

В.М. КАЛИТА,<sup>1,2,3</sup> С.О. РЕШЕТНЯК,<sup>2,3</sup> С.М. РЯБЧЕНКО<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Інститут фізики НАН України

(Просп. Науки, 46, Київ 03028; e-mail: vmkalita@ukr.net)

<sup>2</sup> Національний технічний університет України

“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

(Просп. Перемоги, 37, Київ 03056)

<sup>3</sup> Інститут магнетизму НАН України та МОН України

(Бульвар Вернадського 36-б, Київ 03142)

## НЕСТІЙКІСТЬ ТА ЗБУРЕННЯ КОЛИВАНЬ ПРИ ІНДУКОВАНОМУ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ ОРІЄНТАЦІЙНОМУ МАГНІТНОМУ ФАЗОВОМУ ПЕРЕХОДІ У ФІЗИЧНОМУ МАЯТНИКУ

УДК 531.5; 537.6

*Розглянуто ефекти нелінійного впливу намагнічування та магнітного фазового переходу на стійкість та динаміку маятника, виготовленого з магнітом'якого феромагнетика, який має форму балки, подовжній розмір якої набагато більший за її поперечні розміри. Показано, що намагнічування маятника впливає на стійкість та може призвести до критичної зміни рівноваги маятника в перпендикулярному (поперечному) до маятника магнітному полі. В критичному полі відбувається втрата жорсткості коливальної системи, а частота власних механічних коливань маятника прямує до нуля. Критичний характер впливу магнітного поля на маятник пов'язаний із індукованим магнітним полем орієнтаційним магнітним фазовим переходом у феромагнетик маятника, який супроводжується зміною симетрії його магнітного стану. Змінне магнітне поле, додане до стаціонарного магнітного поля, індукуює вимушені механічні коливання маятника за умови, що стаціонарне поле більше за порогову величину. Коли стаціонарне поле менше від критичного, то змінне магнітне поле може спричинити параметричний резонанс механічних коливань маятника.*

*Ключові слова:* магнітний маятник, власна частота, орієнтаційний магнітний фазовий перехід, параметричний резонанс, вимушені коливання.

### 1. Вступ

Дослідження коливальних систем (маятників), які містять магніти, і на які діють зовнішні магнітні поля, становлять значний інтерес, вони слугують

Цитування: Калита В.М., Решетняк С.О., Рябченко С.М. Нестійкість та збурення коливань при індукованому магнітним полем орієнтаційному магнітному фазовому переході у фізичному маятнику. *Укр. фіз. журн.* **69**, №9, xxx (2024).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ISSN 2071-0194. *Укр. фіз. журн.* 2024. Т. 69, № 9

об'єктами дослідження проявів нелінійної динаміки [1–6], які легко спостерігати в реальному часі. Такі маятники містять жорсткі магніти, на які чинить силову дію зовнішнє магнітне поле постійного магніту чи котушки з струмом [7, 8].

Вільні коливання немагнітного фізичного маятника за відсутності магнітного поля здійснюються під дією моменту сили тяжіння, яка прикладена до центра мас тіла маятника, завдяки якій маятник здійснює періодичний (коливальний) обертальний рух навколо горизонтальної осі [9]. Коли маятник виготовлено з магнітного матеріалу, то зовнішнє магнітне поле також вплине на

коливання маятника. Якщо магнітне поле неоднорідне або якщо напрямок намагніченості маятника не співпадає з напрямком поля, то виникатиме момент сил, який впливає на жорсткість коливальної системи та її динаміку [1–5].

В цій роботі ми розглянемо ефект впливу на магнітний маятник зовнішнього магнітного поля, яке може спричинити в феромагнетикі маятника магнітний фазовий перехід. Вплив нелінійності спричиненої фазовим перетворенням буде призводити до критичної зміни динаміки маятника. Слід очікувати, що внаслідок магнітного фазового переходу, індукваного магнітним полем, можуть змінитися умови рівноваги маятника, зміниться його власна частота та характер збурення магнітним полем механічних коливань маятника. Ми розглянемо випадок безкоордитивного магнітного маятника в однорідному магнітному полі, яке індукє в феромагнетикі маятника орієнтаційний магнітний фазовий перехід.

При орієнтаційних магнітних фазових переходах відбувається спонтанна зміна орієнтації параметра порядку (вектора намагніченості) [10, 11] в магнетикі. Орієнтаційний фазовий перехід відбувається внаслідок конкуренції взаємодій, наприклад, завдяки конкуренції зовнішнього магнітного поля та поля магнітної анізотропії, як це спостерігається у одновісних феромагнетиках, коли магнітне поле направлене перпендикулярно до легкої осі феромагнетика [12–14]. В одновісному феромагнетикі в малому полі, величина якого менша за величину поля магнітної анізотропії, реалізується кутова фаза - низькосиметричний стан з вектором намагніченості, який неколінеарний вектору напруженості магнітного поля, а коли магнітне поле переважає поле магнітної анізотропії, то вектор намагніченості стає співнаправленим з вектором напруженості магнітного поля і орієнтованим вздовж осі симетрії феромагнетика – високосиметричний магнітний стан. Така зміна станів одновісного феромагнетика відбувається критично, як фазовий перехід другого роду [11], індукований магнітним полем між низькосиметричним та високосиметричним магнітними станами.

