

В. ГНАТОВСЬКИЙ,¹ Д. АНЧИШКІН,^{1,2,3} Д. ЖУРАВЕЛЬ,¹ В. КАРПЕНКО²

¹ Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова, НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143)

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка
(Просп. Академіка Глушкова, 2, Київ 03022)

³ Frankfurt Institute for Advanced Studies
(1, Ruth-Moufang Strasse, 60438 Frankfurt am Main, Germany)

ФАЗОВІ ДІАГРАМИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ САМОВЗАЄМОДІЮЧОЇ БОЗОННОЇ СИСТЕМИ

УДК 539

У рамках формалізму канонічного ансамблю та моделі середнього поля досліджується система взаємодіючих релятивістських бозонів при скінченних температурах і скінченних густинах ізоспіну. Середнє поле містить як притягальну, так і відштовхувальну складові. Отримано залежності термодинамічних величин від температури та густини ізоспіну. Показано, що у разі наявності притягання між частинками в такій бозонній системі, на фоні бозе-айнштайнівської конденсації додатково виникає фазовий перехід рідина–газ. Наведено відповідні фазові діаграми. Пояснено причини, чому наявність бозе-конденсату значно підвищує критичну температуру фазового переходу рідина–газ у порівнянні з температурою, отриманою для тієї ж системи в рамках статистики Больцмана. Отримані результати можуть застосовуватися при інтерпретації експериментальних даних, зокрема у питанні, наскільки критична точка змішаної фази чутлива до присутності конденсату Бозе–Айнштайна.

Ключові слова: релятивістська бозонна система, конденсація Бозе–Айнштайна, фазовий перехід.

1. Вступ

Загальновізвано, що квантова хромодинаміка (КХД) демонструє багату фазову структуру при скінченних температурах і баріонних концентраціях, наприклад, для процесу переходу від адронного газу до кварк-глюонної плазми або при переході від порушення хіральної симетрії до її відновлення [1]. Фізична мотивація вивчення КХД при скінченних густинах ізоспіну та відповідної системи піонів пов'язана з дослідженням компактних зірок, ізоспін-асиметричної ядерної матерії та зіткнень важких іонів. У ранніх дослідженнях щільної ядерної матерії та компактних зірок припускалось, що заряджені піони, та навіть каони, конденсуються при їх досить високій концентрації. Зна-

ння фазової структури мезонних систем у режимі скінченних температур і ізоспінних густин має вирішальне значення для розуміння широкого діапазону явищ: від міжядерних зіткнень до бозонів, нейтронних зірок і космології. Ця галузь є важливою частиною досліджень гарячої та щільної адронної матерії, яка має високу актуальність та активно розвивається.

Водночас дослідження мезонних систем мають свою специфіку через можливість бозе-айнштайнівської конденсації (БАК) бозонних частинок. Формування класичних піонних полів у зіткненнях важких іонів обговорювалося в роботах [2–5]. Пізніше дослідження фазової структури КХД було поширено на скінченну густину ізоспіну, а системи піонів і К-мезонів із скінченними ізоспінними хімічними потенціалами розглядалися в останніх дослідженнях [6–11]. Граткові методи обчислення з перших принципів забезпечують міцну основу для наших знань, що стосуються режиму скінченних температур. Нові результати для піонних систем при високих густинах були отримані за допомогою таких методів [12–14].

Цитування: Гнатовський В., Анчішкін Д., Журавель Д., Карпенко В. Фазові діаграми релятивістської самовзаємодіючої бозонної системи. *Укр. фіз. журн.* **69**, № 8, 562 (2024).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

У цій статті ми розглядаємо систему взаємодіючих бозе частинок–античастинок при збереженій густині ізоспіну (густині заряду) n_I і при скінченній температурі T . Ми називаємо бозонні частинки “піонами” тільки умовно. Перевага цієї назви полягає в тому, що заряджені π -мезони є найлегшими адронами, які мають ізоспіновий хімічний потенціал відмінний від нуля. З іншого боку, піони є найлегшими бозонними частинками ядра, і, таким чином, розгляд “індукованого температурою створення” пар частинка–античастинка є актуальною проблемою квантової статистики. Щоб врахувати взаємодію між бозонами, ми вводимо феноменологічне середнє поле $U(n)$, подібне до поля Скірма, яке залежить лише від повної концентрації мезонів n . Ми розглядаємо таку самовзаємодіючу багаточастинкову систему як спрощену модель, яка може допомогти нам зрозуміти БАК і фазові переходи в широкому діапазоні температур і густин. Середнє поле $U(n)$ відображає присутність інших сильно взаємодіючих частинок у системі, наприклад, ρ -мезонів і пар нуклон–антинуклон при низьких температурах або глюонів і пар кварк–антикварк при високих температурах, $T > T_{\text{qgp}} \approx 160$ MeV.

Представлене дослідження є частиною серії робіт [15–18], яка починається з розгляду взаємодіючої системи бозонів–антибозонів при $\mu = 0$. Наступний крок у розвитку даної тематики було зроблено в роботі [19], де бозонна система розглядалася в рамках формалізму канонічного ансамблю з канонічними змінними (T, n_I) , тобто при сталій густині ізоспіну (густині заряду). В рамках такого підходу в роботі [19] було розраховано температурні характеристики неідеального гарячого “піонного” газу при фіксованій густині ізоспіну $n_I = n^{(-)} - n^{(+)} > 0$, де $n^{(\mp)}$ – концентрації π^- і π^+ мезонів. У цьому дослідженні ми переходимо до використання канонічного ансамблю, але тепер увага зосереджується на залежності термодинамічних величин від ізоспінової густини при умові, що температура фіксована.

У розділі 2 ми дуже коротко нагадуємо формалізм термодинамічної моделі середнього поля [20] для опису бозонної системи частинок і античастинок, яку буде використано в представлених розрахунках. У розділі 2.1 ми вводимо параметризацію середнього поля, подібну до поля Скірма, і розраховуємо відповідні термодинамічні функції. У розділі 4 ми демонструємо можливість бозе-

конденсації у випадку, коли притягальна взаємодія “слабка”. Наші висновки підсумовані в розділі 5.

2. Модель середнього поля для системи частинок і античастинок

Наш розгляд термодинамічних властивостей системи взаємодіючих бозонних частинок і античастинок при скінченних температурах здійснюється в рамках термодинамічної моделі середнього поля, яка була введена в роботах [21, 22], а потім розвинута у роботі [20]. Цей підхід базується на представленні вільної енергії F системи частинка–античастинка у вигляді суми двох доданків: перший доданок F_0 – це вільна енергія двокомпонентної системи вільних частинок, а другий доданок F_{int} відповідає за взаємодію між усіма частинками, тобто $F = F_0 + F_{\text{int}}$. Тому припускається, що в загальному випадку густина вільної енергії двокомпонентної системи має вигляд

$$\phi(T, n_1, n_2) = \phi_1^{(0)}(T, n_1) + \phi_2^{(0)}(T, n_2) + \phi_{\text{int}}(T, n), \quad (1)$$

Тут $\phi = F/V$, де V – об’єм системи; $\phi_1^{(0)}$ і $\phi_2^{(0)}$ – густини вільної енергії для вільних частинок першого та другого компонентів, відповідно; густина вільної енергії ϕ_{int} враховує взаємодію в системі: n_1 та n_2 – це концентрації частинок кожного компонента, а $n = n_1 + n_2$ – це загальна концентрація частинок. Хімічний потенціал, пов’язаний з кожним компонентом, обчислюється як відповідна похідна

$$\mu_i = \left[\frac{\partial \phi(T, n_1, n_2)}{\partial n_i} \right]_T, \quad (2)$$

де $i = 1, 2$. Це приводить до виразу

$$\mu_i^{(0)} = \mu_i(T, n_i) - U(T, n), \quad (3)$$

де

$$\mu_i^{(0)} = \frac{\partial \phi_i^{(0)}(T, n_i)}{\partial n_i}, \quad U(T, n) \equiv \frac{\partial \phi_{\text{int}}(T, n)}{\partial n}. \quad (4)$$

Подібним чином можна записати вираз для тиску, $p = \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 - \phi$, відокремивши в ньому вільну та взаємодіючу частину,

$$p(T, n_1, n_2) = p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + P_{\text{ex}}(T, n), \quad (5)$$

де $p_i^{(0)} = \mu_i^{(0)} n_i - \phi_i^{(0)}$ – це тиск в ідеальному газі, створеному i -м компонентом системи, а

$$P_{\text{ex}}(T, n) \equiv n \left[\frac{\partial \phi_{\text{int}}(T, n)}{\partial n} \right]_T - \phi_{\text{int}}, \quad (6)$$

– це надлишковий тиск. Видно, що визначення $U(T, n)$ і $P_{\text{ex}}(T, n)$ приводять до диференціальної відповідності між цими величинами:

$$n \left[\frac{\partial U(T, n)}{\partial n} \right]_T = \left[\frac{\partial P_{\text{ex}}(T, n)}{\partial n} \right]_T. \quad (7)$$

Ми обмежимо наш розгляд випадком, коли при фіксованій температурі взаємодіючі бозонні частинки та античастинки перебувають у динамічній рівновазі по відношенню до процесів анігіляції та утворення пар. Завдяки протилежному знаку їх заряду хімічні потенціали бозонних частинок, μ_1 , і бозонних античастинок, μ_2 , мають протилежні знаки (докладніше див. [20]):

$$\mu_1 = -\mu_2 \equiv \mu_I. \quad (8)$$

Тому співвідношення Ейлера включає лише концентрацію ізоспіну, $n_I = n^{(-)} - n^{(+)}$, у такий спосіб:

$$\varepsilon + p = T s + \mu_I n_I, \quad (9)$$

де $n_1 \rightarrow n^{(-)}$ – концентрація бозонних частинок, $n_2 \rightarrow n^{(+)}$ – концентрація бозонних античастинок, ε – густина енергії, а s – густина ентропії¹.

В даній роботі розглядається система бозе частинок–античастинок зі збереженою густиною ізоспіну n_I , тоді як повна концентрація частинок n вважатиметься термодинамічною величиною, що залежить від T і n_I , тобто $n(T, n_I)$ ².

Використовуючи рівняння (5) разом з формулою для ідеального газу у формалізмі великого канонічного ансамблю, загальний тиск у системі частинка–античастинка записується у вигляді³

$$p = -T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(T, n) - \mu_I}{T} \right) \right] - \\ & - T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(T, n) + \mu_I}{T} \right) \right] + \\ & + P_{\text{ex}}(T, n), \end{aligned} \quad (10)$$

де $\mu_1^{(0)}$ і $\mu_2^{(0)}$, згідно з рівняннями (3) і (8), замінено на $(\mu_I - U)$ та $(-\mu_I - U)$, відповідно.

