо, що величина $\bar{\mathcal{G}}_V(\mu^*; z)$, обчислена при $z = 1$, менша, ніж $\bar{\mathcal{G}}_V(\mu^*; z_0) \sim 10^{122}$ в екстремумі лише на величину $\Delta \bar{\mathcal{G}}_V(\mu^*) \approx 0,7159... - \gamma \approx 0,14 \ll 10^{122}$. Отже, завдяки (70), ефективна космологічна стала залишається майже незмінною.

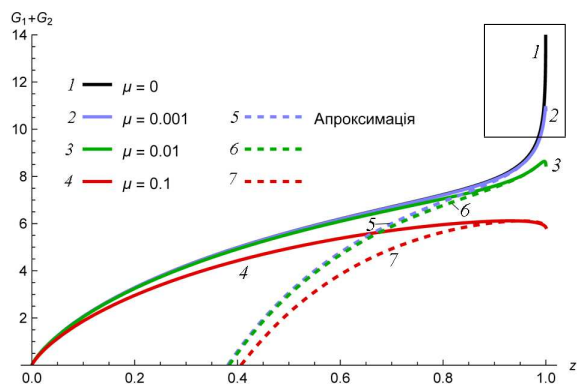


Рис. 2. Поведінка суми $G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)$ у всьому діапазоні параметра z (суцільні криві 1–4) та відповідні наближення малого μ , що базується на виразах (50) та (59) (пунктирні криві 5–7) для різних μ : $\mu = 0$ (крива 1); 0,001 (криві 2 та 5); 0,01 (криві 3 та 6) та 0,1 (криві 4 та 7)

де $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,61238\dots$, $\zeta\left(\frac{5}{2}\right) = 1,34149\dots$. Оцінюючи їх відношення в заданому околі,

$$\frac{G_2(\mu^*; z)}{G_1(\mu^*; z)} = \frac{2}{5}\zeta^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\left\{\bar{G}_2 \pm 18O(\varepsilon) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times 2.05 \times \overbrace{\bar{G}_2 e^{-\bar{G}_2} O(1)}^{O(\mu^{*1/2})}\right\} \approx \frac{2}{5}\zeta^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\bar{G}_2 \pm \\ \pm 8O(\varepsilon) = 7.79 \times 10^{121} \pm 1 \gg 1, \quad (78)$$

ми підтверджуємо³ згадану можливість знехтувати $G_1(\mu; z)$ при $\Xi_T \sim 1$.

Продемонструємо наш розгляд $\mathcal{G}_V(\mu; z)$ за допомогою кількох ілюстративних графіків, особливо для надзвичайно малих μ . Типові залежності $G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)$ від z для кількох значень μ показані на рис. 2. Крім того, для порівняння наведено поведінку наближення малого μ за межами області його справедливості (тобто далеко від $|\ln z| \ll 1$). Хід залежностей у рамці на рис. 2, тобто при значно менших μ , коли z наближається до одиниці, продемонстровано на рис. 3, а та 3, б у збільшеному масштабі.

Таким чином, справжній деформований випадок з $\mu > 0$, на відміну від випадку $\mu = 0$ (чистий бозе-газ), може привести до реалістичного значення КС завдяки наявності (надзвичайно малого)

³ Строго кажучи, нам також потрібно порівняти і природи. Приріст $G_2(\mu; z)$ в μ -околі $z = 1$ має порядок 1, тоді як $G_1(\mu; z) \approx \text{const}$ з точністю $O(\mu)$. Отже, це не повинно викликати помітного зсуву z_0 .

