

Ю.І. ПИЛИПЧУК,¹ П.О. НАКАЗНИЙ,¹ О.В. БАРАБАШ,² А.О. ЗАПОРОЖЧЕНКО,²
В.М. ГОРКАВЕНКО^{2,3}

¹ Національний Технічний Університет України

“Київський Політехнічний Інститут ім. Ігоря Сікорського”, Фізико-технічний інститут
(Просп. Берестейський, 37, Київ 05056)

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет
(Вул. Володимирська, 64/13, Київ 01601)

³ Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143)

МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ КВАНТОВОЇ СПІНОРНОЇ МАТЕРІЇ, ІНДУКОВАНЕ КОСМІЧНОЮ СТРУНОЮ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

УДК 539

Розглянуто лінійний магнітний топологічний дефект (космічна струна), який моделюється як трубка, що несе магнітний потік та є непроникною для зовнішньої спінорної матерії. Поле матерії квантується з урахуванням наявності трубки, загальні граничні умови на якій забезпечують як непроникність трубки, так і самоспряженість гамільтоніана Дірака. Обчислено індукований вакуумний магнітний потік вздовж трубки в $(3 + 1)$ -вимірному просторі-часі та показано, що вимога скінченності індукованого вакуумного магнітного потоку дозволяє тільки одну граничну умову: граничну умову MIT-моделі кваркового мішка. Проаналізовано залежність ефекту від поперечного розміру трубки та потоку всередині трубки.

Ключові слова: поляризація вакууму, лінійний топологічний дефект, космічна струна, ефект Ааронова–Бома.

1. Вступ

Різні розширення Стандартної космологічної моделі передбачають появу топологічних дефектів під час теплової еволюції раннього Всесвіту; див., наприклад, роботи [1–6]. Зокрема, послідовні фазові переходи, пов’язані зі спонтанним порушенням симетрії, могли привести до утворення космічних струн, монополів, доменних стінок і текс-

тур, залежно від моделі порушення симетрії. У цій статті ми зосередимося на лінійних топологічних дефектах, також відомих як космічні струни, які можуть існувати й сьогодні; див., наприклад, огляди [7, 8]. Такі об’єкти можуть проявляти себе через різні астрофізичні явища, такі як генерація гравітаційних хвиль [9], гамма-спалахів [10] та космічних променів надвисоких енергій [11].

Всередині космічної струни конфігурація поля фази з непорушеною симетрією має енергію та характеризується масою на одиницю довжини струни (або натягом струни) $\mu \sim \eta^2$, де η – енергетична шкала порушення симетрії ($\eta \sim m_H$, де m_H – це маса поля Хіггса). Енергія (маса), зосереджена в ядрі топологічного дефекту, робить його джерелом гравітації. В результаті, зовнішній простір-час набуває конічної геометрії з кутом дефіциту $8\pi G\mu$:

Цитування: Пилипчук Ю.І., Наказний П.О., Барабаш О.В., Запорожченко А.О., Горкавенко В.М. Магнітне поле у вакуумі квантової спінорної матерії, індуковане космічною струною у тривимірному просторі. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 12, 839 (2025).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ISSN 2071-0194. *Укр. фіз. журн.* 2025. Т. 70, № 12

квадрат елемента довжини у зовнішній області космічної струни дорівнює

$$ds^2 = dr^2 + (1 - 4G\mu)^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (1)$$

де G – гравітаційна стала Ньютона, а циліндричні координати вибрані так, щоб вісь симетрії була орієнтовна вздовж струни. Модельно-незалежні обмеження на натяг космічної струни від гравітаційного лінзування становлять $G\mu \lesssim 10^{-6}$ [12, 13]. Більш сильні обмеження випливають з аналізу реліктового випромінювання [14] та гравітаційних хвиль [15]. Таким чином, існуючі спостережувані обмеження виключають з розгляду лише ті космічні струни, які могли утворитися на надзвичайно високих енергетичних масштабах, трохи нижчих за масштаб Теорії Великого Об'єднання.

В абелевій моделі Хіггса [16] космічні струни формуються під час спонтанного порушення калібрувальної симетрії. Пов'язане з цим калібрувальне поле породжує “магнітне” поле, яке обмежене ядром струни. У ранньому Всесвіті це поле не обов'язково має бути знайомим електромагнітним полем; натомість воно може відповідати додатковій калібрувальній групі $U_X(1)$ поза Стандартною моделлю. Слід зазначити, що такі струни набувають додаткової глобальної характеристики – квантованого магнітного потоку

$$\Phi = \int_{\text{core}} d\sigma \partial \times \mathbf{A} = \oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \frac{2\pi n}{e_H}, \quad (2)$$

де $n \in \mathbb{Z}$ – ціле число (кількість обмоток), а параметр e_H – стала зв'язку між скалярним (Хіггсівським) конденсатом, який утворює струну при спонтанному порушенні симетрії, та калібрувальним полем $U_X(1)$.

