

О.М. КОНОВАЛЕНКО,¹ З.О. МАЙЗЕЛІС^{1,2}

¹ Інститут радіофізики та електроніки імені О.Я. Усікова НАН України
(Вул. Академіка Проскури, 12, Харків 61085)

² Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
(Майдан Свободи, 4, Харків 61022; e-mail: maizelis.z.a@gmail.com)

МНОЖИННІ СЛАБКІ СПІЛЬНІ ВИМІРЮВАННЯ ЯК СПОСІБ ПРИГНІЧЕННЯ ДЕКОГЕРЕНЦІЇ

УДК 539

Множинні, рівномірно розподілені в часі, слабкі вимірювання застосовуються до двокубітної заплутаної системи, щоб зменшити швидкість її декогеренції, тобто не допустити зменшення недіагональних елементів. Схеми подібні до квантового ефекту Зенона, але відрізняються частотою проведення вимірювань. Якщо в традиційному квантовому ефекті Зенона використовуються швидкі вимірювання для пригнічення гамільтонової динаміки, то запропонований метод використовує запутаність між кубітами для зниження швидкості декогеренції. Продemonстровано, що це дозволяє частково пригнічувати декогеренцію в разі еволюції за рівнянням Ліндблада.

Ключові слова: спільні слабкі вимірювання, пригнічення декогеренції, квантовий ефект Зенона, еволюція за рівнянням Ліндблада.

1. Вступ

Хоча технології квантових обчислень та методи квантової корекції помилок швидко розвивалися, декогеренція залишається постійною проблемою [1–5]. Небажані взаємодії між кубітами та зовнішніми ступенями свободи, такими як електромагнітні моди експериментальних установок, індукують спільну динаміку, яка перетворює чисті квантові стани на змішані. Цю негамільтонівську поведінку можна змоделювати за допомогою квантових кінетичних рівнянь [6–8] або за допомогою дії операторів Крауса [7, 9].

Були розроблені різноманітні стратегії для протидії цим шкідливим наслідкам. Наприклад, кван-

тові коди корекції помилок [10] захищають інформацію, кодуючи один логічний кубіт у заплутаний стан кількох фізичних кубітів, що дозволяє процедурам відновлення виправляти помилки, внесені взаємодією з навколишнім середовищем. Альтернативні методи використовують притаманні симетрії для побудови підпросторів без декогеренції [11] або реалізують короткострокові імпульси (динамічне розчеплення) [12–15] для боротьби з шумом. Однак застосування таких імпульсних послідовностей зазвичай обмежуються протидією шуму з характерними частотами нижчими за застосовану частоту регулювання.

Добре відомий негамільтонівський підхід для запобігання небажаній динаміці забезпечується традиційним квантовим ефектом Зенона (КЕЗ), де повторювані сильні (проективні) вимірювання “заморожують” еволюцію системи, тим самим пом’якшуючи як декогеренцію, так і дисипацію [16]. Однак, сильна зворотна дія проективних вимірювань може обмежувати гнучкість при контролі

Цитування: Коноваленко О.М., Майзеліс З.О. Множинні слабкі спільні вимірювання як спосіб пригнічення декогеренції. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 8, 522 (2025).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

еволюції системи. На противагу цьому, представлений в цій роботі метод побудований на серії слабких, рівновіддалених спільних вимірювань, що застосовуються до заплутаної двокубітної системи.

Ключовим нововведенням у нашому підході є використання слабких вимірювань для послаблення втрати когерентності під час негамільтонівської еволюції Ліндблада. Це дає дві основні переваги. По-перше, ці вимірювання дозволяють безперервно, з підстроюванням взаємодію з системою, що дозволяє регулювати “силу” або вплив вимірювання так, щоб збурення можна було оптимізувати відносно динаміки системи. По-друге, на відміну від звичайної квантової еволюції, яка вимагає швидких, сильних вимірювань для зупинки еволюції системи, наша стратегія працює на частотах вимірювань нижче характерних частот термостату. Ця послаблена вимога до часу вимірювання компенсується налаштуванням сили вимірювання, так що система м’яко спрямовується до підпростору, що відповідає заданим заплутаним станам, які диктуються квантовим алгоритмом.

Багато традиційних методів зосереджені на захисті окремих кубітів або використанні симетрії шуму для формування підпросторів без декогеренції. Однак, у багатьох квантових алгоритмах кубіти за своєю суттю вже заплутані в заздалегідь визначених конфігураціях. Використовуючи попередні знання про ці дозволені заплутані стани, наш метод активно пригнічує декогеренцію за допомогою спільних вимірювань, які проєктують загальний стан на бажаний заплутаний підпростір. Це гнучке керування, реалізоване в рамках еволюції Ліндблада, не тільки зменшує декогеренцію, але й зберігає вирішальну заплутаність між кубітами ефективніше, ніж традиційні методи сильного вимірювання.