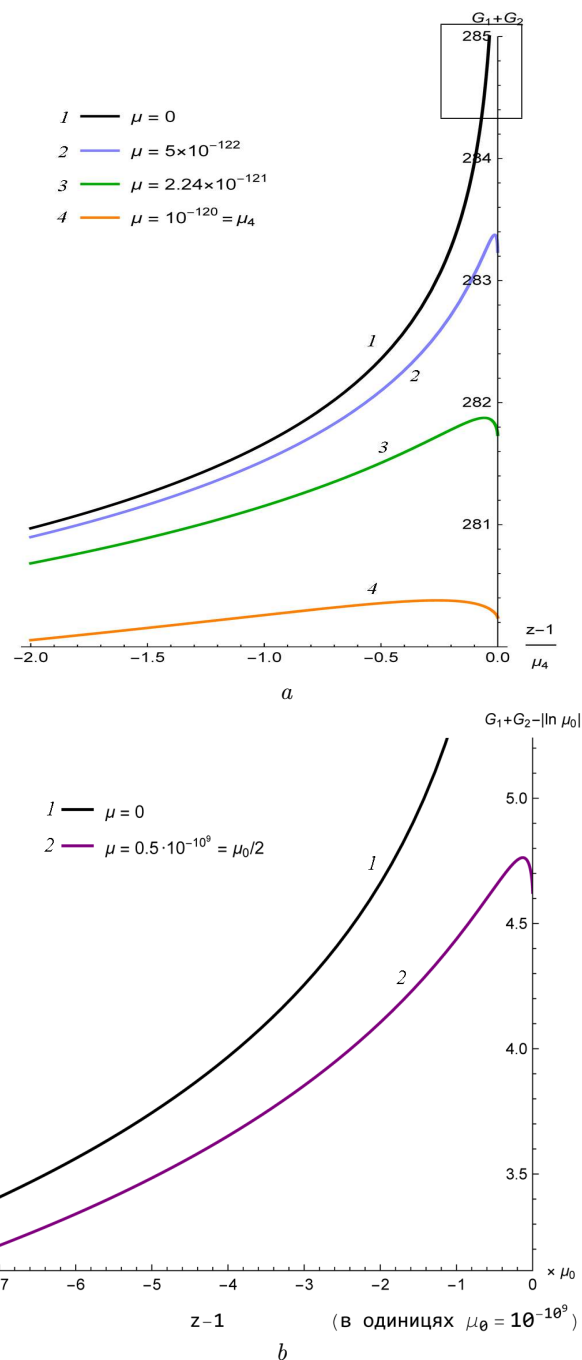


Рис. 3. Залежності суми $G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)$ від $\delta z \equiv z - 1$ нормовані на найбільше значення $\mu_4 = 10^{-120}$ поблизу $z = 1$ (а). Залежності $G_1(\mu; z) + G_2(\mu; z)$ від δz , зміщені на $|\ln(\mu_0)| \approx 2,30 \cdot 10^9$, для надзвичайно малого μ -масштабу, заданого величиною $\mu_0 = 10^{-109}$, однак, з фокусом на положенні екстремуму (б). Цей рисунок схематично відповідає рамці на панелі (а)

мінімуму КС при певному значенні z_0 дуже близькому до 1, або завдяки його скінченному ненульовому (дуже близькому до мінімуму) значенню, коли ми точно покладемо $z = 1$.

4. Обговорення та висновки

У цій статті ми вивели μ -деформоване розширення рівнянь поля Айнштейна (гравітаційного) та детально дослідили залежність його члена, який включає ефективну (тобто μ -залежну) космологічну сталу як функцію параметра деформації μ та леткості z . Фактично, ми показали, що, змінюючи параметр деформації μ до надзвичайно малих значень, можна знайти відповідне значення μ^* , яке дозволяє досягти “реалістичного значення” максимуму функції $\mathcal{G}_V(\mu; z) \equiv G_1(z, \mu) + G_2(z, \mu)$, що (через свою обернену функцію) забезпечує необхідне спостережуване значення $\Lambda/\mathcal{G}_V(\mu^*; z_0) \approx 3,8 \times 10^{-123} l_p^{-2}$ ефективної космологічної константи $\Lambda/\mathcal{G}_V(\mu; z)$. Слід підкреслити деякі важливі моменти.

Перш за все, ми наголошуємо на самому факті існування екстремуму ЕКС в рамках підходу, заснованого на μ -деформованій моделі бозе-газу, для реалізації індукованої гравітації. Це явно відрізняється від використання звичайної (недеформованої) моделі бозе-газу. Дійсно, в останній немає екстремуму у відповідній комбінації $\Lambda/\mathcal{G}_V(0; z_0)$ звичайних полілогарифмів з $\mu = 0$, коли $z \rightarrow 1$, і тому немає способу отримати відмінне від нуля значення КС.

По-друге, аналізуючи поведінку ЕКС, ми без особливих обґрунтувань прийняли значення відношення $V/\lambda_T^3 = 1$. Це значення є добре відомим маркером, що вказує на існування справді квантових ефектів [62], а також стосується бозе-подібного конденсату. Розглянувши це питання детальніше, ми несподівано приходимо до двох різних можливих ситуацій (та інтерпретації) системи, яка лежить в основі індукованої (ентропійної) гравітації. Ці два випадки індукуючої системи відповідають принципово різним масштабам, а саме (А) масштабу (розміру) карликових галактик та (Б) масштабу спостережуваного Всесвіту.