Для квантованого поля матерії поза космічною струною, що взаємодіє з калібрувальним полем групи $U_X(1)$ через сталу зв'язку $\tilde{e}$, розв'язки для поля визначатимуться параметром $e\Phi/(2\pi) = n\tilde{e}/e_H$, який також може приймати нецілі значення. Ми використовуватимемо цей важливий параметр й надалі. Якщо, окрім заряду по групі $U_X(1)$, поля матерії також несуть заряд відносно електромагнітної групи $U_{EM}(1)$, то результуючий індукований струм електрично заряджених частинок у вакуумі генерує звичайне магнітне поле навколо космічної струни, вплив якого, в принципі, можна було б дослідити шляхом спостереження.

Вивчення ефектів поляризації вакууму спірного поля за наявності лінійних топологічних дефектів розпочалося в 1990-х роках. Перші дослідження були проведені в наближенні нульового поперечного розміру таких об'єктів [17–22]. У подальших дослідженнях досліджувалися вакуумні ефекти з урахуванням внутрішньої структури космічної струни в певних теоретичних моделях [23–27].

У цій статті ми припускаємо, що внутрішня структура космічної струни невідома, оскільки достеменно невідомо, як ця космічна струна утворилася. Тому ми розглянемо загальний випадок, коли космічна струна моделюється як непроникна для поля матерії трубка скінченного радіуса $r_0 \sim m_H^{-1}$ з “магнітним” полем всередині. Складна внутрішня структура струни буде виявлена шляхом вибору відповідної граничної умови на поверхні трубки. Слід також зазначити, що, хоча “магнітне” поле зникає поза ядром струни, сам калібрувальний потенціал залишається ненульовим. Це лежить в основі добре відомого ефекту Ааронова–Бома [28].

У випадку скалярного поля матерії ϕ , граничні умови на трубці можуть бути типу Діріхле ($\phi|_{r=r_0} = 0$), Неймана ($\partial_r \phi|_{r=r_0} = 0$) або Робена [тобто їх комбінації $(\cos \theta \phi + \sin \theta r \partial_r \phi)|_{r_0} = 0$]. Детальний аналіз індукованої енергії вакууму в цих випадках було проведено в роботах [29–33], тоді як відповідні дослідження магнітного потоку вакууму можна знайти в роботах [34–36].

У випадку спірного поля матерії (яке, на відміну від скалярного поля, є багатокomпонентним), вищезгадані інтуїтивно зрозумілі граничні умови не можуть бути застосовані, оскільки вони призводять до математичних невідповідностей. Для досягнення математичної узгодженості теорії нам потрібно використати умову самоспряженості для гамільтоніана Дірака. Ця умова автоматично гарантуватиме непроникність трубки для полів матерії.

У випадку (2+1)-вимірного простору-часу ця умова приводить до однопараметричної граничної умови; див. роботу [37]. Але у фізично цікавому випадку (3+1)-вимірного простору-часу це приводить до чотирипараметричної граничної умови; див. роботи [38–40]. Більше того, значення параметрів, в загальному випадку, можуть змінюватися вздовж різних точок лінійної струни. Однак, накладення вимог інваріантності на дискретні си-

метрії зменшує кількість параметрів у граничній умові [41].

Нас цікавитиме індукція магнітного потоку поля матерії у вакуумі. Актуальність цієї проблеми пов'язана з тим, що існування магнітних космічних струн є однією з можливих теорій [42,43], які могли б вирішити проблему існування магнітних полів у міжгалактичних порожнечах [44]. Оскільки індукція магнітного потоку скалярного поля у вакуумі була детально розглянута для випадку бозонної матерії [36], у цій роботі нас цікавитиме випадок спінової матерії.

У цій статті ми розширимо результати роботи [41]. А саме, ми розглянемо індукований потік магнітного поля у вакуумі спінового масивного поля в $(3+1)$ -вимірному просторі-часі в присутності космічної струни, змодельованої як непроникна для поля матерії трубка скінченного радіуса r_0 . Беручи до уваги мале значення натягу космічної струни (принаймні $G\mu \lesssim 10^{-6}$), ми проаналізуємо поляризацію вакууму в плоскому просторі-часі Мінковського, розглядаючи параметр $e\Phi/(2\pi) = ne/e_H$ як довільний. Ми побудуємо графічні зображення індукованого магнітного потоку та ретельно проаналізуємо вибір параметрів, що визначають граничну умову на поверхні магнітної трубки.