Стаття організована наступним чином. У розділі 2 розглядаються принципи звичайного КЕЗ та детально описується запропонований нами метод пригнічення декогеренції за допомогою спільних слабких вимірювань. У розділі 3 демонструється застосування цього методу до двокубітної системи та наводяться як числові результати, так і аналітичні асимптотичні співвідношення для аналізу ефективності збереження заплутаності. У розділі 3.3 досліджується залежність ефективності методу від таких ключових параметрів системи як частота вимірювань, швидкість декогеренції та по-

чатковий стан системи; особлива увага звернута на настроюваність, що забезпечується у підході слабких вимірювань. Нарешті, у розділі 4 підсумовуються результати та обговорюються потенційні застосування при розробці квантових алгоритмів, де використання заздалегідь визначених заплутаних конфігурацій обіцяє перспективний шлях до зменшення декогеренції.

2. Метод пригнічення декогеренції

2.1. Заморожування унітарної еволюції

На відміну від стандартного КЕЗ, що базується на сильних (проєктивних) вимірюваннях, наш метод безперервно та м’яко спрямовує стан системи до попередньо вибраного підпростору. Цей підпростір визначається дозволеними заплутаними станами, відомими з квантового алгоритму. Замість регулярного колапсу, слабкі вимірювання здійснюють зворотню дію, яку можна налаштувати для балансування взаємодії між унітарною динамікою та індукованою середовищем декогеренцією.

Традиційно, КЕЗ ілюструється, починаючи з початкового стану $|\Psi_0\rangle$, який еволюціонує під дією незалежного від часу гамільтоніана $\mathcal{H}$. У проєктивному випадку, після кожного інтервалу часу Δt стан повністю проєктується назад на $|\Psi_0\rangle$ згідно з формулою

$$\rho_t = \frac{(P e^{-i\mathcal{H}\Delta t})^N P |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| P (e^{i\mathcal{H}\Delta t} P)^N}{\text{Tr}[(P e^{-i\mathcal{H}\Delta t})^N P |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| P (e^{i\mathcal{H}\Delta t} P)^N]},$$

де $P = |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|$ – проєктор, а $N + 1$ – це кількість проєкцій. Цей результат можна легко отримати шляхом подальшого застосування пропагатора гамільтоніана та проєктора P до початкового стану $\rho_0 = |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|$. Розклад оператора еволюції при малих часах,

$$e^{-i\mathcal{H}\Delta t} \approx 1 - i\mathcal{H}\Delta t - \frac{1}{2}\mathcal{H}^2\Delta t^2,$$

показує, що ймовірність виживання

$$p(\Delta t) = |\langle \Psi_0 | e^{-i\mathcal{H}\Delta t} | \Psi_0 \rangle|^2 \quad (1)$$

відхиляється від одиниці лише квадратично по Δt . Таким чином, у границі швидких проєктивних вимірювань стан виглядає “замороженим” відносно унітарної динаміки.

Однак, коли система взаємодіє з середовищем, її еволюція стає негамільтонівською. Такі ефекти зазвичай моделюються рівнянням Ліндблада з оператором Ліувілля $\mathcal{L}$,

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho = -i[\mathcal{H}, \rho] + \sum_i \left(L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, \rho\} \right). \quad (2)$$

В якості початкового стану ми беремо максимально заплутаний стан. Це – стан Белла $\rho_0 = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|$, де $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. У цій ситуації додаткові дисипативні члени дають поправки порядку Δt (не лише квадратичні), а часті проєктивні вимірювання не повністю пригнічують декогеренцію. Щоб вирішити цю проблему, наш підхід замінює сильні вимірювання спільними слабкими вимірюваннями, які можна застосовувати на частотах нижче характерних швидкостей термостату, водночас використовуючи структуру простору заплутаних станів.

2.2. Спільні слабкі вимірювання для часткового пригнічення декогеренції

Замість того, щоб повністю проєктувати стан на один початковий стан, розглянемо алгоритм еволюції, де відомо, що підмножина $\mathcal{S}$ кубітів лежить у певному заплутаному підпросторі з базисом $\{|\Psi_i\rangle\}$. У нашій схемі збереження стану досягається за допомогою серії спільних слабких вимірювань.

Для ілюстрації цього можна визначити набір операторів слабких вимірювань $\{M_i\}$, пов'язаних з базисними станами $|\Psi_i\rangle$. Типова модель для слабого оператора вимірювання така:

$$M_i = \sqrt{1-q} I + \sqrt{q} |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \quad (3)$$

де q (при $0 < q \ll 1$) кількісно визначає силу вимірювання. У границі $q \rightarrow 1$ ці оператори наближаються до повних проєктивних вимірювань, тоді як для малих q вони викликають лише часткове зміщення в бік бажаного підпростору.