(А) У цьому випадку співвідношення V/λ_T^3 має порядок одиниці через те, що як масштаб карликових галактик, так і тепловий масштаб довжин хвиль частинок темної матерії становлять кілька кілопарсек (див., наприклад, [19]), якщо прийня-

ти μ -деформовану модель нечіткої темної матерії (ТМ), з масою надлегких частинок ТМ (бозе-подібного конденсату) $m = 10^{-22}$ еВ.

(Б) У цьому випадку співвідношення V/λ_T^3 має порядок одиниці через те, що як масштаб спостережуваного Всесвіту, так і тепловий масштаб довжин хвиль мають порядок $\sim 2,8 \cdot 10^7$ кпк, якщо частинки, що утворюють [64] бозе-подібний конденсат ТМ, вважати “масивними гравітонами” (логічно назвати це *прегравітонами* з огляду на їх роль у генеруванні індукованої гравітації) з масою $m = 10^{-36}$ – 10^{-33} еВ; див. [63]. Зауважимо, що в контексті ТМ карликових галактик бозе-конденсат масивних гравітонів розглядався в роботі [64]. У нашому розгляді ми маємо справу з конденсатом масивних прегравітонів, тобто розглядаємо їх як систему, яка індукує реальну гравітацію разом з ефективною космологічною сталою. У зв'язку з цією картиною індукування КС варто також згадати роботу Р. Гараттіні та М. Файзала [64], в яких показано, що поява космологічної сталої жорстко пов'язана саме з деформацією узагальненого принципу невизначеності, що стоїть за деформованим рівнянням Вілера–ДеВітта; див. [65].

Реальна фізична природа параметра μ у μ -деформованій індукуючій системі, як і темної матерії, невідома. Однак значення або сенс її використання можна виправдати, бо деформація дозволяє враховувати (можливу) складність частинок та/або їх взаємодії; це – природна причина мати справу з квантовою системою, яка сильно відхиляється від ідеального бозе-газу. Ця причина досить схожа на використання деформованої моделі бозе-газу в іншому контексті: для (успішного) моделювання властивостей квантових кореляцій піонів, що виникають у зіткненнях важких іонів на RHIC; див. посилання [16], а також абзац після рівняння (25). Однак, явний фізичний зміст μ в обох випадках надлегкої темної матерії (як бозе-подібного конденсату) – галактичному та випадку спостережуваного Всесвіту – може відрізнитися, оскільки частинки (та їх складові) дійсно відрізняються: надлегкі “бозони” проти “прегравітонів”.

Підкреслимо, що наш підхід до “пояснення” питання спостережуваної цінності КС ґрунтується на двох стовпах: деформації та (макроскопічній) квантовості базової або індукуючої системи. Варто також зазначити таке: те, що питання щодо КС

у нашому розгляді виявляється пов'язаним з концепцією ТМ, досить схоже на спільний розгляд ТМ та темної енергії, що з'являється в інших контекстах у деяких статтях; див., наприклад, [66, 67].

Як завершальне зауваження зазначимо, що аналіз μ -деформованих рівнянь Фрідмана, які впливають з μ -деформованих рівнянь Айнштейна, виведених та досліджених тут, буде опубліковано в окремій статті.

Автори висловлюють подяку рецензентам за цінні коментарі та зауваження, які допомогли покращити рукопис. Це дослідження було профінансовано Національною академією наук України за її пріоритетним проектом № 0122U000888 та підтримано грантом Фонду Саймонса № 1290587.

1. C. Daskaloyannis. Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras. *J. Phys. A* **24**, L789 (1991).
2. M. Arik, D.D. Coon, Y. Lam. Operator algebra of dual resonance models. *J. Math. Phys.* **16**, 1776 (1975).
3. L.C. Biedenharn. The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators. *J. Phys. A* **22**, L873 (1989).
4. A.J. Macfarlane. On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$. *J. Phys. A* **22**, 4581 (1989).
5. R. Chakrabarti, R. Jagannathan. A (p, q) -oscillator realization of two-parameter quantum algebras. *J. Phys. A* **24**, L711 (1991).
6. A. Jannussis. New deformed Heisenberg oscillator. *J. Phys. A* **26**, L233 (1993).
7. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, A.P. Rebesh. Quasi-Fibonacci oscillators. *J. Phys. A* **43**, 245204 (2010).
8. A.M. Gavrilik, A.P. Rebesh. Intercepts of the momentum correlation functions in the μ -Bose gas model and their asymptotics. *Eur. Phys. J. A* **47**, 55 (2011).
9. A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko. Exact expressions for the intercepts of r -particle momentum correlation functions in μ -Bose gas model. *Phys. Lett. A* **376**, 2484 (2012).
10. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, A.P. Rebesh. Thermostatistics of μ -deformed analog of Bose gas model. *arXiv:1309.1363[cond-mat.stat-mech]* (2013).
11. A.P. Rebesh, I.I. Kachurik, A.M. Gavrilik. Elements of μ -calculus and thermodynamics of μ -Bose gas model. *Ukr. J. Phys.* **58** (12), 1182 (2013).
12. A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko. Deformed Bose gas models aimed at taking into account both compositeness of particles and their interaction. *Ukr. J. Phys.* **58**, 1171 (2013).
13. A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators. *Phys. Lett. A* **376**, 19 (2012).