2. Індукований магнітний потік

Оператор вторинно квантованого спінового поля в плоскому просторі-часі поза лінійним топологічним дефектом має вигляд

$$\Psi(x^0, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\lambda}}} \left[e^{-iE_{\lambda}x^0} \psi_{\lambda}(\mathbf{x}) a_{\lambda} + e^{iE_{\lambda}x^0} \psi_{-\lambda}(\mathbf{x}) b_{\lambda}^{\dagger} \right], \quad (3)$$

де $a_{\lambda}^{\dagger}$ та a_{λ} ($b_{\lambda}^{\dagger}$ та b_{λ}) позначають оператори народження та знищення спінових частинок (античастинок), які задовольняють стандартні антикомутаційні співвідношення; λ – це множина параметрів (квантових чисел), що визначають стан; $E_{\lambda} = E_{-\lambda} > 0$ – це енергія стану; $\psi_{\lambda}(\mathbf{x})$ є розв'язком стаціонарного рівняння Дірака

$$H\psi_{\lambda}(\mathbf{x}) = E_{\lambda}\psi_{\lambda}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

а символ $\sum_{\lambda}$ позначає комбіновану операцію підсумовування по дискретних значеннях та інтегру-

вання (з певною мірою) по неперервних значеннях λ .

У випадку космічного струнного фону та плоского простору-часу Мінковського, гамільтоніан Дірака має вигляд

$$H = -i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\partial} - i\tilde{e} \mathbf{V}) + \gamma^0 m, \quad (5)$$

де $\tilde{e}$ – це стала зв'язку спінового поля з калібрувальним полем $U_X(1)$. У циліндричних координатах (r, φ, z) , з віссю симетрії вздовж прямої космічної струни, лише кутова складова потенціалу поля не дорівнює нулю,

$$V_{\varphi} = \frac{\Phi}{2\pi}, \quad (6)$$

і гамільтоніан (5) набуває вигляду

$$H = -i\gamma^0 \left[\gamma^r \partial_r + \gamma^{\varphi} \left(\partial_{\varphi} - i \frac{\tilde{e}\Phi}{2\pi} \right) + \gamma^3 \partial_z \right] + \gamma^0 m. \quad (7)$$

Цей гамільтоніан можна представити як матрицю [41]

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & -i\sigma^1 \partial_z \\ -i\sigma^1 \partial_z & H_{-1} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де

$$H_s = -i \left[(s\sigma^1 \sin \varphi - \sigma^2 \cos \varphi) \partial_r + \frac{1}{r} (s\sigma^1 \cos \varphi + \sigma^2 \sin \varphi) \left(\partial_{\varphi} - i \frac{\tilde{e}\Phi}{2\pi} \right) \right] + \sigma^3 m \quad (9)$$

та параметр $s = \pm 1$. Чотирикомпонентну функцію $\psi_E(r, \varphi, z)$ можна розкласти на дві двокомпонентні функції, $\psi_E^{(1)}(r, \varphi)$ та $\psi_E^{(-1)}(r, \varphi)$,

$$\psi_E(r, \varphi, z) = \frac{e^{ik_3 z}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \psi_E^{(1)}(r, \varphi) \\ i\psi_E^{(-1)}(r, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

де

$$\psi_E^{(s)}(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} f_n^{(s)}(r, E) \exp \left[i \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} s \right) \varphi \right] \\ g_n^{(s)}(r, E) \exp \left[i \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s \right) \varphi \right] \end{pmatrix}, \quad (11)$$

і $\mathbb{Z}$ – це множина цілих чисел. Тоді густина індукованого вакуумного струму задається формулою

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \langle \text{vac} | \Psi^{\dagger}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma} \Psi(\mathbf{x}, t) | \text{vac} \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \text{sgn}(E) \psi_E^{\dagger}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma} \psi_E(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Можна показати, що $j_r = 0$, $j_z = 0$, та

$$j_\varphi = -r \sum_{s=\pm 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sgn}(E) s f_n^{(s)}(r, E) g_n^{(s)}(r, E). \quad (13)$$

Слід зазначити, що функція (11) подібна до спінової функції у випадку $(2+1)$ -вимірного простору-часу, де параметр s може дорівнювати 1 або -1 . Густина індукованого вакуумного струму у виразі (13) також представлена як сума індукованих вакуумних струмів у випадку $(2+1)$ -вимірного простору-часу [37] та додаткового інтегрування по складовій імпульсу, спрямованій вздовж струни.