Припускаючи, що стан системи еволюціонує згідно оператора Ліувілля $\mathcal{L}$ протягом інтервалу часу Δt , слабе оновлення вимірювання виражається наступним чином:

$$\rho_{t+\Delta t} = \frac{\sum_i M_i e^{\mathcal{L}\Delta t} \rho_t M_i^\dagger}{\text{Tr}\left(\sum_i M_i e^{\mathcal{L}\Delta t} \rho_t M_i^\dagger\right)}.$$

Після повторення цього процесу $N = t/\Delta t$ разів, кумулятивна еволюція відфільтровує компоненти, які не належать до дозволеного заплутаного підпростору, тим самим зменшуючи ефективний коефіцієнт декогеренції. Цей механізм пропонує дві ключові переваги. По-перше, це настроювана зворотна дія: параметр q забезпечує контроль над викликаним вимірюванням збуренням. На відміну від проєктивних вимірювань, слабкі вимірювання дозволяють збалансувати збурення з природною динамікою системи. По-друге, це використання відомої заплутаності: оскільки множина $\{|\Psi_i\rangle\}$ кодує попередню інформацію про допустимі заплутані конфігурації в алгоритмі, спільні слабкі вимірювання вибірково пригнічують переходи в стани поза цим підпростором.

Таким чином, інтегруючи негамільтонівську динаміку, задану рівнянням Ліндблада, та перемешовуючи її з відповідно налаштованими спільними слабкими вимірюваннями, наш метод використовує як повільну частоту вимірювань (відносно частот шуму), так і відому структуру заплутаності між кубітами. Це приводить до часткового, але ефективного пригнічення декогеренції. Хоча загальна ймовірність збереження бажаного стану стає меншою за одиницю та зменшується зі збільшенням частоти вимірювань, гнучкість налаштування q пропонує перспективний шлях до оптимізації контролю декогеренції в реалістичних квантових обчислювальних архітектурах.

3. Збереження заплутаності в двокубітній системі

3.1. Вільна еволюція системи та її еволюція за допомогою вимірювань

У цьому розділі ми проілюструємо слабкий захист заплутаних станів за допомогою вимірювань, розглядаючи просту систему з двох кубітів. Як і раніше, кубіти з частотами ω_1 та ω_2 взаємодіють із зовнішнім термостатом, який індукує декогеренцію. Однак, на відміну від звичайного квантового ефекту Зенона, заснованого на проєктивних вимірюваннях, ми тепер використовуємо спільні слабкі вимірювання, щоб поступово повернути систему назад до заплутаного підпростору, заданого квантовим алгоритмом.

Ми почнемо з розгляду неконтрольованої еволюції. Вважатимемо, що два кубіти спочатку під-

готовлені в когерентній суперпозиції двох станів Белла,

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{1-p}}{\sqrt{2}} |01\rangle + \frac{\sqrt{1-p} - \sqrt{p}}{\sqrt{2}} |10\rangle,$$

так що при $p = 0$ або $p = 1$ стан є максимально заплутаним. У багатьох квантових алгоритмах правильне кодування спрямовує систему еволюціонувати в межах відомого підпростору, навіть якщо точний стан не визначений заздалегідь. Гамільтоніан системи задається формулою

$$\mathcal{H} = \omega_+ S_z + \omega_- \Delta S_z.$$

де

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_1 \pm \omega_2}{2}, \quad S_z = s_z \otimes I + I \otimes s_z,$$

$$\Delta S_z = s_z \otimes I - I \otimes s_z$$

і $s_z = \sigma_z/2$. Декогеренція, що накладається термостатом, моделюється в рамках Ліндблада. Для спрощення ми використовуємо набір операторів Ліндблада

$$\begin{aligned} L_{2i-1} &= \sqrt{\gamma_i (\bar{n} + 1)} s_{-}^{(i)}, \\ L_{2i} &= \sqrt{\gamma_i \bar{n}} s_{+}^{(i)}, \\ L_{4+j} &= \sqrt{\gamma_{pj}} s_z^{(j)}, \quad i = 1, 2, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} s_{\pm}^{(1)} &= s_{\pm} \otimes I, \quad s_{\pm}^{(2)} = I \otimes s_{\pm}, \\ s_z^{(1)} &= s_z \otimes I, \quad s_z^{(2)} = I \otimes s_z, \end{aligned}$$

$s_{\pm} = s_x \pm i s_y$, а число Планка $\bar{n}$ (вважається однаковим для обох кубітів) характеризує рівноважну температуру. Оператори L_i ($i = 1 - 4$) описують лінійні взаємодії енергообміну з термостатом, тоді як L_5 та L_6 моделюють дисперсійні ефекти.