Термодинамічну узгодженість моделі середнього поля можна отримати, поставивши у відповідність два вирази, які в результаті повинні збігатися. Ці вирази, що визначають густину ізоспіну, мають вигляд

$$n_I = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_I} \right)_T, \quad (11)$$

$$n_I = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) - f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)],$$

де тиск визначається рівнянням (10). Тут

$$E(k, n) = \omega_k + U(T, n)$$

з $\omega_k = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$, і функція розподілу Бозе–Айнштейна дорівнює

$$f_{\text{BE}}(E, \mu) = \left[\exp \left(\frac{E - \mu}{T} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (12)$$

Необхідна умова для того щоб вирази (11) збіглися в кінцевому вигляді, отримується у вигляді співвідношення між середній полем і надлишковим тиском:

$$n \frac{\partial U(T, n)}{\partial n} = \frac{\partial P_{\text{ex}}(T, n)}{\partial n}. \quad (13)$$

Як ми бачимо, це співвідношення буквально збігається зі співвідношенням (7), яке було отримано з використанням визначень (4) і (6) для середнього поля $U(T, n)$ і надлишкового тиску $P_{\text{ex}}(T, n)$, відповідно. Співвідношення (13), яке забезпечує термодинамічну узгодженість моделі, має природну основу, оскільки існує лише одне джерело для обох величин U і P_{ex} , і це – взаємодія в системі.

¹ Повний електричний заряд системи є негативний завдяки перевазі створення негативних піонів над створенням позитивних піонів у релятивістських міжядерних зіткненнях.

² Динамічне збереження загальної кількості піонів у збагаченій піонами системі, створеній на проміжній стадії зіткнення важких іонів, розглядалося в роботах [24–26].

³ Тут і далі ми використовуємо систему одиниць $\hbar = c = 1$, $k_B = 1$.

2.1. Параметризація середнього поля

Термодинамічна модель середнього поля була застосована для кількох фізично цікавих систем, включаючи адронний резонансний газ [20] та піонний газ [23]. Цей підхід було розширено на випадок бозонної системи при $\mu_I = 0$, яка може зазнавати бозе-конденсації [15, 17].

У цьому дослідженні ми використовуємо узагальнений формалізм, наведений у розділі 2, для опису системи бозонів–антибозонів у випадку, коли густина ізоспіну є скінченною, $n_I \neq 0$. При цьому ми вважаємо, що взаємодія між частинками описується середнім полем типу Скірма, яке залежить від повної густини частинок n . Це означає, що ми враховуємо саме сильну взаємодію. Для подальших розрахунків вважатимемо, що середнє поле має такий вигляд:

$$U(n) = -An + Bn^2, \quad (14)$$

де A і B – це параметри моделі, які мають бути визначені. Відповідно до співвідношення (13) розрахуємо надлишковий тиск

$$P_{\text{ex}}(n) = -\frac{1}{2}An^2 + \frac{2}{3}Bn^3. \quad (15)$$

Середнє поле $U(n)$ можна розглядати як деяке ефективне поле, яке включає декілька внесків. Наприклад, дослідження властивостей щільного та гарячого піонного газу добре мотивовані формуванням середовища з низькими баріонними числами на середніх рапідностях, що було показано в експериментах на RHIC та LHC [27, 28]. З цих причин у наших розрахунках ми розглядаємо загальний випадок $A > 0$, щоб дослідити бозонну систему з притягальним і відштовхувальним внесками у середнє поле (14). Нашою головною метою є дослідження того, як співвідношення між відштовхуванням і притяганням у системі впливає на бозе-конденсацію та термодинамічні властивості бозонної системи.

У цій статті для дослідження цих особливостей, без втрати загальності, ми фіксуємо коефіцієнт відштовхування B , тоді як коефіцієнт A , який визначає інтенсивність притягання середнього поля (14), буде змінюватися. Для цього доцільно параметризувати коефіцієнт A за допомогою розв’язків рівняння $U(n) + t = 0$, подібно до параметризації, прийнятої в роботах [15, 17]. Для заданого середнього поля (14) є два корені цього рівняння, а

саме $n_{1,2} = (A \mp \sqrt{A^2 - 4mB})/2B$, тобто

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\frac{m}{B}} \left(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \\ n_2 &= \sqrt{\frac{m}{B}} \left(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

де $\kappa \equiv A/(2\sqrt{mB})$. Тоді можна параметризувати коефіцієнт притягання як $A = \kappa A_c$, де $A_c = 2\sqrt{mB}$. Як буде показано нижче, безрозмірний параметр κ є масштабним параметром моделі, який визначає фазову структуру системи. Як видно з рівнянь (16), для значень параметра $\kappa < 1$ дійсних коренів немає. Критичне значення A_c отримуємо, коли обидва корені збігаються, тобто коли $\kappa = 1$, тоді $A = A_c = 2\sqrt{mB}$.

Розглянемо два інтервали параметра κ . Перший інтервал відповідає $\kappa \leq 1$, і реальних коренів рівняння $U(n) + t = 0$ немає. Ми пов’язуємо ці значення κ зі “слабкою” притягальною взаємодією, і в цьому дослідженні ми розглядаємо зміни коефіцієнта притягання A для значень κ лише з цього інтервалу. Другий інтервал відповідає $\kappa > 1$, тут є два дійсні корені рівняння $U(n) + t = 0$. Ми асоціюємо цей інтервал із “сильною” притягальною взаємодією. Цей випадок буде розглянуто окремо в наступних дослідженнях.

3. Фазовий перехід до бозе-айнштайнівського конденсату

У підході середнього поля поведінка бозонної системи частинка–античастинка, коли обидва компоненти знаходяться в термічній (кінетичній) фазі, визначається двома трансцендентними рівняннями

$$n = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)], \quad (17)$$

$$n_I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) - f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)], \quad (18)$$

де функція розподілу Бозе–Айнштайна $f_{\text{BE}}(E, \mu_I)$ описується виразом (12), $E(k, n) = \omega_k + U(n)$, а коефіцієнт виродження $g = 1$, оскільки спин частинок дорівнює нулю. Рівняння (17) та (18) слід розв’язувати самоузгоджено відносно n та μ_I для заданих

канонічних змінних (T, n_I) . Нагадаємо, що наразі ми розглядаємо бозонну систему в формалізмі канонічного ансамблю. У цьому підході хімічний потенціал μ_I є термодинамічною величиною, яка залежить від канонічних змінних, тобто $\mu_I(T, n_I)$.

У випадку перехресного стану, коли частинки, тобто π -мезони, перебувають у фазі конденсату, а античастинки все ще перебувають у термічній (кінетичній) фазі, рівняння (17) та (18) слід узагальнити, щоб включити конденсатний компонент $n_{\text{cond}}^{(-)}$. Слід також врахувати, що частинки (π^- -мезони або компонент більшої густини) можуть перебувати в конденсованому стані саме за необхідної умови

$$U(n) - \mu_I = -m. \quad (19)$$

Під час зниження температури від високих значень, при яких π^- і π^+ знаходяться в тепловій фазі, концентрація π^- -компонента $n^{(-)}(T, n_I)$ спочатку досягає критичної кривої при температурі T_{cd} , де в точці перетину виконується умова (19), але концентрація конденсату дорівнює нулю в цій точці, тобто $n_{\text{cond}} = 0$. Це означає, що крива $n_{\text{lim}}(T)$, яка визначається рівнянням

$$n_{\text{lim}}(T) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(\omega_k, \mu_I) \Big|_{\mu_I=m}, \quad (20)$$

є критичною кривою для π^- -мезонів або для високогустинної складової газу. Як ми бачимо, функція (20) є максимальною концентрацією теплових (кінетичних) бозонних частинок ідеального газу при температурах $T \leq T_{\text{cd}}$, оскільки хімічний потенціал має максимальне дозволене значення. Звідси отримуємо, що розрахована в підході середнього поля критична крива для системи бозонів-антибозонів збігається з критичною кривою для ідеального газу.

З урахуванням рівнянь (19) та (20) ми можемо записати таке узагальнення для набору рівнянь (17) та (18):

$$n = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I), \quad (21)$$

$$n_I = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I). \quad (22)$$

Тут $\mu_I = U(n) + m$. З цих рівнянь бачимо, що концентрація частинок $n^{(+)}$ забезпечується лише тепловими π^+ -мезонами. В той самий час концентрація $n^{(-)}$ забезпечується двома вкладками: конденсованими частинками (π^- -мезонами з $\mathbf{k} = 0$) з концентрацією $n_{\text{cond}}^{(-)}(T)$ і тепловими π^- -мезонами з $|\mathbf{k}| > 0$ і концентрацією $n_{\text{lim}}(T)$. Отже, правило сум для концентрації частинок для фази π^- -мезонів в інтервалі $T < T_{\text{cd}}$ виглядає таким чином: $n^{(-)} = n_{\text{cond}}^{(-)}(T) + n_{\text{lim}}(T)$.

Слід зазначити, що вираз “частинки знаходяться у фазі конденсату” є, звичайно, умовним, оскільки, по суті, це змішана фаза, де при фіксованій температурі деяка частка частинок, тобто частка π^- -мезонів, належить до теплової фази з імпульсом $|\mathbf{k}| > 0$, а інша частка π^- -мезонів належить до бозе-айнштайнівського конденсату, де всі π^- -мезони мають нульовий імпульс, $\mathbf{k} = 0$.

Для подальшої побудови фазової діаграми необхідно знайти значення тиску. Спочатку розглянемо тиск для стану системи, коли π^- і π^+ -мезони знаходяться в тепловій фазі. Якщо обидва компоненти системи π^- - π^+ знаходяться в тепловій (кінетичній) фазі, вираз для тиску має вигляд

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] + P_{\text{ex}}(n), \quad (23)$$

де $n(T, n_I)$ та $\mu_I(T, n_I)$ є розв'язками рівнянь (17) та (18).