14. A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko. Energy dependence of the entanglement entropy of composite boson (quasiboson) systems. *J. Phys. A* **46**, 145301 (2013).
15. A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko. Virial coefficients in the (μ, q) -deformed Bose gas model related to compositeness of particles and their interaction: Temperature-dependence problem. *Phys. Rev. E* **90**, 052147 (2014).
16. A.M. Gavrilik, Yu.A. Mishchenko. Correlation function intercepts for (μ, q) -deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles. *Nucl. Phys. B* **891**, 466 (2015).
17. A. Gavrilik. Geometric Aspects and some uses of deformed models of thermostatics. *Universe* **4**, No. 2, 33 (2018).
18. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, M.V. Khelashvili, A.V. Nazarenko. Condensate of μ -Bose gas as a model of dark matter. *Physica. A* **506**, 835 (2018).
19. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, M.V. Khelashvili. Galaxy rotation curves in the μ -deformation based approach to dark matter. *Ukr. J. Phys.* **64**, 1042 (2019).
20. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik. Three-parameter (two-sided) deformation of Heisenberg algebra. *Mod. Phys. Lett. A* **27**, 1250114 (2012).
21. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik, A.V. Nazarenko. New deformed Heisenberg algebra from the μ -deformed model of dark matter. *Front. Astron. Space Sci.* **10**, 1133976 (2023).
22. A.D. Sakharov. Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **177**, 70 (1967), [*Sov. Phys. Dokl.* **12**, 1040 (1968)].
23. M. Visser. Sakharov's induced gravity: A modern perspective. *Mod. Phys. Lett. A* **17**, 977 (2002).
24. E. Verlinde. On the origin of gravity and the laws of Newton. *J. High Energy Phys.* **2011**, 29 (2011).
25. G. 't Hooft. *Dimensional reduction in quantum gravity. General Relativity and Quantum Cosmology*. arXiv:gr-qc/9310026v2 (2009).
26. T. Padmanabhan. Thermodynamical aspects of gravity: New insights. *Rep. Progr. Phys.* **73**, 046901 (2010).
27. E. Dil. q -deformed Einstein equations. *Can. J. Phys.* **93**, 1274 (2015).
28. E. Dil, E. Kolay. Solution of deformed Einstein equations and quantum black holes. *Adv. High Energy Phys.* **2016**, 3973706 (2016).
29. E. Dil. Can quantum black holes be (q, p) -fermions? *Int. J. Mod. Phys. A* **32**, 1750080 (2017).
30. M. Senay, S. Kibaroglu. q -deformed Einstein equations from entropic force. *Int. J. Mod. Phys. A* **33**, 1850218 (2018).
31. M. Senay. Entropic gravity corrected by q -statistics, and its implications to cosmology. *Phys. Lett. B* **820**, 136536 (2021).
32. J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
33. T. Jacobson. Thermodynamics of spacetime: The Einstein equation of state. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1260 (1995).
34. S. Kibaroglu, M. Senay. Effects of bosonic and fermionic q -deformation on the entropic gravity. *Mod. Phys. Lett. A* **34**, 1950249 (2019).