У вільній еволюції недиагональний елемент ρ_{23} матриці густини (виражений у обчислювальному базисі) еволюціонує наступним чином:

$$\rho_{23}^{(\text{free})} \simeq -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{A t}{2}\right),$$

де

$$A = (2\bar{n} + 1)(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_{p1} + \gamma_{p2} + 2i(\omega_1 - \omega_2),$$

що вказує на те, що як гамільтонівська динаміка, так і лінійні зв'язки кубітів з термостатом, сприяють декогеренції та фазовій еволюції. На рис. 1

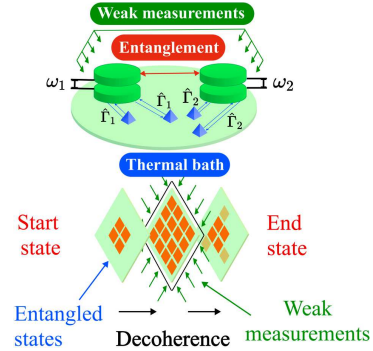


Рис. 1. Схематичне зображення двокубітної системи, що взаємодіє із зовнішнім термостатом. Протокол чергує періоди еволюції за оператором Ліувілля та послідовні спільні слабкі вимірювання. Ці вимірювання проєктують стан системи на дозволений підпростір заплутаних станів (тут стани Белла) для пригнічення декогеренції

схематично показано двокубітну конфігурацію, що контактує з термостатом.

Щоб протидіяти декогеренції без повного заморожування динаміки, ми вводимо протокол вимірювання, який змінює стан у напрямку бажаного заплутаного підпростору. На відміну від проєктивних вимірювань, наш підхід використовує супероператор вимірювання $\mathcal{M}$, який індукує лише частковий колапс. У цьому формулюванні оновлення вимірювання виглядає так:

$$\mathcal{M}[\rho] = (1 - q) \rho + q \sum_{i=\pm} |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \rho |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|,$$

де параметр $0 < q \ll 1$ кількісно визначає силу вимірювання, а проєктори $|\Psi_{\pm}\rangle \langle \Psi_{\pm}|$ вибирають дозволений підпростір. Після вільної еволюції протягом певного інтервалу часу Δt згідно з динамікою, заданою оператором Ліувілля $e^{\mathcal{L}\Delta t}$, стан оновлюється наступним чином:

$$\rho(t + \Delta t) = \Lambda^{-1} \mathcal{M}[e^{\mathcal{L}\Delta t} \rho(t)],$$

де

$$\Lambda = \text{Tr}\{\mathcal{M}[e^{\mathcal{L}\Delta t} \rho(t)]\}.$$

Таке формулювання підкреслює, що при кожному оновленні система спочатку зазнає незбуреної еволюції, а потім слабкої проєкції на заплутаний підпростір. Ітеруючи цей процес, протокол постійно пригнічує відхилення від цільової конфігурації стану, водночас забезпечуючи контрольовану взаємодію з внутрішньою динамікою системи.

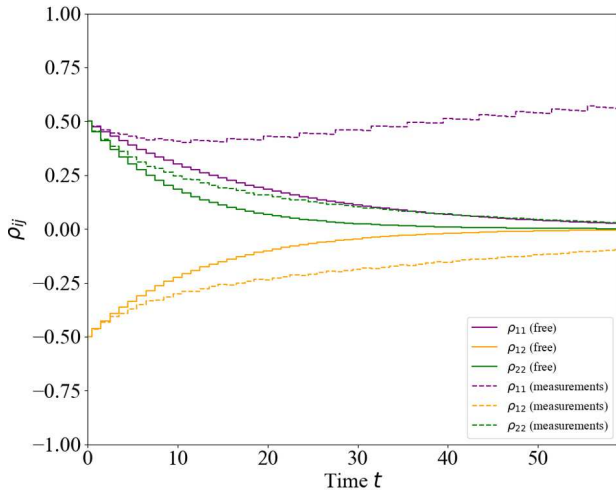


Рис. 2. (У кольорі онлайн) Порівняння еволюції елементів матриці густини в двокубітній системі. Показана еволюція у часі (в одиницях $1/\omega_1$) як діагональних, так і недіагональних елементів при вільній еволюції та з повторними спільними слабкими вимірюваннями. Процес слабких вимірювань пригнічує внески гамільтонової динаміки та лінійних зв'язків кубіт-термостат, тим самим зменшуючи декогеренцію. Параметри: $\omega_2 = \omega_1$, $\gamma_1/\omega_1 = \gamma_2/\omega_1 = 0,05$, $\gamma_{p1}/\omega_1 = \gamma_{p2}/\omega_1 = 0,005$, з $N = 50$ оновленнями вимірювань та $\bar{n} = 0$

Внаслідок спільної дії термостату та слабких вимірювань, внески, що виникають як результат гамільтонової еволюції та лінійних взаємодій (пропорційних γ_1 та γ_2), пригнічуються. Наприклад, недіагональний елемент тепер еволюціонує за приблизно таким законом:

$$\rho_{23}^{(\text{meas})} \simeq -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\gamma_{p1} + \gamma_{p2}) t}{2} \right)$$

для $q = 1$, тим самим усуваючи члени дефазування, спричинені обміном енергією та унітарними коливаннями. Фактично, спільні слабкі вимірювання відфільтровують небажані компоненти еволюції, зберігаючи лише дисперсійні ефекти декогеренції, які не можуть бути компенсовані протоколом вимірювання. Це пригнічення досягається без необхідності високочастотної проективної послідовності вимірювань. Гнучкість, що забезпечується налаштуванням потужності вимірювання q , дозволяє застосовувати протокол з інтервалами, що залишаються сумісними з внутрішньою динамікою системи.