Напруженість магнітного поля індукується у вакуумі у відповідності з рівнянням Максвелла

$$\partial \times \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = e \mathbf{j}(\mathbf{x}), \quad (14)$$

де e – константа електромагнітного зв'язку. Отже, отримуємо

$$B_I(r) = e \int_r^\infty \frac{dr'}{r'} j_\varphi(r'), \quad (15)$$

і загальний індукований вакуумний магнітний потік дорівнює

$$\Phi_I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^\infty dr r B_I(r). \quad (16)$$

3. Граничні умови

Як було показано в роботах [40, 41], у випадку прямої космічної струни радіуса r_0 у $(3+1)$ -вимірному просторі-часі, гранична умова на поверхні трубки залежить від чотирьох параметрів (u, v, t^z, t_φ) та має вигляд

$$(I - K) \psi|_{r=r_0} = 0, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} [u^2 - v^2 - (t_\varphi)^2/r^2 - (t^z)^2]^{-1/2} \times \\ & \times \left\{ [1 + u^2 - v^2 - (t_\varphi)^2/r^2 - (t^z)^2] I + \right. \\ & \left. + [1 - u^2 + v^2 + (t_\varphi)^2/r^2 + (t^z)^2] \gamma^0 \right\} \times \\ & \times (iu\gamma^r - iv\gamma^5 - t_\varphi\gamma^\varphi - t^z\gamma^z). \end{aligned} \quad (18)$$

842

Ця умова гарантує самоспряженість оператора Гамільтона для поля матерії та забезпечує непроникність трубки. Варто підкреслити, що параметри, які визначають цю граничну умову, можуть змінюватися вздовж струни.

Накладання вимог інваріантності відносно дискретних перетворень симетрії (P , C , CT , CPT) зменшує кількість параметрів граничних умов [41]. Але використання лише вимог P та CT інваріантності призводить до нескінченного значення індукованого вакуумного заряду поблизу струни, що фізично небажано.

Вимога CPT інваріантності гарантує, що як густина індукованого вакуумного заряду, так і загальний індукований вакуумний заряд вздовж струни обертаються в нуль, тоді як індукований вакуумний магнітний потік залишається нескінченним. У цьому випадку ми можемо записати граничну умову лише як однопараметричне співвідношення між компонентами спінових функцій (11),

$$f_n^{(s)} \Big|_{r=r_0} + \tan \left(s \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) g_n^{(s)} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad (19)$$

де $u = \sec \theta$ та $t^z = t_\phi = v = 0$.

Нарешті, вимога інваріантності спряження зарядів (C) гарантує, що індукований вздовж струни заряд зникає, а індукований вакуумний магнітний потік залишається скінченним. Як зазначалося в роботі [41], ця вимога обмежує граничний параметр θ лише двома можливими значеннями, $\theta = 0$ та $\theta = \pi$. Важливим моментом є те, що співвідношення (19) таке саме, як і у випадку $(2+1)$ -вимірного простору-часу при $s = 1$. Як показано в роботі [37], у цьому низьковимірному випадку індукований вакуумний потік також є скінченним лише при $\theta = 0$ та $\theta = \pi$.

4. Індукований магнітний потік

Для аналізу індукованого магнітного потоку у вакуумі спірного поля в присутності космічної струни у $(3+1)$ -вимірному просторі-часі ми скористаємося аналітичним результатом [41] для випадків, коли

$$F = \left\{ \frac{\tilde{e}\Phi}{2\pi} \right\} \neq \frac{1}{2} \quad (20)$$

та $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. У цих випадках було отримано, що

$$\Phi_I(mr_0) = \int_0^\infty \frac{dk_3}{\pi} \Phi_I^{(2\text{dim})} \left(\sqrt{m^2 + k_3^2} r_0 \right), \quad (21)$$

де k_3 – компонента імпульсу, напрямлена вздовж струни, r_0 – радіус трубки, $\Phi_I^{(2\text{dim})}(mr_0)$ – індукований магнітний потік у випадку $(2+1)$ -вимірного простору-часу, отриманий у роботі [37, вираз (5.17) при $\nu = 1$]. Для випадку $F = 1/2$ та $(3+1)$ -вимірного простору-часу було показано, що індукований магнітний потік є скінченним і дорівнює нулю лише при $\theta = 0$.

Варто зазначити, що $\Phi_I^{(2\text{dim})}(mr_0)$ зменшується зі збільшенням mr_0 при значенні граничного параметра $\theta = 0$, але зростає при $\theta = \pi$ [37]. У $(2+1)$ -вимірному просторі-часі обидва випадки фізично допустимі, оскільки вони дають скінченні значення індукованого вакуумного магнітного потоку. Але у випадку $(3+1)$ -вимірного простору-часу граничний параметр $\theta = \pi$ є неприйнятним, оскільки він неминуче призводить до нескінченного значення індукованого магнітного потоку. Ця розбіжність виникає з інтеграла зростаючої функції у виразі (21); див. [37, рис. 2]. Висновок роботи [41], що параметр граничної умови $\theta = \pi$ є допустимим у $(3+1)$ -вимірному просторі-часі, і що індукований магнітний потік у цьому випадку зростає зі збільшенням товщини трубки, був зроблений помилково, оскільки потік розходиться для трубок довільної товщини.