Для перехресного стану системи, тобто коли π^- -мезони знаходяться у фазі конденсату, а π^+ -мезони – в термічній фазі, з урахуванням рівнянь (19) і (20) можемо записати

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{\text{BE}}(E(k, n), \mu_I) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)]_{\mu_I=U(n)+m} + P_{\text{ex}}(n), \quad (24)$$

де $\mu_I = U(n) + m$. При цьому значенні хімічного потенціалу ми отримуємо $E(k, n) - \mu_I = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - m$. Тут ми врахували, що загальна концентрація частинок n складається з трьох доданків, $n = n_{\text{cond}}^{(-)} + n_{\text{th}}^{(-)} + n^{(+)}$. Оскільки у фазі конденсату $n_{\text{th}}^{(-)} = n_{\text{lim}}$, можна розрахувати концентрацію конденсату як $n_{\text{cond}}^{(-)} = n^{(-)} - n_{\text{lim}}$. З урахуванням наявності хімічного потенціалу у функції

розподілу для π^- -мезонів отримуємо

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{\text{BE}}(\omega_k, m) + f_{\text{BE}}(E(k, n), -\mu_I)] + P_{\text{ex}}(n), \quad (25)$$

де $\mu_I = U(n) + m$.

3.1. Термодинамічні величини

Тепер зафіксуємо значення коефіцієнта відштовхування B у виразі (14) для середнього поля. При цьому змінюватиметься коефіцієнт A , який визначає інтенсивність притягання середнього поля (14). Коефіцієнт B отримано з оцінки, зробленої на основі віріального розкладу [29], $B = 10mv_0^2$, де v_0 дорівнює чотирикратному власному об'єму частинки, тобто $v_0 = 16\pi r_0^3/3$. Ми приймаємо $v_0 = 0,45 \text{ фм}^3$, що відповідає "радіусу частинки" $r_0 \approx 0,3 \text{ фм}$. Чисельні розрахунки будуть проведені для бозонів з масою $m = 139 \text{ МеВ}$, які ми назвемо "піонами". У цьому випадку коефіцієнт відштовхування становить $B/m = 2,025 \text{ фм}^6$, і він залишається сталим у всіх розрахунках цієї роботи.

При високих температурах, тобто при $T \geq T_{\text{cd}}$, обидва компонента бозонної системи частинок-античастинок знаходяться в тепловій фазі, а термодинамічні властивості системи визначаються набором рівнянь (17) і (18). Розв'язуючи їх для заданих значень T і n_I , ми спочатку отримуємо функції $\mu_I(T, n_I)$ і $n(T, n_I)$, а потім й інші термодинамічні величини.

Зі зниженням температури концентрація частинок $n^{(-)}(T)$ перетинає критичну криву в точці, що відповідає значенню $T = T_{\text{cd}}$ (див. рис. 1, на графіку T_{cd} позначено як T_c). Залежність концентрації π^- -мезонів від температури зображена синьою суцільною кривою, залежність концентрації π^+ -мезонів – блакитною пунктирною кривою, а повна концентрація $n = n_{\text{tot}}$ – у вигляді чорної суцільної кривої.

При подальшому зниженні температури в інтервалі $T < T_{\text{cd}}$ π^- -мезони починають "опускатися" в стан конденсату, який характеризується значенням імпульсу $\mathbf{k} = 0^4$. У граничному випадку $T = 0$, усі частинки компоненти більшої густини, тобто π^- -мезони, перебуватимуть у фазі конденсату. У той самий час густина іншої компоненти

⁴ Ми застосовуємо наш розгляд до піонного газу з $n_I = n^{(-)} - n^{(+)} > 0$.

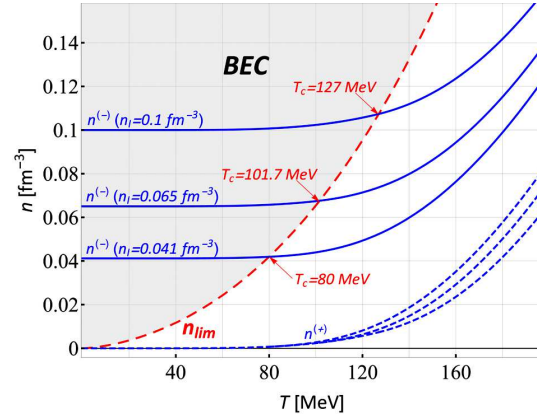


Рис. 1. Температурні залежності концентрації π^- -мезонів, $n^{(-)}$ (сині суцільні криві 1), та π^+ -мезонів, $n^{(+)}$ (сині пунктирні криві 2), для взаємодіючого $\pi^+-\pi^-$ піонного газу при $\kappa = 0,1$ і $n_I = 0,041, 0,065, 0,1 \text{ фм}^{-3}$. Червона пунктирна лінія 3 – це критична крива, яка фіксує концентрацію частинок в однокомпонентному ідеальному газі при $\mu = m_\pi$. У тонованій BEC області π^- -мезони створюють конденсат Бозе–Айнштейна

з меншою густиною, тобто π^+ мезонів, які знаходяться в тепловій фазі, зменшується зі зниженням температури і дорівнює нулю при $T = 0$. Для температур, менших за критичну, тобто при $T < T_{\text{cd}}$, термодинамічні властивості системи визначаються рівняннями (21) та (22), де ми враховуємо, що $\mu_I = U(n) + m$ для всіх температур цього інтервалу, якщо компонент $n^{(-)}$ з високою густиною не знаходиться в конденсованому стані.

Рівняння (21) можна використовувати для визначення критичної температури T_{cd} . Дійсно, приймемо до уваги, що в точці перетину з критичною кривою густина конденсату ще дорівнює нулю, $n_{\text{cond}}^{(-)}(T_{\text{cd}}) = 0$, а концентрація теплових π^- частинок стає рівною $n^{(-)}(T_{\text{cd}}) = n_{\text{lim}}(T_{\text{cd}})$. Тоді при цій температурі, $T = T_{\text{cd}}$, у лівій частині рівняння (21) ми маємо $n = 2n_{\text{lim}}(T_{\text{cd}}) - n_I$, і тепер у цій температурній точці на критичній кривій рівняння (21) щодо T запишеться як

$$n_{\text{lim}}(T) - n_I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(E(k, n), -\mu_I) \Big|_{\mu_I=U(n)+m} \quad (26)$$

$$E(k, n) = \omega_k + U(2n_{\text{lim}} - n_I).$$

де $E(k, n) = \omega_k + U(2n_{\text{lim}} - n_I)$. Розв'язуючи рівняння (26) при $n_I = 0,1 \text{ фм}^{-3}$, ми отримали

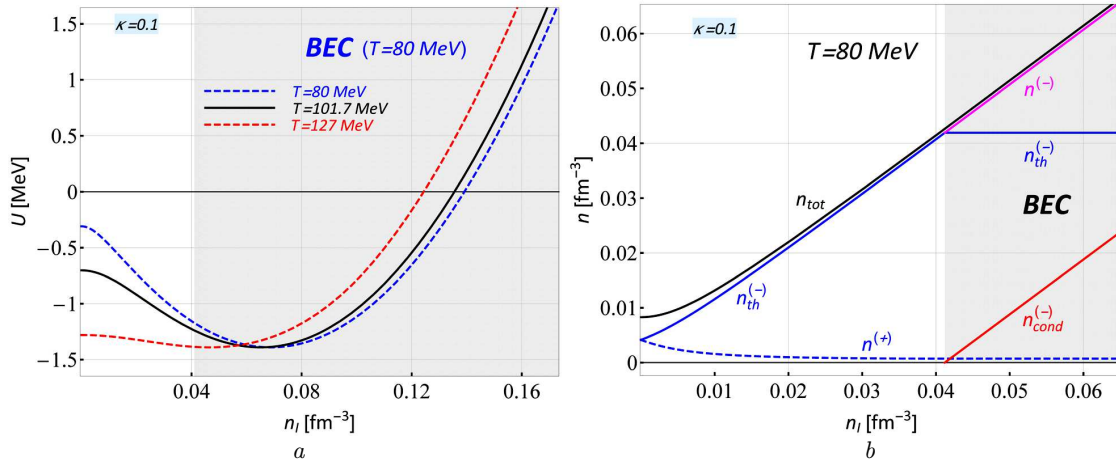


Рис. 2. Тоновані ВЕС області на обох панелях позначають конденсатні стани взаємодіючого $\pi^+\pi^-$ піонного газу в моделі середнього поля. Залежності середнього поля $U(n)$ від густини ізоспіну n_I при $\kappa = 0,1$ і $T = 80, 101,7, 127$ MeV (a). Залежності густин частинок $n^{(+)}$, $n^{(-)}$ та $n_{tot} = n^{(+)} + n^{(-)}$ від густини ізоспіну n_I при $T = 80$ MeV і $\kappa = 0,1$. Тут $n_{th}^{(-)}$ і $n_{cond}^{(-)}$ – густини теплових і конденсованих π^- -мезонів, відповідно (b)

$T_{cd} = 128,8$ MeV для $\kappa = 0,5$ і $T_{cd} = 251$ MeV для $\kappa = 1,0$.

Отже, виявляється, що температура $T_{cd}^{(-)}$ визначає фазовий перехід до БАК для всієї системи піонів, оскільки античастинки (π^+ -мезони) знаходяться повністю в тепловому стані при всіх температурах, і, отже, конденсат створюють лише частинки високої густини, $n^{(-)}(T)$. Тоді повна концентрація конденсату в двокомпонентній системі піонів при “слабкому” притяганні, тобто при $\kappa \leq 1$, створюється лише π^- -мезонами, тобто $n_{cond} = n_{cond}^{(-)}$, і ця концентрація частинок відіграє роль параметра порядку.

Дослідимо тепер фазову структуру системи частинок–античастинок при зміні канонічної змінної n_I . В ролі першого кроку доцільно отримати залежності концентрацій $n^{(-)}$, $n^{(+)}$ і густини середнього поля U від n_I , коли ми фіксуємо T . Кожна ізотерма перетинає дві різні фази, тому для кожної конкретної фази ми повинні розв’язати відповідний набір рівнянь:

1) коли обидва компоненти піонного газу перебувають у термічному (кінетичному) стані, необхідно розв’язати рівняння (17) та (18);

2) коли π^- -компонент піонного газу має внесок конденсату, розв’язуються рівняння (21) та (22).

Для вибраної ізотерми T точка $n_I = n_{Ic}$ ділить вісь n_I на дві частини. При $n_I \leq n_{Ic}$, π^- - і π^+ -мезони знаходяться в тепловій фазі. У той самий час,

при $n_I > n_{Ic}$, π^- -мезони мають внесок конденсату, але π^+ -мезони все ще повністю знаходяться в тепловій фазі.

Залежність середнього поля від n_I для трьох значень температури, $T = 40, 80, 100$ MeV, показано на рис. 2, a. Видно, що різниця кривих, зумовлена різними температурами, дуже слабка після мінімуму функції $U(n(T, n_I))$. У точці $n_I = n_{I0}$, де $U(n_{I0}) = 0$, середнє поле змінює знак і стає повністю відштовхувальним. При $\kappa = 0,1$ ми отримали $n_{I0} \approx 0,14$ фм $^{-3}$.