На рис. 2 порівнюється часова еволюція вибраних елементів матриці густини при вільній

еволюції та при повторних спільних слабких вимірюваннях.

Рисунок 3 демонструє еволюцію елементів матриці для трьох різних параметрів q : 0 (перший рядок, *a*), 0,9 (другий рядок, *b*), та 1 (третій рядок, *c*), та для $\omega_1 t = 0, 10, 20, 30$ (чотири стовпці). Кольором представлена дійсна частина елементів матриці, причому на кожній панелі відтворені всі 16 елементів. Ми бачимо, що зі збільшенням параметра q ефективність методу зростає від першого до третього рядка.

3.2. Характеристики ефективності методу

Для кількісної оцінки впливу різних параметрів на продуктивність нашої схеми необхідно вибрати показники, що характеризують когерентність системи. У багатьох випадках когерентність пов'язана з недіагональними елементами матриці густини. З поміж кількох кандидатів (це – відносна ентропія когерентності [17], дивергенція Єнсена–Шеннона [18] та норма квантової когерентності l_1 [19]) ми обираємо останнього. В обчислювальному базисі норма l_1 визначається як

$$C_{l_1} = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|. \quad (5)$$

У нашому простому прикладі внесок у C_{l_1} переважно зумовлений єдиним недіагональним елементом ρ_{23} , що є початково ненульовим.

Декогеренція також проявляється як втрата заплутаності між кубітами. Це погіршення можна кількісно визначити за допомогою кількох показників, таких як ентропія заплутаності [20], негативність [21] та співпадіння [22]. Тут ми використовуємо співпадіння, що визначається як

$$C = \max \{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (6)$$

де λ_i (упорядковані у порядку спадання) – це власні значення матриці $\rho \tilde{\rho}$, де

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \times \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \times \sigma_y),$$

а ρ^* позначає комплексне спряження ρ .

На рис. 4 показано еволюцію співпадіння C , з часом, задану рівнянням (6). Очевидно, що швидкість втрати заплутаності суттєво зменшується при застосуванні протоколу слабого вимірювання. Фактично, можна порівняти числові результати з асимптотичними виразами для малих часів

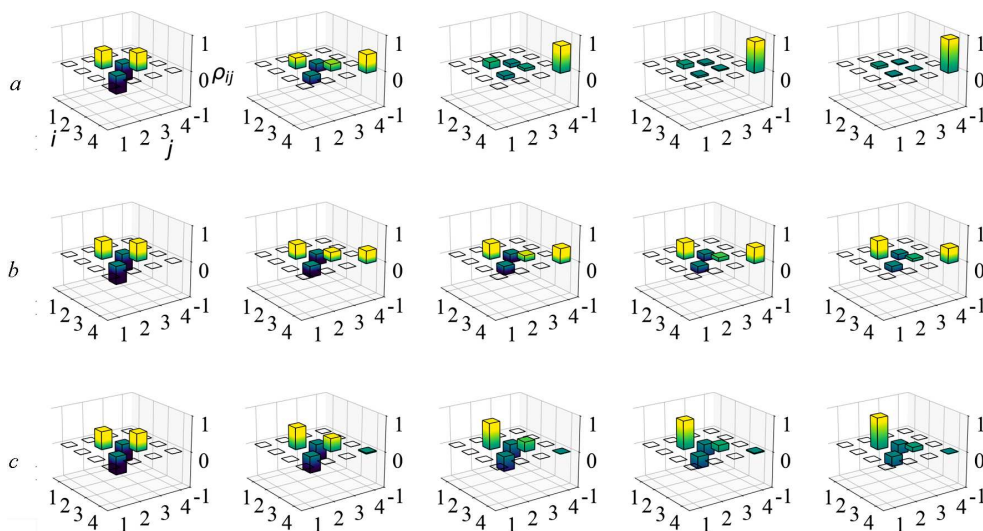


Рис. 3. (У кольорі онлайн) Візуальні представлення матриці густини ρ на різних стадіях еволюції: початковий стан без вимірювань (a); стан після застосування спільних слабких вимірювань із силою 0,9 (b) та стан одночасно зі спільними слабкими вимірюваннями з силою 1, що ефективніше повертає стан назад у бажаний заплутаний підпростір (c). Стовпці відповідають моментам часу $\omega_1 t = 0, 10, 20, 30$. Додатні елементи матриці зображені жовтим кольором, а від'ємні – синім

$t \ll 1/\gamma_{1,2}$: при вільній декогеренції співпадіння спадає за формулою

$$C \simeq 1 - t \left[(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\bar{n} + \frac{1}{2} + \sqrt{\bar{n}(\bar{n} + 1)} \right) + \frac{1}{2}(\gamma_{p1} + \gamma_{p2}) \right], \quad (7)$$