Таким чином, далі ми розглядатимемо лише випадок параметра граничної умови $\theta = 0$. У цьому випадку гранична умова на поверхні трубки має вигляд

$$(I - i\gamma^r) \psi|_{r=r_0} = 0, \quad (22)$$

або як співвідношення між компонентами спіornoїх функцій

$$f_n^{(s)} \Big|_{r=r_0} + g_n^{(s)} \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (23)$$

Зауважимо, що чотири параметри граничної умови загального вигляду (18) у цьому випадку є фіксованими вздовж поверхні трубки та записуються у вигляді $t^z = 0$, $t_\phi = 0$, $v = 0$, та $u = 1$.

Розглянемо залежність (20) для індукованого магнітного потоку від потоку всередині трубки у

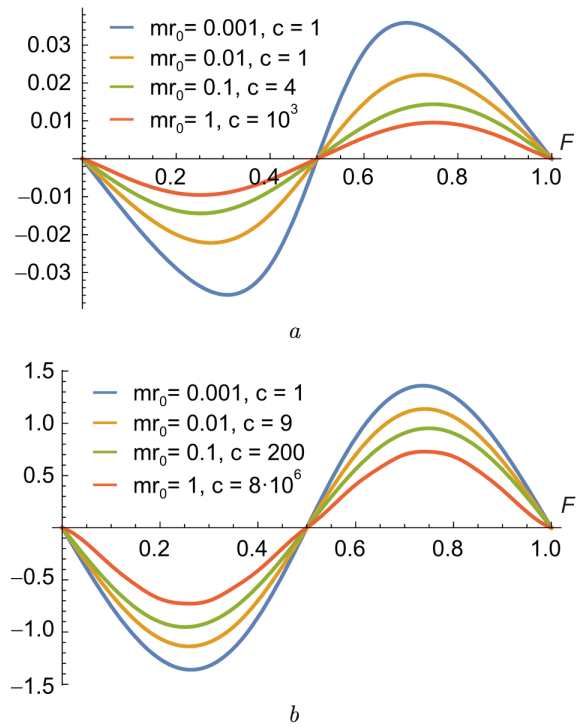


Рис. 1. Індукований вакуумний магнітний потік у безрозмірних одиницях як функція “магнітного” потоку F всередині трубки при граничному параметрі $\theta = 0$ для різних значень товщини трубки mr_0 : $em^{-1}\Phi_I^{(d=2)}$ у $(2+1)$ -вимірному просторі-часі (a), $e\pi\Phi_I^{(d=3)}$ у $(3+1)$ -вимірному просторі-часі (b). Для зручності представлення та порівняння вищезазначені функції помножено на вказані коефіцієнти c

випадку $(3+1)$ -вимірного простору-часу та порівнюємо її з випадком $(2+1)$ -вимірного простору-часу. Результати наших обчислень наведені на рис. 1. Як видно, представлені функції є симетричними відносно заміни $F \longleftrightarrow 1 - F$. Вони дорівнюють нулю при $F = 0, 1/2$, та 1 , тоді як їх екстремальні значення дещо зміщуються до $F = 1/2$ зі зменшенням товщини трубки.

Розглянемо також залежність індукованого магнітного потоку від радіуса трубки при фіксованому “магнітному” потоці $F = 0,7$ всередині трубки [рівняння (20)] для випадку $(3+1)$ -вимірного простору-часу та порівнюємо її з випадком $(2+1)$ -вимірного простору-часу (див. рис. 2). Вибір значення F зумовлений тим, що значення індукованого магнітного потоку при $F = 0,7$ близьке до максимального для трубок різної товщини. Як ба-

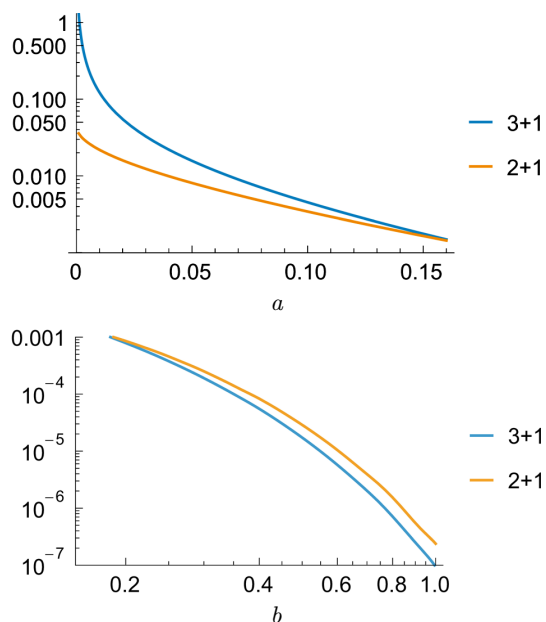


Рис. 2. Індукований вакуумний магнітний потік у безрозмірних одиницях у $(2+1)$ -просторі-часі ($em^{-1}\Phi_1^{(d=2)}$) та у $(3+1)$ -просторі-часі ($e\pi\Phi_1^{(d=3)}$) як функція товщини трубки mr_0 для випадків $mr_0 < 0,16$ (a) та $mr_0 > 0,16$ (b)

чимо, для малого радіуса трубки, $mr_0 \leq 0,16$, індукований безрозмірний магнітний потік у $(3+1)$ -вимірному просторі-часі більший, ніж у випадку $(2+1)$ -вимірному просторі-часу.