Результати розрахунку густин частинок $n^{(-)}$, $n^{(+)}$ і $n \equiv n_{tot} = n^{(-)} + n^{(+)}$ як функцій ізоспінової густини n_I при $T = 101,7$ MeV та $\kappa = 0,1$ також зображені на рис. 2, b. Як бачимо, густина π^+ мезонів зменшується зі збільшенням n_I , а потім стає приблизно сталою. Така поведінка зрозуміла. Дійсно, у відповідності з самоузгодженою парою рівнянь (17) та (18) або (21) та (22) (неважливо, яку пару рівнянь ми візьмемо), $n^{(+)} = (n - n_I)/2$, але, як ми бачимо, підвищення загальної густини частинок n на початку є набагато меншим, ніж n_I . Тому зі збільшенням n_I густина π^+ -мезонів спочатку зменшується, а потім стає приблизно постійною.

4. Фазова діаграма бозонної системи частинок–античастинок

Для аналізу фазової структури системи частинок–античастинок обчислимо залежність тиску p від

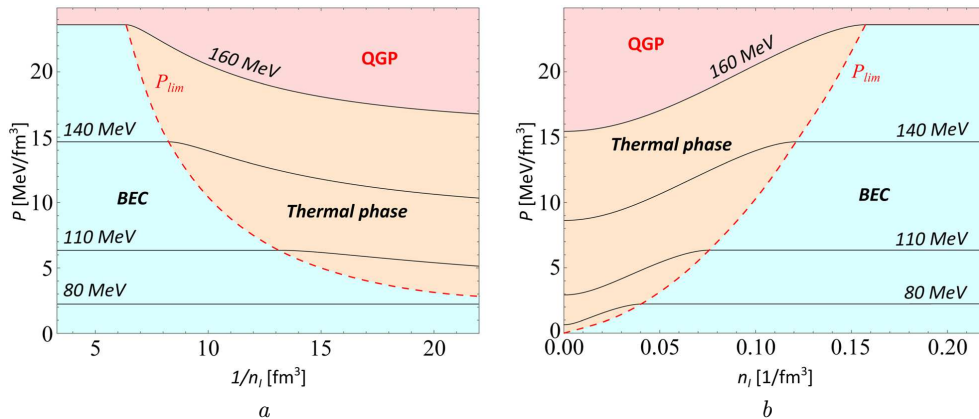


Рис. 3. Фазові діаграми для ідеального π^- - π^+ газу. Залежності тиску від оберненої густини ізоспіну $v = 1/n_I$ (a) і густини ізоспіну n_I (b). Ізотерма $T = 160$ MeV є приблизним початком фази QGP. Червона пунктирна крива p_{lim} позначає тиск ідеального газу при $\mu = m$ і відокремлює термічну фазу від BEC фази

ізоспінової густини n_I при фіксованій температурі T , $p(T = \text{const}, n_I)$, тобто дослідимо поведінку тиску вздовж ізотерми. Спочатку, як точку відліку, проаналізуємо ідеальний газ π^- - π^+ -мезонів. Фазова структура системи в цьому випадку зображена на рис. 3, a для залежностей $p = p(v_I)$ і на рис. 3, b для залежностей $p = p(n_I)$, де $v_I = 1/n_I$. На цих рисунках ізотерма $T_{\text{qgp}} = 160$ MeV розділяє стани кварк-глюонної плазми (QGP), а блакитна тонова область (позначена як BEC) представляє стани конденсату Бозе–Айнштайна. Ми бачимо, що немає фазового переходу рідина–газ, і тиск ідеального газу природно зростає зі збільшенням n_I у тепловій фазі, але він стає постійним у конденсованій фазі. Цей ефект виникає тому, що в багато-частинковій системі без взаємодії тиск існує лише за рахунок кінетичного руху теплових частинок з ненульовим імпульсом, $\mathbf{k} \neq 0$. Коли ми збільшимо густину частинок від нуля та йдемо уздовж певної ізотерми T , ми приходимо до точки n_{cd} на критичній кривій⁵. У цій точці ми визначаємо максимальну густину теплових частинок. Подальше збільшення густини частинок відбувається лише за рахунок збільшення густини частинок конденсату. Водночас у фазі конденсату зі збільшенням n_I загальна густина частинок у системі зростає ли-

ше за рахунок збільшення густини конденсованих частинок з $\mathbf{k} = 0$, що не дає внеску до тиску.

На наступному кроці розглянемо систему лише з відштовхуванням між частинками, тобто $\kappa = 0$. Фазова структура системи в цьому випадку зображена на рис. 4. На кожній панелі ми бачимо наявність трьох різних фаз:

1. “Теплова фаза” – це фаза, у якій як частинки, так і античастинки знаходяться в теплових станах.
2. “BEC” – це коли підсистема частинок має внесок від бозе-ейнштейнівського конденсату, а підсистема античастинок (π^+ -мезонів) знаходиться в тепловій фазі.
3. “QGP” – це фаза, де виникає кварк-глюонна плазма; ця фаза розділена ізотермою $T = T_{\text{qgp}} = 160$ MeV (ми припускаємо плавлення всіх піонних станів при температурах $T > T_{\text{qgp}}$).

Криві p_{lim} відповідають тиску π^- -мезонів на критичній кривій n_{lim} . Як видно, поведінка ізотерм в області “конденсату” відрізняється від ізотерм в ідеальному газі: тиск зростає зі збільшенням густини ізоспіну. Цей ефект зумовлений наявністю позитивного надлишкового тиску $P_{\text{ex}}(n)$ як додаткового внеску разом з кінетичним тиском у системі.

Якщо між частинками існує притягання, то ізотерми для температур з інтервалу $T < T_c$ демонструють “синусоїдальну” поведінку в кінцевому інтервалі параметра n_I . Відповідно до стандартного термодинамічного підходу, цю специфічну поведінку ізотерми можна розглядати як фазовий пе-

⁵ Значення T_{cd} і n_{cd} в цій точці відповідають значенням у тій же точці на критичній кривій $n_{\text{lim}}(T)$. Позначення T_c зарезервовано для критичної ізотерми при описі фазового переходу рідина–газ.

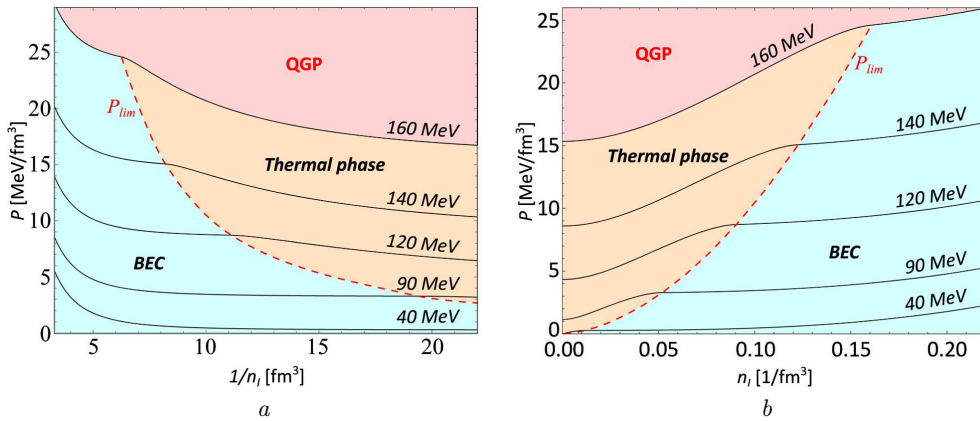


Рис. 4. Фазові діаграми системи $\pi^- - \pi^+$ з врахуванням лише відштовхування між частинками, тобто при $\kappa = 0$ (позначення див. на рис. 3)

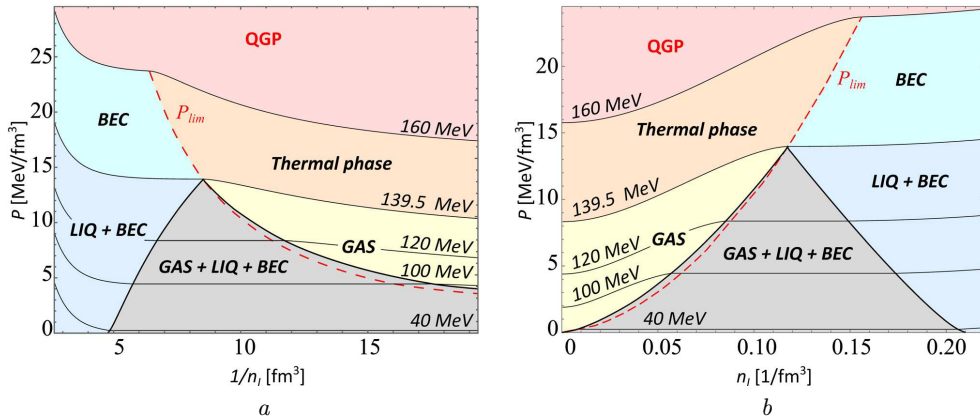


Рис. 5. Фазові діаграми: тиск–обернена густина ізоспіну $v = 1/n_I$ (a) та тиск–густина ізоспіну n_I для взаємодіючої $\pi^- - \pi^+$ системи при $\kappa = 0,2$ (b). Ізотерма $T_{\text{qgp}} = 160$ MeV відділяє QGP фазу. Червона пунктирна крива p_{lim} позначає тиск ідеального газу при $\mu = m$ і відокремлює термічну фазу від BEC фази. Сірий тонований “трикутник” позначає змішану газо-рідинну фазу, яка майже цілком знаходиться в π^- -мезонному конденсаті

рехід рідина–газ. Щоб розв’язати задачу, ми застосуємо узагальнені правила Максвелла (див. Додаток А). На відміну від підручничового варіанта, вони стосуються густини ізоспіну (густини заряду), а не повної густини частинок. Як впливає з узагальнених правил Максвелла, тиск, пов’язаний із ізотермами, що перетинають змішану рідинно-газову фазу, має сталі значення, як і хімічний потенціал. В результаті отримуємо бінодаль, яка визначає область фазового переходу рідина-газ подібно до того, як це було зроблено в роботі [30]. Отримані фазові діаграми показані на рис. 5. Змішана рідинно-газова фаза (сіра тонована область) майже повністю заходиться в конденсатній фазі (позначена як GAS + RIQ + BEC). Нагадаємо,

що густина конденсату в двокомпонентній системі піонів створюється лише π^- -мезонами, тобто $n_{\text{cond}} = n_{\text{cond}}^{(-)}$. Це означає, що певна частка π^- -мезонів складається з частинок з $\mathbf{k} = 0$. При цьому теплові π^- -мезони разом із π^+ -мезонами створюють суміш газу та рідини.