тоді як з протоколом вимірювання з $q = 1$ спад описується виразом

$$C \simeq 1 - \frac{t}{2} \sum_{i=1}^2 \gamma_{pi}. \quad (8)$$

Для оцінки ефективності нашої схеми ми вводимо три кількісні характеристики. Перша з них визначається як

$$\mathcal{E}_{\text{tan}} = \frac{dC_{\text{meas}}}{dt} \left(\frac{dC_{\text{free}}}{dt} \right)^{-1} \Big|_{t=0}, \quad (9)$$

що відображає зменшення миттєвої швидкості спаду співпадіння при $t = 0$. Після розрахунків для довільного початкового стану суперпозиції (1), знаходимо, що для $q = 1$,

$$\mathcal{E}_{\text{tan}} = R_m(R_f + R_s)^{-1}, \quad (10)$$

де

$$R_m = \gamma_{p1} + \gamma_{p2} + (\gamma_1 - \gamma_2) \sqrt{1 - (2p - 1)^2},$$

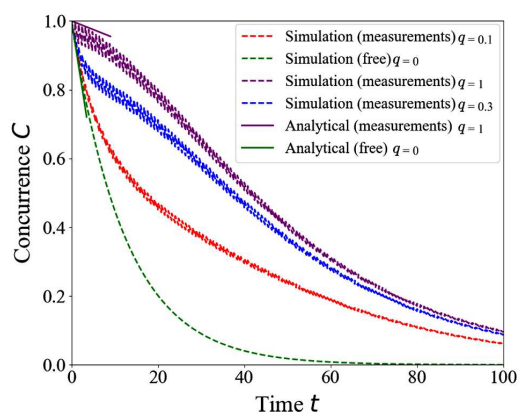


Рис. 4. (У кольорі онлайн) Еволюція співпадіння у часі для двокубітного заплутаного стану за різних сценаріїв. Нижня крива представляє затухання, зумовлене винятково декогеренцією, згідно з аналітичною асимптотикою рівняння (7). Накладені на це три верхні криві ілюструють, як повторні спільні вимірювання можуть зберігати заплутаність; ці криві відповідають різним силам вимірювання (0,1, 0,3 та 1), а поведінка під час вимірювання описується аналітичною асимптотикою рівняння (8). Усі параметри такі ж, як на рис. 2

$$R_f = (\gamma_{p1} + (2\bar{n} + 1)\gamma_1) + (\gamma_{p2} + (2\bar{n} + 1)\gamma_2),$$

$$R_s = \frac{2}{1 - 2p} \sqrt{\bar{n}(\bar{n} + 1)[(1 - 2p)^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4\gamma_1\gamma_2]}.$$

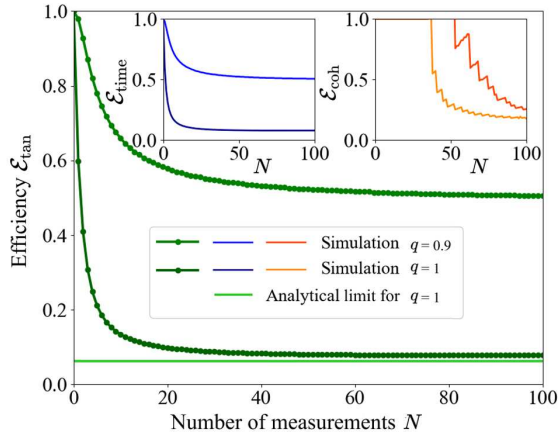


Рис. 5. (*У кольорі онлайн*) Залежність трьох характеристик ефективності – $\mathcal{E}_{\text{tan}}$, $\mathcal{E}_{\text{time}}$ та $\mathcal{E}_{\text{coh}}$ – визначених рівняннями (9), (11) та (12), від кількості спільних вимірювань, виконаних протягом інтервалу часу $t = 100/\omega_1$. Окрім відображення аналітичної асимптотичної поведінки для випадку зі слабкою силою вимірювання, що дорівнює 1, графік містить дві криві, що відповідають результатам числових розрахунків слабого вимірювання з силами 0,9 та 1. Видно, що навіть відносно рідкісні спільні слабкі вимірювання заплутаної пари кубітів ефективно пригнічують втрату співпадіння (як показано на головній панелі та першій вставці), а також зменшення показника когерентності C_{l_1} (представлено на другій вставці). Параметри такі ж, як і на рис. 2

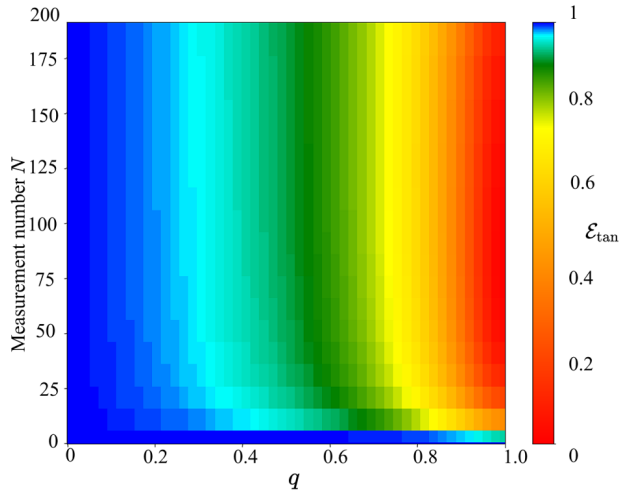


Рис. 6. (*У кольорі онлайн*) Залежність ефективності методу (шкала кольорів) від кількості вимірювань N та параметра сили q слабких вимірювань (рівняння (9))