5. Висновки

У цій статті ми розглянули індукування магнітного потоку у вакуумі зарядженого масивного спірного поля у випадку $3+1$ -вимірного простору-часу в присутності магнітної космічної струни на основі результатів, отриманих в роботах [37, 41]. Космічна струна була змодельована як непроникна трубка скінченної товщини для поля матерії, що містить всередині “магнітне” поле та підпорядковується певній граничній умові на своїй поверхні. Калібрувальне поле всередині трубки може бути деяким абелевим полем раннього Всесвіту. Продемонстровано, що в $(3+1)$ -вимірному просторі-часі, незалежно від внутрішньої структури космічної струни, єдина допустима гранична умова на поверхні трубки відповідає параметру $\theta = 0$ в рівнянні (19). Це відповідає граничній умові МІТ-моделі кваркового мішка [45, 46]. За всіх інших граничних умов індукований у спірному ваку-

умі заряд або магнітний потік буде нескінченним. Твердження, зроблене в роботі [41], що значення параметра граничної умови $\theta = \pi$ також є фізично допустимим, і що індукований вакуумний магнітний потік у цьому випадку зростає зі збільшенням товщини трубки, виявилося хибним, оскільки індукований потік розходиться для трубок довільної товщини.

Слід зазначити, що у випадку $(2+1)$ -вимірного простору-часу можливі два значення параметра граничної умови: $\theta = 0$ та $\theta = \pi$. У випадку $\theta = 0$ індукований магнітний потік зменшується зі збільшенням товщини трубки. Навпаки, при $\theta = \pi$ індукований магнітний потік залишається скінченним, але зростає з товщиною трубки, що виглядає дещо дивним із загальної фізичної точки зору.

Результати наших числових розрахунків для випадку $(3+1)$ -вимірного простору-часу наведені на рис. 1 та 2, і порівнюються з випадком $(2+1)$ -вимірного простору-часу. На рис. 1 синусоїдна залежність індукованого у спірному вакуумі магнітного потоку від “магнітного” потоку всередині трубки збігається із синусоїдною залежністю для випадку $(2+1)$ -вимірного простору-часу [37], але має більшу амплітуду для малої товщини трубки, $mr_0 \leq 0,16$. Сильно зростаюча поведінка безрозмірного індукованого у вакуумі магнітного потоку для випадку $(3+1)$ -вимірного простору-часу порівняно з випадком $(2+1)$ -вимірного простору-часу при малій товщині трубки, $mr_0 \ll 1$ (див. рис. 2), може бути пояснена в рамках моделі магнітної трубки нульової товщини (сингулярний магнітний вихор); див., наприклад, роботи [20] для спінора та [47] для скалярної матерії. Як бачимо, у випадку $(2+1)$ -вимірного простору-часу індукований вакуумний магнітний потік прямує до постійної величини при $mr_0 \rightarrow 0$ [20, 47], але у випадку $(3+1)$ -вимірного простору-часу індукований вакуумний магнітний потік розходиться $\sim \ln(mr_0)$ при $mr_0 \rightarrow 0$ [47].

Нарешті, зазначимо, що індукція магнітного потоку спірного поля (з масою спірної частинки m) у вакуумі буде значною лише якщо $mr_0 \ll 1$. Товщину космічної струни можна знайти з наближеної умови $m_H r_0 = 1$, де m_H – масштаб спонтанного порушення симетрії (або маса відповідного поля Хігса), що приводить до лінійного топологічного дефекту (космічної струни). Отже, можна записати співвідношення $mr_0 = m/m_H$. Воно буде

менше від 1, якщо $m \ll m_H$, що є правдоподібним для ферміонних полів Стандартної моделі. Більше того, поля легких ферміонів матимуть сильніший вплив на поляризацію вакууму в присутності магнітних космічних струн.

Робота В.М. Горкавенко частково підтримана в рамках проекту Міністерства освіти і науки України № 5БФ051-04 “Високоенергетичні процеси в плазмі: прискорення космічних променів та їх внесок у космічну погоду”. Автори вдячні Т.В. Горкавенко та М.С. Царенковій за корисні коментарі та допомогу у підготовці цієї статті.