4.1. Фазовий перехід рідина–газ у квантовій системі бозонів частинка–античастинка

Повернімося до обговорення взаємодіючої $\pi^+ - \pi^-$ системи. Якщо при розгляді фазового переходу рідина–газ врахувати квантову статистику, то через появу конденсату ситуація стає іншою, ніж у

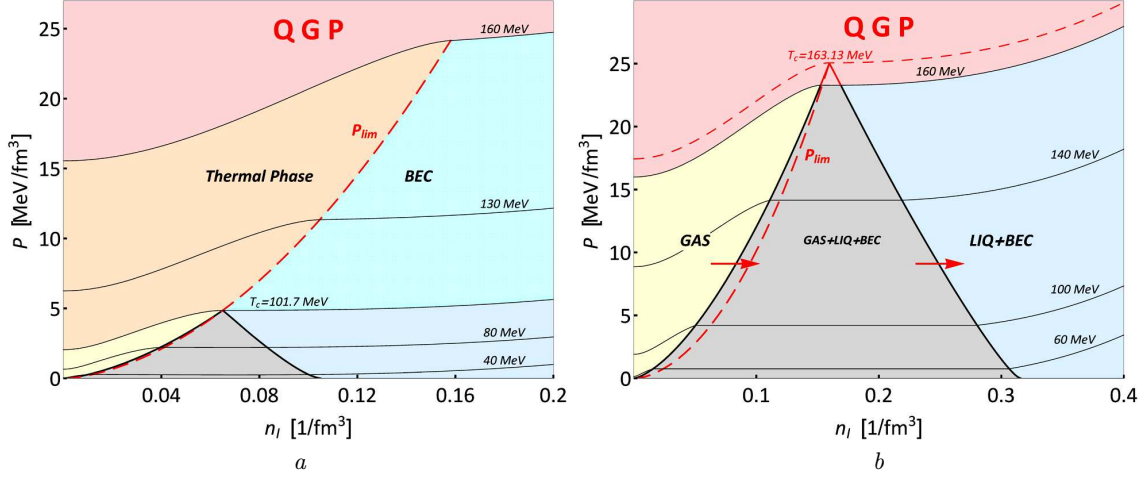


Рис. 6. Фазові діаграми тиск-ізоспінова густина для взаємодіючої $\pi^- - \pi^+$ системи при $\kappa = 0,1$ (a) і $0,3$ (b). Панель a: нижче критичної ізотерми $T_c = 101,7$ MeV відбувається фазовий перехід рідина-газ; ізотерма $T = 160$ MeV є межею QGP фази; червона пунктирна крива p_{lim} відділяє теплову фазу від BEC фази. Панель b: віртуальна критична ізотерма $T_c = 163$ MeV, розрахована при $\kappa = 0,3$, лежить у QGP фази, яка обмежена ізотермою $T_c = 160$ MeV

випадку статистики Больцмана. Виявляється, що наявність конденсату сильно впливає на положення локального максимуму тиску. Дійсно, цей максимум зараз локалізований на кривій $p_{lim}(n_I)$, яка представляє тиск у системі, що визначається станами, які належать критичній кривій $n_{lim}(T)$ для підсистеми π^- -мезонів. Нагадаємо, що тільки ця підсистема мезонів створює бозе-конденсат у разі слабого притягання, причому $n^{(-)}|_{crit.curve} = n_{lim}(T)$. Стани $(T, n_{lim}(T))$ визначають загальну концентрацію частинок $n = 2n_{lim}(T) - n_I$. Таким чином, загальний тиск у цих станах дорівнює

$$p_{lim}(n_I) = p_{kin}(T, n_I) + P_{ex}(n), \quad (27)$$

де кінетичний тиск у станах $(T, n_{lim}(T))$ має вигляд

$$p_{kin} = \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\omega_k} [f_{BE}(\omega_k, m) + f_{BE}(E(k, n), -\mu_I)], \quad (28)$$

де $E(k, n) = \omega_k + U(n)$ і $\mu_I = U(n) + m$. Крива $p_{lim}(n_I)$ відокремлює область тисків, які відповідають станам конденсату (тонована область, позначена як BEC), від області тисків, які відповідають тепловим станам бозонної системи, див. рис. 4-6.

Зараз ми збираємося довести дві особливості, властиві поведінці тиску у фазі конденсату.

Перша особливість: кінетичний тиск уздовж кожної ізотерми у фазі конденсату приблизно постійний:

$$p_{kin}(T, n_I)|_{T=const} \approx const. \quad (29)$$

а) Це буде точна рівність за відсутності взаємодії між частинками, коли $p = p_{kin} + P_{ex}$ зводиться до $p = p_{kin}(T, n_I)$. Тиск двокомпонентного ідеального газу зображено на рис. 3. Ми спостерігаємо постійний тиск у фазі конденсату (тонована блакитна область). Ефект, що описується рівнянням (29), виникає через те, що збільшення змінної n_I у фазі конденсату відбувається лише за рахунок збільшення кількості конденсованих частинок, тоді як концентрація теплових частинок залишається сталою вздовж ізотерми. Але збільшення кількості частинок у системі з нульовим імпульсом, $\mathbf{k} = 0$, не робить внеску в кінетичний тиск. Тут ми обговорювали тиск π^- -мезонів, які створюють конденсатні стани. Парціальний тиск π^+ -мезонів на тій самій ізотермі T розраховується для $\mu = m$ і створюється лише тепловими частинками, концентрація яких також є сталою. Цим ми доводимо беззаперечно справедливість рівняння (29) для ідеальної мезонної системи $\pi^- - \pi^+$.

б) Рівність (29) буде наближеною для системи з взаємодією. Як видно з рівняння (28) перший внесок до тиску, тобто кінетичний парціальний тиск π^- -мезонів, що становить 98% від

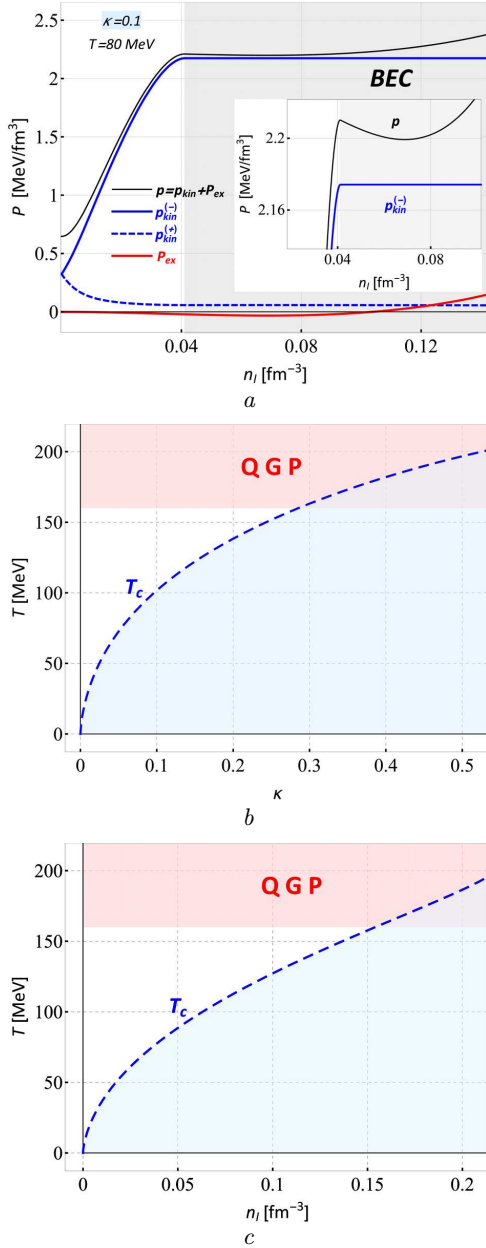


Рис. 7. Залежності внесків до тиску від густини ізоспіну для взаємодіючої π^- - π^+ системи при $T = 80$ MeV і $\kappa = 0,1$; локальний максимум на краю області конденсату та локальний мінімум, що виникає внаслідок наявності метастабільних та нефізичних інтервалів тиску, показані на вставці; тонована BEC область позначає стани бозе-айнштайнівського конденсату (а). Залежність критичної температури T_c фазового переходу рідина-газ від параметра притягання κ (б). Залежність критичної температури T_c фазового переходу рідина-газ від критичної густини ізоспіну n_{Ic} (с)

p_{kin} , залишається постійним, коли ми збільшуємо n_I , оскільки $U(n) - \mu_I = -m$ у фазі конденсату. Кінетичний парціальний тиск π^+ - мезонів, які знаходяться в теплової фазі, пригнічується, оскільки функція розподілу має вигляд $f_{BE} = 1/\{\exp[(\omega_k + 2U(n) + m)/T] - 1\}$, і внесок π^+ - мезонів у кінетичний тиск не перевищує 2%. Отже, ми можемо прийняти, що у фазі конденсату кінетичний тиск у π^- - π^+ -мезонній системі постійний з гарною точністю, і рівняння (29) справджується приблизно.

Друга особливість: тиск має таку структуру: $p = p_{kin} + P_{ex}$. Очевидно, що кінетичний тиск завжди додатний, $p_{kin} > 0$, а надлишковий – ні, і його знак залежить насамперед від густини n_I . Як видно з рис. 2, а, надлишковий тиск P_{ex} є від'ємним ($U(n)$ і P_{ex} мають однаковий знак). Завдяки цьому зі збільшенням n_I тиск на кожній ізотермі $T < T_c$ починає знижуватися у фазі конденсату після перетину лінії $p_{lim}(n_I)$. Це зниження тиску відбувається до точки локального мінімуму, як показано на рис. 7, а. На цьому ж рисунку представлено результати розрахунку кінетичного тиску $p_{kin}^{(-)}$ $\pi^{(-)}$ - мезонів, кінетичного тиску $p_{kin}^{(+)}$ $\pi^{(+)}$ - мезонів, і надлишкового тиску P_{ex} .