35. S. Kibaroğlu, M. Senay. Friedmann equations for deformed entropic gravity. *Int. J. Mod. Phys. D* **29**, 2050042 (2020).
36. M.M. Vopson. Estimation of the information contained in the visible matter of the universe. *AIP Advances* **11**, 105317 (2021).
37. S. Kibaroğlu. Generalized entropic gravity from modified Unruh temperature. *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950119 (2019).
38. H. Culetu. Comments on “On the Origin of Gravity and the Laws of Newton”, by Erik Verlinde. *arXiv:1002.3876* (2010).
39. A. Kobakhidze. Gravity is not an entropic force. *arXiv:1009.5414v1* (2010).
40. S. Hossenfelder. Comments on and Comments on Comments on Verlinde’s paper “On the Origin of Gravity and the Laws of Newton”. *arXiv:1003.1015* (2010).
41. J. Makela. Notes Concerning “On the Origin of Gravity and the Laws of Newton” by E. Verlinde. *arXiv:1001.3808* (2010).
42. T. Wang. Modified entropic gravity revisited. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **57**, 1623 (2014).
43. M. Chaichian, M. Oksanen, A. Tureanu. On gravity as an entropic force. *Phys. Lett. B* **702**, 419 (2011).
44. M. Visser. Conservative entropic forces. *J. High Energy Phys.* **2011**, 1110 (2011).
45. C.J. Gao. Modified entropic force. *Phys. Rev. D* **81**, 087306 (2010).
46. P. Nicolini. Entropic force, noncommutative gravity, and ungravity. *Phys. Rev. D* **82**, 044030 (2010).
47. H. Wei. Cosmological constraints on the modified entropic force model. *Phys. Lett. B* **692**, 167 (2010).
48. Y.X. Liu, Y.Q. Wang, S.W. Wei. A note on the temperature and energy of four-dimensional black holes from an entropic force. *Class. Quant. Grav.* **27**, 185002 (2010).
49. R.G. Cai, L.M. Cao, N. Ohta. Notes on entropy force in general spherically symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D* **81**, 084012 (2010).
50. J.W. Lee, H.C. Kim, J. Lee. Gravity from quantum information. *J. Korean Phys. Soc.* **63**, 1094 (2013).
51. R.G. Cai, L.M. Cao, N. Ohta. Friedmann equations from entropic force. *Phys. Rev. D* **81**, 061501 (2010).
52. B. Liu, Y.C. Dai, X.R. Hu, J.B. Deng. The Friedmann equation in modified entropy-area relation from entropy force. *Mod. Phys. Lett. A* **26**, 489 (2011).
53. M.A. Santos, I.V. Vancea. Entropic law of force, emergent gravity and the uncertainty principle. *Mod. Phys. Lett. A* **27**, 1250012 (2012).
54. J. Maldacena. The large- N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999).
55. L. Susskind. The world as a hologram. *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995).
56. R.M. Wald. *General Relativity* (University of Chicago Press, 2010).
57. W.G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1995).
58. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions, Vol. I* (McGraw-Hill Book Company, 1953).
59. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Edited by M. Abramowitz, I.A. Stegun (Nat. Bureau of Standards, 1964).
60. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Edited by F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (Cambridge University Press, 2010).
61. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. Edited by F.W.J. Olver, A.B. Olde Daalhuis, D.W. Lozier, B.I. Schneider, R.F. Boisvert, C.W. Clark, B.R. Miller, B.V. Saunders, H.S. Cohl, M.A. McClain. <https://dlmf.nist.gov/>, Release 1.2.4 of 2025-03-15.
62. R.K. Pathria. *Statistical Mechanics*. 2nd ed. (Betterworth and Heinemann, 1996).
63. C. de Rham. Massive gravity. *Living Rev. Relativ.* **17**, 7 (2014).
64. E. Kun, Z. Keresztes, S. Das, L.A. Gergely. Dark matter as a non-relativistic Bose–Einstein condensate with massive gravitons. *Symmetry* **10**, 10 (2018).
65. R. Garattini, M. Faizal. Cosmological constant from a deformation of the Wheeler–DeWitt equation. *Nucl. Phys. B* **905**, 313 (2016).
66. S. Das, R.K. Bhaduri. Dark matter and dark energy from a Bose–Einstein condensate. *Class. Quant. Grav.* **32**, 105003 (2015).
67. D. Edmonds, D. Farrah, D. Minic, Y.J. Ng, T. Takeuchi. Modified dark matter: Relating dark energy, dark matter and baryonic matter. *Int. J. Mod. Phys. D* **27**, 1830001 (2018).

Одержано 31.08.25.

Переклад на українську мову О. Войтенка

O.P. Mykhailiv, Yu.A. Mishchenko, O.M. Gavrilik

THE μ -DEFORMED EINSTEIN
FIELD EQUATIONS WITH μ -DEPENDENT
EFFECTIVE COSMOLOGICAL CONSTANT

In this paper, we derive the μ -deformed Einstein field equations from the generalized thermodynamic functions of the μ -deformed analog of Bose gas model, applying the (adapted) Verlinde’s approach. The basic role of deformation parameter is shown: it provides the possibility to vary the value of the cosmological constant. Due to this, we suggest an interesting treatment of the cosmological constant (CC) problem within the framework of μ -deformation. Namely, viewing the derived μ -deformed CC as an effective one and varying the parameter μ appropriately, we gain the possibility to drastically reduce the CC, so as to get, for it, the realistic value. The relation to dark matter is of importance.

Keywords: μ -calculus, entropic force, gravity, μ -Bose gas model, effective cosmological constant, dark matter.