1. R. Jeannerot, J. Rocher, M. Sakellariadou. How generic is cosmic string formation in supersymmetric grand unified theories. *Phys. Rev. D* **68**, 103514 (2003).
2. W. Buchmuller, V. Domcke, K. Schmitz. Metastable cosmic strings. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2023**, 020 (2023).
3. S. Sarangi, S.H.H. Tye. Cosmic string production towards the end of brane inflation. *Phys. Lett. B* **536**, 185 (2002).
4. N.T. Jones, H. Stoica, S.H. Henry Tye. The production, spectrum and evolution of cosmic strings in brane inflation. *Phys. Lett. B* **563**, 6 (2003).
5. E.J. Copeland, R.C. Myers, J. Polchinski. Cosmic F- and D-strings, *J. High Energy Phys.* **06**, 013 (2004).
6. E.J. Copeland, T.W.B. Kibble. Cosmic strings and superstrings. *Proc. R. Soc. A* **466**, 623 (2010).
7. A. Vilenkin, E.P.S. Shellard. *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, 1994).
8. M.B. Hindmarsh, T.W.B. Kibble. Cosmic strings. *Rep. Progr. Phys.* **58**, 477 (1995).
9. T. Damour, A. Vilenkin. Gravitational radiation from cosmic (super) strings: Bursts, stochastic background, and observational windows. *Phys. Rev. D* **71**, 063510 (2005).
10. V. Berezhinsky, B. Hnatyk, A. Vilenkin. Gamma ray bursts from superconducting cosmic strings. *Phys. Rev. D* **64**, 043004 (2001).
11. P. Bhattacharjee, G. Sigl. Origin and propagation of extremely high-energy cosmic rays. *Phys. Rep.* **327**, 109 (2000).
12. E. Morganson, P. Marshall, T. Treu, T. Schrabback, R.D. Blandford. Direct observation of cosmic strings via their strong gravitational lensing effect – II. Results from the HST/ACS image archive. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **406**, 2452 (2010).
13. J.L. Christiansen, E. Albin, T. Fletcher, J. Goldman, I.P.W. Teng, M. Foley *et al.* Search for cosmic strings in the COSMOS survey. *Phys. Rev. D* **83**, 122004 (2011).
14. T. Charnock, A. Avgoustidis, E.J. Copeland, A. Moss, CMB constraints on cosmic strings and superstrings. *Phys. Rev. D* **93**, 123503 (2016).
15. R. Abbott *et al.* Constraints on cosmic strings using data from the third advanced LIGO–Virgo observing run. *Phys. Rev. Lett.* **126**, 241102 (2021).
16. H.B. Nielsen, P. Olesen. Vortex-line models for dual strings. *Nucl. Phys. B* **61**, 45 (1973).
17. P. Gornicki. Aharonov-Bohm effect and vacuum polarization. *Ann. Phys. (N.Y.)* **202**, 271 (1990).
18. E.G. Flekkoy, J.M. Leinaas, Vacuum currents around a magnetic flux string. *Int. J. Mod. Phys. A* **06**, 5327 (1991).
19. R.R. Parwani, A.S. Goldhaber. Decoupling in (2 + 1)-dimensional QED? *Nucl. Phys. B* **359**, 483 (1991).
20. Yu.A. Sitenko. Selfadjointness of the Dirac Hamiltonian and fermion number fractionization in the background of a singular magnetic vortex. *Phys. Lett. B* **387**, 334 (1996).
21. Yu.A. Sitenko. Effects of fermion vacuum polarization by a singular magnetic vortex: Zeta function and energy. *Phys. Atom. Nucl.* **62**, 1056 (1999).
22. S. Bellucci, E.R. Bezerra de Mello, A. de Padua, A.A. Saharian. Fermionic vacuum polarization in compactified cosmic string spacetime. *Eur. Phys. J. C* **74**, 2688 (2014).
23. E.R. Bezerra de Mello, V. Bezerra, A.A. Saharian, V.M. Bardeghyan. Fermionic current densities induced by magnetic flux in a conical space with a circular boundary. *Phys. Rev. D* **82**, 085033 (2010).
24. S. Bellucci, E.R. Bezerra de Mello, A.A. Saharian. Fermionic condensate in a conical space with a circular boundary and magnetic flux. *Phys. Rev. D* **83**, 085017 (2011).
25. E.R. Bezerra de Mello, F. Moraes, A.A. Saharian. Fermionic Casimir densities in a conical space with a circular boundary and magnetic flux. *Phys. Rev. D* **85**, 045016 (2012).
26. M.M. de Sousa, R. Ribeiro, E.R. Bezerra de Mello. Induced fermionic current by a magnetic tube in the cosmic string spacetime. *Phys. Rev. D* **93**, 043545 (2016).
27. M.M. de Sousa, R. Ribeiro, E.R. Bezerra de Mello. Fermionic vacuum polarization by an Abelian magnetic tube in the cosmic string spacetime. *Phys. Rev. D* **95**, 045005 (2017).
28. Y. Aharonov, D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
29. V.M. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, O.B. Stepanov. Polarization of the vacuum of a quantized scalar field by an impenetrable magnetic vortex of finite thickness. *J. Phys. A* **43**, 175401 (2010).
30. V.M. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, O.B. Stepanov. Vacuum energy induced by an impenetrable flux tube of finite radius. *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 3889 (2011).
31. V.M. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, O.B. Stepanov. Casimir energy and force induced by an impenetrable flux tube of finite radius. *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350161 (2013).
32. V.M. Gorkavenko, T.V. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, M.S. Tsarenkova. Induced vacuum energy density of quantum charged scalar matter in the background of an impenetrable magnetic tube with the Neumann boundary condition. *Ukr. J. Phys.* **67**, 715 (2022).
33. V.M. Gorkavenko, A.O. Zaporozhchenko, M.S. Tsarenkova, Dependence of scalar matter vacuum energy, induced by a