Фазовий перехід рідина-газ відбувається, коли при збільшенні густини ізоспіну n_I тиск у системі має спочатку локальний максимум, а потім – локальний мінімум. Розглянемо структуру тиску в області конденсату. Для похідної повного тиску після деяких алгебраїчних перетворень (див. Додаток Б) ми отримуємо

$$\frac{\partial p(T, n_I)}{\partial n_I} = \left(1 - \frac{2n^{(+)}}{n}\right) \frac{\partial P_{ex}(n)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_I} = 0. \quad (30)$$

Тут ми використовуємо, що $\partial p_{kin}^{(-)}(T, n_I)/\partial n_I = 0$. При додатному значенні виразу у дужках, $(1 - 2n^{(+)}/n) > 0$, де $n = 2n^{(+)} + n_I$, рівняння (30) приводить до

$$\frac{\partial P_{ex}(n)}{\partial n} = 0 \rightarrow n(-A + 2Bn) = 0, \quad (31)$$

де у другому рівнянні ми використовуємо явну форму для P_{ex} , див. рівняння (15). Отже, мінімум тиску знаходиться в точці

$$n^{(min)} = \frac{A}{2B} = \kappa \sqrt{\frac{m}{B}}, \quad (32)$$

де $A = 2\kappa\sqrt{mB}$. Це – справжній мінімум, оскільки знак другої похідної в цій точці додатний, $\frac{\partial^2 P_{\text{ex}}(n)}{\partial n^2} = A > 0$. Для температури $T = T_c$, тобто на критичній ізотермі, ця загальна концентрація частинок, отримана в рівнянні (32), або точка $(T_c, n^{(\text{min})})$, визначає критичну точку. Насправді можна зробити перетворення $(T_c, n^{(\text{min})}) \rightarrow (T_c, n_I^{(\text{min})})$, і таким чином буде знайдена критична точка в (T, n_I) -площині,

Критичну температуру T_c можна знайти як розв'язок рівняння, що прирівнює p_{max} до p_{min} ,

$$p_{\text{max}}(T_c) = p_{\text{min}}(T_c). \quad (33)$$

Однак у разі присутності конденсату неможливо визначити максимум тиску за допомогою рівняння $\partial p(T, n_I)/\partial n_I = 0$, оскільки ізотерма не є гладкою функцією на краю області конденсату. Згідно зі стандартною процедурою, щоб знайти максимум і мінімум гладкої функції в області з краями, потрібно порівняти значення тиску, задані рішеннями рівняння (30) із значеннями тиску на краях області. Як ми стверджували вище, рівняння (30) визначає лише локальний мінімум тиску, тоді як локальний максимум знаходиться на краю області конденсату, яка знаходиться ліворуч від локального мінімуму, див. рис. 7, *a*. На графіках фазових діаграм (див. рис. 6), межа між термічною фазою та фазою конденсату позначена як тиск $p_{\text{lim}}(n_I)$, що відповідає станам $(T, n_{\text{lim}}(T))$ на критичній кривій $n_{\text{lim}}(T)$, див. червону пунктирну лінію на рис. 1. Отже, локальний максимум кожної ізотерми $T \leq T_c$ належить кривій $p_{\text{lim}}(n_I)$.

Давайте тепер обговоримо алгоритм розрахунку критичної температури T_c . Повна концентрація частинок в системі частинка–античастинка дорівнює

$$n(T) = n^{(-)}(T) + n^{(+)}(T). \quad (34)$$

Для станів на критичній кривій, де конденсат зникає, маємо $n^{(-)}(T) = n_{\text{lim}}(T)$ для будь-якої температури. Оскільки густина $\pi^{(-)}$ -мезонів при критичній температурі T_c також належить до критичної кривої, ми отримуємо $n^{(-)}(T_c) = n_{\text{lim}}(T_c)$. Отже, при критичній температурі можна переписати рівняння (34) у вигляді

$$n(T_c) = n_{\text{lim}}(T_c) + n_{\text{th}}^{(+)}(T_c), \quad (35)$$

де $n_{\text{th}}^{(+)}$ – густина теплових π^+ -мезонів. Як ми стверджували, густина $n(T_c)$, визначена в рівнянні (35), відповідає локальному максимуму тиску на ізотермі. При фазовому переході рідина–газ критична ізотерма перетинає точку, де локальний максимум тиску збігається з локальним мінімумом, тобто температура ізотерми дорівнює критичній температурі T_c . Таким чином, якщо замість $n(T_c)$ у рівнянні (35) підставити густина $n^{(\text{min})}$ з рівняння (32), ми приходимо до рівняння, яке визначає T_c :

$$n_{\text{lim}}(T_c) + n_{\text{th}}^{(+)}(T_c) = n^{(\text{min})}. \quad (36)$$

Або в більш детальному вигляді

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp[(\omega_k - m)/T_c] - 1} + \\ & + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\{[\omega_k + 2U(n^{(\text{min})}) + m]/T_c\} - 1} = \\ & = n^{(\text{min})}, \end{aligned} \quad (37)$$

де $n^{(\text{min})} = A/(2B) = \kappa\sqrt{m/B}$, і ми використали значення n_{lim} , визначене рівнянням (20). Розв'язуючи рівняння (37), ми отримуємо криву $T_c(\kappa)$, яка зображена на рис. 7, *b*.

4.2. Обговорення

Ми можемо порівняти характеристики фазового переходу рідина–газ у класичних і квантових системах взаємодіючих бозонів. Взаємодія в обох системах досліджувалась в рамках моделі середнього поля із середнім полем $U(n) = -An + Bn^2$ з однаковими значеннями коефіцієнтів притягання A і коефіцієнтів відштовхування B . У результаті ми отримали, що наявність конденсату, яка зумовлена квантовою статистикою Бозе, істотно підвищує значення критичної температури фазового переходу рідина–газ. Дійсно, при параметрі притягання $\kappa = 0,2$ ми отримуємо критичну температуру $T_c = 2,8$ MeV ($T_c = A^2/(8B)$) для класичного газу і $T_c = 139$ MeV для квантової системи. Давайте обговоримо це явище.

Слід зазначити, що зі збільшенням параметра притягання A критична температура T_c квантової бозонної системи зростає. Фактично було отримано $T_c = 101$ MeV для $\kappa = 0,1$ і $T_c = 163$ MeV для $\kappa = 0,3$, див. (та порівняйте) панелі *a* та *b* на

рис. 6. Збільшення T_c зумовлене, головним чином, особливостями поведінки тиску у фазі конденсату. Додатковий внесок робить “включення” квантової статистики в системі бозонів. Дійсно, у квантовій системі бозе-статистика “генерує” ефективне притягання між частинками, тоді як статистика Фермі “генерує” ефективне відштовхування. Отже, “вмикання” бозе-статистики в системі приводить до ефективного збільшення притягання між частинками або до ефективного збільшення коефіцієнта притягання A в середньому полі $U(n)$. Дійсно, статистично індукований потенціал взаємодії $V(r)$ для квантової корекції першого порядку має вигляд

$$V(r) = -T \ln \left[1 \mp e^{-2\pi r/\Lambda^2} \right], \quad (38)$$

де r – відстань між частинками, $\Lambda = \sqrt{2\pi/mT}$ – довжина теплової хвилі, верхній знак відповідає статистиці Фермі, а нижній – статистиці Бозе. Очевидно, цей двочастинковий ефективний потенціал має притягальну поведінку у випадку статистики Бозе та відштовхувальну поведінку у випадку статистики Фермі (ця поправка справедлива, коли $r \gg \Lambda$). Отже, перехід від класичного газу до квантового має дві сторони. По-перше, зростає ефективне притягання між частинками, а по-друге, конденсат, який є в наявності в системі, визначає підвищення критичної температури. Ми підкреслюємо, що присутність конденсату завдяки квантовій статистиці та взаємодія притягання та відштовхування між частинками є відповідальними за виникнення цього “стрибка вгору” критичної температури. Основна ж причина цього полягає в тому, що кінетичний тиск у конденсаті лишається майже постійним.

У той самий час можна вказати на протилежний ефект, який зумовлений статистикою Фермі. Як було показано в роботі [31], квантове рівняння Ван-дер-Ваальса, якщо його застосувати для опису ядерної матерії, дає критичну температуру $T_c = 19,7$ MeV для фазового переходу рідина–газ. Це значення критичної температури близьке до експериментальних оцінок, наведених у роботах [32, 33]. З іншого боку, класичне рівняння Ван-дер-Ваальса дає для фазового переходу рідина–газ значення $T_c = 29$ MeV. Як ми вже обговорювали в цьому розділі та як впливає з рівняння (38), статистика Фермі ефективно поси-

лює відштовхування між частинками, що означає ефективне зменшення притягання між ними. Цей квантово-статистичний ефект зменшення притягання в системі може пояснити зниження критичної температури від значення $T_c = 29$ MeV до значення $T_c = 19,7$ MeV при переході від класичного опису фазового переходу рідина–газ в ядерній речовині до квантово-статистичного [31].

5. Обговорення та заключні зауваження

У статті представлено термодинамічно послідовний підхід для опису фазових переходів Бозе–Айнштайна та рідина–газ у щільній бозонній системі з самовзаємодією при сталій густині ізоспіну (густині заряду) n_I . Як приклад ми розглянули систему мезонних частинок з $m = m_\pi$ і нульовим спіном; умовно ми назвали ці бозонні частинки “піонами”. Цей вибір був зроблений тому, що заряджені π -мезони є найлегшими ядерними частинками та найлегшими адронами, які характеризуються ізоспіновим числом. З цієї ж причини “індуковане температурою створення” пар частинка–античастинка в інтервалі температур $T \leq 200$ MeV стає загальною проблемою для квантово-статистичних методів. Опис термодинамічних властивостей системи було здійснено в рамках формалізму канонічного ансамблю, де хімічний потенціал μ_I є термодинамічною величиною, що залежить від канонічних змінних (T, n_I) . Для отримання фазової діаграми, яка відображає фазовий перехід рідина–газ, ми розраховували залежність тиску від густини ізоспіну для різних ізотерм, а потім модифікували залежність тиску відповідно до узагальнених правил Максвелла (див. Додаток А).