Другий показник ефективності протоколу враховує час, необхідний для зниження співпадіння до фіксованого порогового значення (ми приймаємо

0,9 як критерій). Це визначається як

$$\mathcal{E}_{\text{time}} = t|_{C=0,9, \text{ free}} \left(t|_{C=0,9, \text{ meas}} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Нарешті, щоб пов'язати збереження заплутаності зі збереженням квантової когерентності, ми порівнюємо швидкості затухання показника когерентності норми l_1 ,

$$\mathcal{E}_{\text{coh}} = \frac{dC_{l_1 \text{ meas}}}{dt} \cdot \left(\frac{dC_{l_1 \text{ free}}}{dt} \right)^{-1} \Big|_{t=0}. \quad (12)$$

На рис. 5 зображені всі три характеристики як функції від кількості кроків вимірювання, виконаних за фіксований часовий інтервал. Подібна поведінка, що спостерігається для цих метрик, підтверджує, що спільний протокол слабого вимірювання ефективно зберігає як когерентність, так і заплутаність системи. Зокрема, невеликі кроки, що спостерігаються на кривій $\mathcal{E}_{\text{coh}}(N)$, виникають через немонотонну природу $C(t)$ при перетині з постійним порогом $C_{\text{cr}} = 0,9$. Суцільна горизонтальна лінія на головній панелі рис. 5 ілюструє асимптотичне значення, задане рівнянням (10). Зауважимо, що для помірних частот вимірювань (зазвичай $N \sim 50$ у нашому прикладі) протокол досягає свого оптимального ефекту, і можна обґрунтовано очікувати ще більшого покращення збереження когерентності зі збільшенням кількості заплутаних кубітів.

3.3. Вплив ключових параметрів на ефективність методу

У цьому підрозділі ми обговоримо роль різних параметрів в ефективності застосування кількох спільних слабких вимірювань для зменшення втрати когерентності та заплутаності.

Моделювання полягало у розв'язанні головного рівняння Ліндблада з оператором Ліувілля (2), яке описує часову еволюцію матриці густини системи ρ . Параметри динаміки Ліндблада, а саме відношення розладів частоти ω_2/ω_1 , швидкості релаксації γ_1 та γ_2 , швидкості дефазування $\gamma_{p1,2}$, та число Планка $\bar{n}$, що показує роль температури, були заморожені. Параметр сили слабких вимірювань q у рівнянні (3) систематично змінювався. Часову еволюцію було інтегровано чисельно за допомогою методу Рунге-Кутта другого порядку з фіксованим кроком за часом $\Delta t = 0,01/\omega_1$. Загальний час

моделювання становив $T_{\text{total}} = 100/\omega_1$. Крок за часом було обрано для забезпечення стабільності та точності інтегрування.

Для оцінки впливу вимірювань на динаміку кубітів було використано два протоколи моделювання. У першому протоколі спільні слабкі вимірювання на підпросторі станів Белла $|\Psi^\pm\rangle$ застосовувалися через рівні проміжки часу вздовж часової шкали моделювання. У другому протоколі такі вимірювання не проводилися.

Для вибірки елементів матриці густини використовувалася прямокутна сітка часових точок, і ці значення зберігалися через задані інтервали для зменшення обчислювальних витрат. Після кожного кроку інтегрування матриця густини регуляризувалася, щоб забезпечити нормування її сліду. Для кожного моделювання були записані елементи матриці ρ та обчислені ключові метрики, такі як показники збігу та когерентності.

На рис. 6 представлені результати розрахунку параметра ефективності $\mathcal{E}_{\text{tan}}$ для різних параметрів сили q та кількості N спільних слабких вимірювань, застосованих протягом розглянутого інтервалу часу. Результати показують, що частота вимірювань не обов'язково має бути дуже високою, і ефект спостерігається для $N \sim 50$. Еволюція гамільтоніана, яка визначається параметрами $\omega_{1,2}$, пригнічується аналогічно звичайному квантовому ефекту Зенона, але з модифікацією, що забезпечується використанням спільних слабких вимірювань. Параметр сили q показує вплив на ефективність від 1,0 до 0,8, але зменшує її на шкалі нижче 0,8.