- magnetic topological defect, on the coupling to space-time curvature. *J. Phys. A* **58**, 285401 (2025).
34. V.M. Gorkavenko, I.V. Ivanchenko, Yu.A. Sitenko. Induced vacuum current and magnetic field in the background of a vortex. *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650017 (2016).
 35. V.M. Gorkavenko, T.V. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, M.S. Tsarenkova. Induced vacuum current and magnetic flux in quantum scalar matter in the background of a vortex defect with the Neumann boundary condition. *Ukr. J. Phys.* **67**, 3 (2022).
 36. Yu.A. Sitenko, V.M. Gorkavenko, M.S. Tsarenkova, Magnetic flux in the vacuum of quantum bosonic matter in the cosmic string background. *Phys. Rev. D* **106**, 105010 (2022).
 37. Yu.A. Sitenko, V.M. Gorkavenko. Induced vacuum magnetic flux in quantum spinor matter in the background of a topological defect in two-dimensional space. *Phys. Rev. D* **100**, 085011 (2019).
 38. A.R. Akhmerov, C.W.J. Beenakker. Boundary conditions for Dirac fermions on a terminated honeycomb lattice. *Phys. Rev. B* **77**, 085423 (2008).
 39. M.H. Al-Hashimi, U.-J. Wiese. From a particle in a box to the uncertainty relation in a quantum dot and to reflecting walls for relativistic fermions. *Ann. Phys.* **327**, 1 (2012).
 40. Yu.A. Sitenko. Casimir effect with quantized charged spinor matter in background magnetic field. *Phys. Rev. D* **91**, 085012 (2015).
 41. Yu.A. Sitenko. Induced vacuum magnetic field in the cosmic string background. *Phys. Rev. D* **104**, 045013 (2021).
 42. K. Horiguchi, K. Ichiki, N. Sugiyama. Primordial magnetic fields from the string network. *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2016**, 083E02 (2016).
 43. K. Subramanian. The origin, evolution and signatures of primordial magnetic fields. *Rep. Progr. Phys.* **79**, 076901 (2016).
 44. A. Neronov, I. Vovk. Evidence for strong extragalactic magnetic fields from Fermi observations of TeV blazars. *Science* **328**, 73 (2010).
 45. A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Phys. Rev. D* **9**, 3471 (1974).
 46. K. Johnson. The M.I.T. bag model. *Acta Phys. Pol. B* **6**, 865 (1975).
 47. Yu.A. Sitenko, N.D. Vlasii. Induced vacuum current and magnetic field in the background of a cosmic string. *Class. Quant. Grav.* **26**, 195009 (2009).
- Одержано 31.08.25.
Переклад на українську мову О. Войтенка
- Yu.I. Pylypchuk, P.O. Nakaznyi,
O.V. Barabash, A.O. Zaporozhchenko, V.M. Gorkavenko*
- MAGNETIC FIELD
IN VACUUM OF QUANTUM SPINOR
MATTER INDUCED BY A COSMIC
STRING IN THREE-DIMENSIONAL SPACE
- A linear magnetic topological defect (cosmic string) is modeled as a magnetic flux-carrying tube that is impenetrable to external spinor matter. The matter field is quantized in the background of this tube, with the most general set of boundary conditions ensuring both the tube's impenetrability and the self-adjointness of the Dirac Hamiltonian operator. We compute the induced vacuum magnetic flux along the tube in $(3 + 1)$ -dimensional space-time. It is shown that the requirement for the total induced vacuum magnetic flux to be finite restricts the admissible boundary conditions to only one choice: the MIT quark bag boundary condition. The dependence of the effect on the transverse size of the tube and the flux inside the tube is also analyzed.
- Keywords:* vacuum polarization, linear topological defect, cosmic string, Aharonov–Bohm effect.