Слід зазначити, що електричний заряд конденсату негативний у випадку, якщо загальний заряд системи негативний. І навпаки, електричний заряд конденсату був би позитивним, якщо загальний заряд бозонної системи є позитивним. Показано, що при фіксованій температурі, залежності концентрацій частинок $n^{(-)}(T, n_I)$ і $n_{\text{tot}}(T, n_I)$ від n_I майже лінійні і близькі одна до одної для $n_I > n_{Ic}$. Це відбувається тому, що для кожного фіксованого T значення концентрації $n_{\text{th}}^{(-)}$ теплових (кінетичних) π^- -мезонів не змінюється [19], а значення $n^{(+)}$ є малим і приблизно сталим (див. рис. 2, *b*). Оскільки лише π^- -мезони зазнають фазового переходу в бозе-айнштайнівський конденсат, збільшення кон-

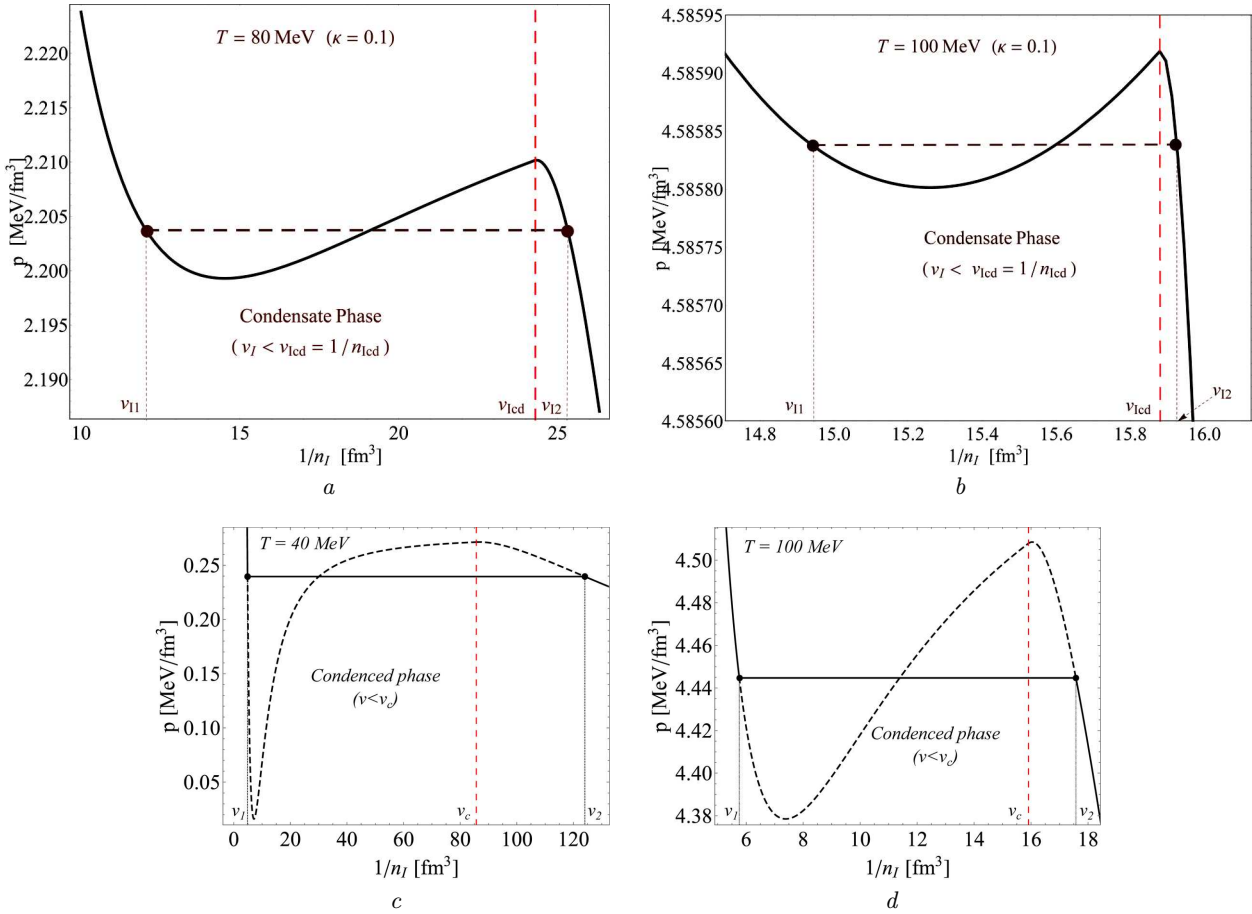


Рис. 8. Залежності тиску від оберненої ізоспінівної густини $1/n_I$ у взаємодіючій $\pi^+\pi^-$ піонній системі в рамках моделі середнього поля при $\kappa = 0,1$ (a, b) і $0,2$ (c, d). Початок фазового переходу рідина–газ визначається за правилом Максвелла

центрацій $n^{(-)}$ і $n = n_{\text{tot}}$ при $n_I > n_{Ic}$ відбувається майже цілком за рахунок збільшення концентрації конденсату.

Фазові діаграми були наведені на рис. 4. Масштабний параметр моделі $\kappa = A/(2\sqrt{mB})$, який сам по собі є комбінацією параметрів середнього поля A і B [$U(n) = -An + Bn^2$] і маси частинки, визначає різні можливі фазові сценарії, які відбуваються в системі бозонів частинка–античастинка. Однак, коли коефіцієнт притягання $A = \kappa A_c$, де $A_c = 2\sqrt{mB}$, дорівнює нулю (тобто $\kappa = 0$), система перебуває в термічній або конденсатній фазі, але не може розвинути фазовий перехід рідина–газ.

У випадку $\kappa > 0$ в системі відбувається фазовий перехід рідина–газ, а перехід з теплової фази в конденсатну можливий як з фазовим переходом рідина–газ (при $T < T_c$), так і без нього (при

$T \geq T_c$). Іншими словами, на фазовій діаграмі є область, де ВЕС і змішана рідко-газова фази співіснують одночасно (сіра область на лівій панелі на рис. 6). Подібна ситуація була описана в роботі [30], де досліджувалися бозе-айнштейнівська конденсація та фазовий перехід рідина–газ у α -матерії. Область QGP над ізотермою $T = T_{\text{qgp}} = 160$ MeV – це фаза, де виникає кварк-глюонна плазма. Ми вважаємо, що це є обмеженням нашої моделі, оскільки відбувається плавлення всіх піонних станів при температурах, вищих за T_{qgp} .

Роль нейтральних піонів виходить за рамки цієї статті. Проведений аналіз можна покращити, врахувавши їхню присутність в системі, а також узагальнивши обчислення до ненульового внеску в середнє поле, яке залежить від n_I . Автори планують розглянути ці проблеми деінде.

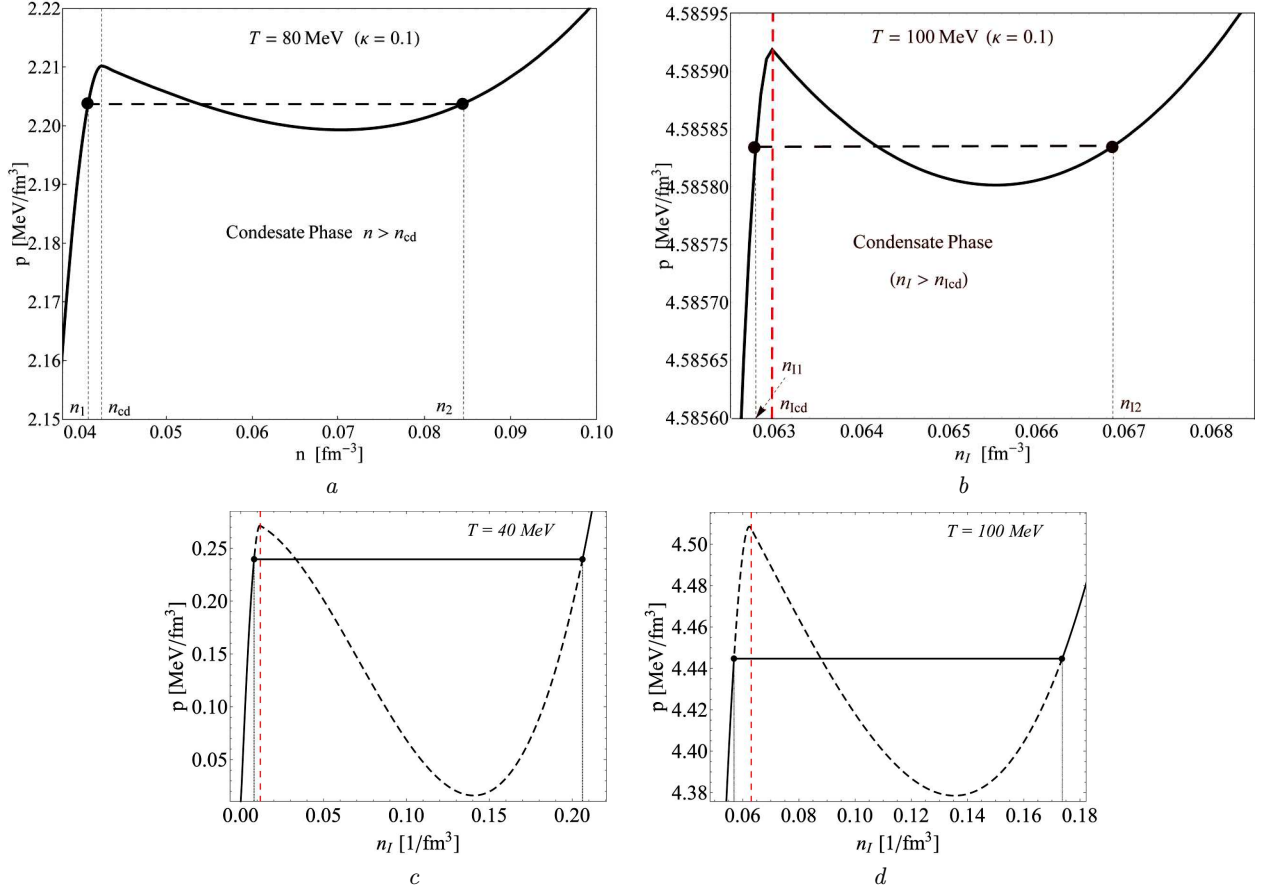


Рис. 9. Залежності тиску від ізоспінової густини n_I у взаємодіючій $\pi^+-\pi^-$ піонній системі в рамках моделі середнього поля при $\kappa = 0,1$ (a, b) і $0,2$ (c, d)

Дослідження Д.А. та Д.Ж. виконуються за підтримки Фонду Саймонса та Програми “Структура і динаміка статистичних і квантовопольових систем” Відділення фізики і астрономії НАН України. Д.А. також вдячний за дискусії з М. Горенштейном, І. Мішустініним та Н. Stöcker. Ця робота також була підтримана Відділом цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (грант 6Ф-2024).

ДОДАТОК А.