4. Висновки

Запропоновано підхід для пригнічення швидкості втрати когерентності та запутаності шляхом застосування кількох спільних слабких вимірювань до запутаної системи кубітів. Стандартний квантовий ефект Зенона пом'якшує гамільтонову еволюцію, застосовуючи вимірювання на достатньо високій частоті, щоб заморозити еволюцію системи, що взаємодіє зі своїм термостатом. На противагу цьому, у представленому тут методі розраховується зниження швидкості втрати когерентності для негамільтонової динаміки, що регулюється рівнянням Ліндблада, та демонструється ефективність застосування кількох спільних слабких

вимірювань до запутаної системи. Цей метод застосовується у випадках, коли точний стан, який потрібно зберегти, невідомий, але є доступною інформацією про запутаність у системі. Прикладом є квантові алгоритми, в яких підмножина кубітів залишається неактивною в проміжку між застосуванням квантових вентилів.

1. M. Schlosshauer. Quantum decoherence. *Phys. Rep.* **831**, 1 (2019).
2. G. Barenboim, A.M. Gago. Quantum decoherence effects: A complete treatment. *Phys. Rev. D* **110**, 095005 (2024).
3. J. Bordes, J.R. Brown, D.P. Watts, M. Bashkanov, K. Gibson, R. Newton, N. Zachariou. First detailed study of the quantum decoherence of entangled gamma photons. *Phys. Rev. Lett.* **133**, 132502 (2024).
4. L. Colmenárez, Z.-M. Huang, S. Diehl, M. Müller. Accurate optimal quantum error correction thresholds from coherent information. *Phys. Rev. Res.* **6**, L042014 (2024).
5. K.J. Mei, W.R. Borrelli, A. Vong, B.J. Schwartz. Using machine learning to understand the causes of quantum decoherence in solution-phase bond-breaking reactions. *J. Phys. Chem. Lett.* **15**, 903 (2024).
6. T. Neidig, J. Rais, M. Bleicher, H. van Hees, C. Greiner. Open quantum systems with Kadanoff–Baym equations. *Phys. Lett. B* **851**, 138589 (2024).
7. Z. Ding, X. Li, L. Lin. Simulating open quantum systems using Hamiltonian simulations. *PRX Quantum* **5**, 020332 (2024).
8. D. Manzano. A short introduction to the Lindblad master equation. *AIP Adv.* **10**, 025106 (2020).
9. K. Kraus. General state changes in quantum theory. *Ann. Phys. (N.Y.)* **64**, 311 (1971).
10. B.M. Terhal. Quantum error correction for quantum memories. *Rev. Mod. Phys.* **87**, 307 (2015).
11. F.R.F. Pereira, S. Mancini, G.G. La Guardia. Stabilizer codes for open quantum systems. *Sci. Rep.* **13**, 10540 (2023).
12. B. Pokharel, N. Anand, B. Fortman, D.A. Lidar. Demonstration of fidelity improvement using dynamical decoupling with superconducting qubits. *Phys. Rev. Lett.* **121**, 220502 (2018).
13. C. Read, E. Serrano-Ensástiga, J. Martin. Platonic dynamical decoupling sequences for interacting spin systems. *Quantum* **9**, 1661 (2025).
14. N. Ezzell, B. Pokharel, L. Tewala, G. Quiroz, D. A. Lidar. Dynamical decoupling for superconducting qubits: A performance survey. *Phys. Rev. Appl.* **20**, 064027 (2023).
15. S. Dörscher, A. Al-Masoudi, M. Bober, R. Schwarz, R. Hobson, U. Sterr, C. Lisdat. Dynamical decoupling of laser phase noise in compound atomic clocks. *Commun. Phys.* **3**, 185 (2020).
16. I. Nodurft, A. Rodriguez Perez, N. Naimipour, G. C. Shaw. Suppressing polarization mode dispersion with the Quantum Zeno Effect. *Entropy* **27**, 27 (2025).

17. A. Streltsov, G. Adesso, M.B. Plenio. Colloquium: Quantum coherence as a resource. *Rev. Mod. Phys.* **89**, 041003 (2017).
18. C. Radhakrishnan, M. Parthasarathy, S. Jambulingam, T. Byrnes. Quantum coherence of the Heisenberg spin models with Dzyaloshinsky–Moriya interactions. *Sci. Rep.* **7**, 13865 (2017).
19. T. Baumgratz, M. Cramer, M.B. Plenio. Quantifying coherence. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 140401 (2014).
20. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
21. G. Vidal, R.F. Werner. Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
22. W.K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).

Одержано 02.05.25.

Переклад на українську мову О. Войтенка

О.М. Коноваленко, З.А. Майзеліс

MULTIPLE JOINT WEAK MEASUREMENTS AS A WAY TO SUPPRESS THE DECOHERENCE

We apply the multiple, equally spaced in time, weak measurements, to the two-qubit entangled system to decrease the rate of its decoherence, i.e., to prevent the decrease of the off-diagonal elements. The scheme is similar to the Quantum Zeno Effect, but differs by the frequency of the measurements. While the conventional Quantum Zeno Effect assumes rapid measurements which mitigates the Hamiltonian dynamics, the proposed method makes use of entanglement between the qubits to decrease the decoherence rate. We will show that it allows us to partially suppress the decoherence in the case of Lindblad evolution.

Keywords: joint weak measurements, decoherence suppression, Quantum Zeno Effect, Lindblad evolution.