Фазовий перехід рідина–газ: правила Максвелла для системи із збереженням заряду

Для визначення точок $v = 1/n_I$, які відповідають правилу Максвелла, необхідно розв’язати систему двох рівнянь відносно точок $v_{x1} = 1/n_{I2}$ та $v_{x2} = 1/n_{I1}$; звернімо увагу, що ми отримуємо тиск як функцію n_I , тобто $p(n_I)$. У випадку однорідної системи та для ізотермічного процесу, $T = \text{const}$,

маємо

$$dp = sdT + n_I d\mu_I \rightarrow dp = n_I d\mu_I. \quad (\text{A1})$$

Тоді

$$d\mu_I = 0 \rightarrow dp = 0 \rightarrow \int_1^2 dp = 0 \rightarrow p_1 = p_2. \quad (\text{A2})$$

А отже

$$\frac{1}{n_I} dp = d\mu_I, \quad d\mu_I = 0 \rightarrow \int_1^2 \frac{1}{n_I} dp = 0. \quad (\text{A3})$$

Запишемо два рівняння (A2) та (A3) як систему рівнянь для визначення v_1 і v_2 :

$$p(1/v_1) = p(1/v_2), \quad (\text{A4})$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv p(1/v) = (v_2 - v_1) p(1/v_1), \quad (\text{A5})$$

Останнє рівняння можна подати у вигляді

$$\int_{v_1}^{v_2} dv [p(1/v) - p(1/v_1)] = 0. \quad (\text{A6})$$

Після того, як ми отримаємо рішення, можна визначити значення параметрів $n_{I1} = 1/v_2$ і $n_{I2} = 1/v_1$.

Графічні приклади застосування цього алгоритму зображено на рис. 8 та 9 для набору температур $T = 40, 80, 100$ MeV і двох значень параметра $\kappa = 0,1$ та $0,2$.

ДОДАТОК Б.

Похідні від тиску у фазі конденсату

Тут ми наводимо деталі розрахунку похідної від тиску у фазі конденсату. Як було зазначено раніше, для тиску в системі з взаємодією $p = p_{\text{kin}} + P_{\text{ex}}$. Для похідних від кінетичного внеску отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\text{kin}}(T, n_I)}{\partial n_I} &= \frac{\partial p_{\text{kin}}^{(-)}(T, n_I)}{\partial n_I} + \frac{\partial p_{\text{kin}}^{(+)}(T, n_I)}{\partial n_I}, \\ \frac{\partial p_{\text{kin}}^{(-)}(T, n_I)}{\partial n_I} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

З рівняння (10) випливає, що

$$\begin{aligned} p_{\text{kin}}^{(+)}(T, n_I) &= -T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + 2U(n) + m}{T} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Обчислюємо похідну від цього парціального тиску,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\text{kin}}^{(+)}(T, n_I)}{\partial n_I} &= \\ &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp \left(\frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + 2U(n) + m}{T} \right) - 1} \times \\ &\times 2 \frac{\partial U(n)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_I}. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Тоді отримуємо

$$\frac{\partial p_{\text{kin}}(T, n_I)}{\partial n_I} = -2n^{(+)}(T, n_I) \frac{\partial U(n)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_I}. \quad (\text{B4})$$

Тепер, використовуючи рівняння (7), можна написати

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(T, n_I)}{\partial n_I} &= -2n^{(+)}(T, n_I) \frac{\partial U(n)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_I} + \frac{\partial P_{\text{ex}}(n)}{\partial n} \times \\ &\times \frac{\partial n}{\partial n_I} = \left(1 - \frac{2n^{(+)}(T, n_I)}{n(T, n_I)} \right) \frac{\partial P_{\text{ex}}(n)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_I} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

З урахуванням того, що $n = 2n^{(+)}(T, n_I) + n_I$, отримуємо, що $2n^{(+)}(T, n_I)/n < 1$ для скінченних ізоспінних густин, $n_I > 0$. Таким чином, для додатного значення виразу у дужках, $(1 - 2n^{(+)}(T, n_I)/n) > 0$, рівняння (B5) приводить до рівняння

$$\frac{\partial P_{\text{ex}}(n)}{\partial n} = 0. \quad (\text{B6})$$

1. A. Bzdak, S. Esumi, V. Koch, J. Liao, M. Stephanov, N. Xu. Mapping the phases of quantum chromodynamics with beam energy scan. *Phys. Rep.* **853**, 1 (2020).

2. A. Anselm, M. Ryskin. Production of classical pion field in heavy ion high energy collisions. *Phys. Lett. B* **226**, 482 (1991).
3. J.-P. Blaizot, A. Krzwinski. Soft-pion emission in high-energy heavy-ion collisions. *Phys. Rev. D* **46**, 246 (1992).
4. J.D. Bjorken. A full-acceptance detector for SSC physics at low and intermediate mass scales: An expression of interest to the SSC. *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 4189 (1992).
5. I.N. Mishustin, W. Greiner. Multipion droplets. *J. Phys. G* **19**, L101 (1993).
6. D.T. Son, M.A. Stephanov. QCD at finite isospin density. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 592 (2001).
7. J. Kogut, D. Toublan. QCD at small non-zero quark chemical potentials. *Phys. Rev. D* **64**, 034007 (2001).
8. D. Toublan, J. Kogut. Isospin chemical potential and the QCD phase diagram at nonzero temperature and baryon chemical potential. *Phys. Lett. B* **564**, 212 (2001).
9. A. Mammarella, M. Mannarelli. Intriguing aspects of meson condensation. *Phys. Rev. D* **92**, 085025 (2015).
10. S. Carignano, L. Lepori, A. Mammarella, M. Mannarelli, G. Pagliaroli. Scrutinizing the pion condensed phase. *Eur. Phys. J. A* **53**, 35 (2017).
11. M. Mannarelli. Meson condensation. *Particles* **2**, 411 (2019).
12. B.B. Brandt, G. Endrődi. QCD phase diagram with isospin chemical potential. *PoS LATTICE* **2016**, 039 (2016).
13. B.B. Brandt, G. Endrődi, S. Schmalzbauer. QCD at finite isospin chemical potential. *Eur. Phys. J. Web Conf.* **175**, 07020 (2018).
14. B.B. Brandt, G. Endrődi, S. Schmalzbauer. QCD phase diagram for nonzero isospin-asymmetry. *Phys. Rev. D* **97**, 054514 (2018).
15. D. Anchishkin, I. Mishustin, H. Stoecker. Phase transition in interacting boson system at finite temperatures. *J. Phys. G* **46**, 035002 (2019).
16. I.N. Mishustin, D.V. Anchishkin, L.M. Satarov, O.S. Stashko, H. Stoecker. Condensation of interacting scalar bosons at finite temperatures. *Phys. Rev. C* **100**, 022201(R) (2019).
17. D. Anchishkin, I. Mishustin, O. Stashko, D. Zhuravel, H. Stoecker. Finite-temperature Bose–Einstein condensation in interacting boson system. *Ukr. J. Phys.* **64**, 1118 (2019).
18. O.S. Stashko, D.V. Anchishkin, O.V. Savchuk, M.I. Gorenstein. Thermodynamic properties of interacting bosons with zero chemical potential. *J. Phys. G* **48**, 055106 (2020).
19. D. Anchishkin, V. Gnatovskyy, D. Zhuravel, V. Karpenko. Selfinteracting particle-antiparticle system of bosons. *Phys. Rev. C* **105**, 045205 (2022).
20. D. Anchishkin, V. Vovchenko. Mean-field approach in the multi-component gas of interacting particles applied to relativistic heavy-ion collisions. *J. Phys. G* **42**, 105102 (2015).
21. D.V. Anchishkin. Particle finite-size effects as a mean-field approximation. *Sov. Phys. JETP* **75**, 195 (1992).

22. D. Anchishkin, E. Suhonen. Generalization of mean-field models to account for effects of excluded-volume. *Nucl. Phys. A* **586**, 734 (1995).
23. R.V. Poberezhnyuk, V.Yu. Vovchenko, D.V. Anchishkin, M.I. Gorenstein. Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state. *J. Phys. G* **43**, 095105 (2016).
24. E.E. Kolomeitsev, D.N. Voskresensky. Fluctuations in non-ideal pion gas with dynamically fixed particle number. *Nucl. Phys. A* **973**, 89 (2018).
25. E.E. Kolomeitsev, M.E. Borisov, D.N. Voskresensky. Particle number fluctuations in a non-ideal pion gas. *Eur. Phys. J. Web Conf.* **182**, 02066 (2018).
26. E.E. Kolomeitsev, D.N. Voskresensky, M.E. Borisov. Charge and isospin fluctuations in a non-ideal pion gas with dynamically fixed particle number. *Eur. Phys. J. A* **57**, 145 (2021).
27. L. Adamczyk *et al.* Bulk properties of the medium produced in relativistic heavy-ion collisions from the beam energy scan program. *Phys. Rev. C* **96**, 044904 (2017).
28. B. Abelev *et al.* Pion, kaon, and proton production in central Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 252301 (2012).
29. J.P. Hansen, I.R. McDonald. *Theory of Simple Liquids* (Academic Press, 2006).
30. L.M. Satarov, M.I. Gorenstein, A. Motornenko, V. Vovchenko, I.N. Mishustin, H. Stoecker. Bose–Einstein condensation and liquid-gas phase transition in alpha-matter. *J. Phys. G* **44**, 125102 (2017).
31. V. Vovchenko, D.V. Anchishkin, M.I. Gorenstein. Van der Waals equation of state with Fermi statistics for nuclear matter. *Phys. Rev. C* **91**, 064314 (2015).
32. J.B. Natowitz, K. Hagel, Y. Ma, M. Murray, L. Qin, R. Wada, J. Wang. Limiting temperatures and the equation of state of nuclear matter. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 212701 (2002).
33. V.A. Karnaukhov *et al.* Critical temperature for the nuclear liquid gas phase transition. *Phys. Rev. C* **67**, 011601 (2003).

Одержано 04.08.24.

Переклад на українську мову О. Войтенка

V. Gnatovskyy, D. Anchishkin,
D. Zhuravel, V. Karpenko

PHASE DIAGRAMS OF RELATIVISTIC SELFINTERACTING BOSON SYSTEM

Within the Canonical Ensemble, we investigate a system of interacting relativistic bosons at finite temperatures and finite isospin densities in a mean-field approach. The mean field contains both attractive and repulsive terms. Temperature and isospin density dependences of thermodynamic quantities are obtained. It is shown that, in the case of attraction between particles in a bosonic system, a liquid-gas phase transition develops against the background of the Bose–Einstein condensate. The corresponding phase diagrams are given. We explain the reasons for why the presence of a Bose condensate significantly increases the critical temperature of the liquid-gas phase transition compared to that obtained for the same system within the framework of Boltzmann statistics. Our results may have implications for the interpretation of experimental data, in particular, how sensitive the critical point of the mixed phase is to the presence of the Bose–Einstein condensate.

Keywords: relativistic bosonic system, Bose–Einstein condensation, phase transition.