Орієнтаційні магнітні фазові переходи проявляються в динамічних властивостях магнетиків при спостереженнях коливань вектора магнітного моменту [15]. Умови коливань і частоти змінюються, коли змінюється напрямок магнітного поля [16–

18], або, що теж саме, коли змінюється орієнтація зразка по відношенню до магнітного поля. У випадку впливу магнітного поля на маятник спостерігається зовсім інша ситуація, бо мова йде про механічні коливання маятника, а не про високочастотні коливання вектора намагніченості феромагнітної речовини маятника. Тому вплив на маятник магнітного поля та можливого орієнтаційного магнітного фазового переходу в ньому представляється цікавою задачею, бо виникає питання, як зміна орієнтації для вектора намагніченості вплине на коливання маятника і чи буде така зміна мати критичний характер, тобто чи є це критичним явищем для механічних коливань маятника.

В літературі [19–25] повідомляється, що магнітне поле може індукувати критичний вигин магнітом'якої високо-еластичної балки з одним фіксованим кінцем. При критичному вигині балки магнітним полем відбувається одночасна зміна симетрії магнітного стану балки і зміна симетрії форми балки [26], а сам вигин супроводжується неоднорідним поворотом ділянок балки на різні кути [19]. Неоднорідність і зміна симетрії форми балки заважають однозначно визначити, чи критичний вигин балки відбувається тільки завдяки орієнтаційному магнітному фазовому переходу, індукваному магнітним полем. У випадку магнітного маятника орієнтаційний магнітний фазовий перехід також може супроводжуватись критичним поворотом, як при вигині, але без зміни симетрії форми.

В цій роботі ми розглянемо однорідний маятник, який виготовлено з магнітом'якої балки, поздовжній розмір якої набагато більший за її поперечні розміри. Магнітне поле однорідне і орієнтоване горизонтально, перпендикулярно (поперечно) до довгої осі балки незбуреного маятника. Ми покажемо, що стаціонарне магнітне поле впливає на стійкість маятника. Буде отримано, що магнітне поле індукє критичний поворот маятника, який відбувається внаслідок орієнтаційного магнітного фазового переходу, але на відміну від одновісного феромагнетика поперечне поле при намагнічуванні маятника індукє перехід з високосиметричної магнітної фази до низькосиметричної магнітної фази. Залежність стійкості від поля та критичний перехід впливають на власні частоти коливань маятника. Буде показано, що в докритичній області мале змінне магнітне поле, додане до стаціонарного, може збурити параметричний ре-

зонанс механічних коливань маятника, які подібні коливанням гойдалки, а коли стаціонарне поле стає більше за порогове, то змінне магнітне поле індукує вимушені механічні коливання маятника.

Розглянута задача опису впливу магнітного поля на стійкість та коливання фізичного маятника та отримані результати можуть бути корисними при аналізі впливу магнітного поля на магнітні частинки в матриці еластомеру [27, 28]. Повороти частинок в матриці відбуваються завдяки дії моменту сил, створеному магнітним полем, та конкуруючим з ним моментом сил, створених пружно деформованою матрицею, дія якого подібна до дії моменту сили тяжіння [28], і який протилежний до вектора кута повороту частинки. Однак, задача опису впливу магнітного поля на фізичний маятник значно простіша, порівняно з задачею намагніченої частинки в матриці еластомеру, деформування якої при повороті частинки є неоднорідним [27], такі неоднорідності відсутні у випадку маятника.

## 2. Критичний поворот балки

На рис. 1, *a*, *b* наведено зображення двох маятників (магнітом'яких балок), у яких поздовжній розмір набагато більший за поперечні розміри, один має форму прямокутного паралелепіпеда зі сторонами  $a \gg b > c$ , другий є циліндром висотою  $a$  та радіусом  $r$ ,  $a \gg 2r$ . Балка має вміщену у максимумі верхньої частини спицю, розміщену посередині сторони  $a$  і орієнтовану вздовж сторони  $b$ . Ця спиця, з нехтовно малими масою і моментом інерції, праворуч і ліворуч балки закріплена у безтертевих підшипниках, так, що може в них обертатися. На рис. 1 вона показана блакитним пунктиром як вісь  $O$  обертання маятника. Отже балка може коливатися, повертаючись навколо цієї осі як фізичний маятник. Маятники знаходяться в однорідному горизонтальному магнітному полі, яке перпендикулярне до осі  $O$ , отже, і до довгої осі балки у рівновазі маятника при відсутності магнітного поля. На рис. 1 наведені два приклади для маятників, прямокутна пластина і циліндр, бо формально опис станів обох маятників є однаковим незалежно від того чи це прямокутний паралелепіпед, чи циліндр. В експерименті легше виготовити прямокутний паралелепіпед, а для циліндричного маятника краще виконуються умови для однорідності

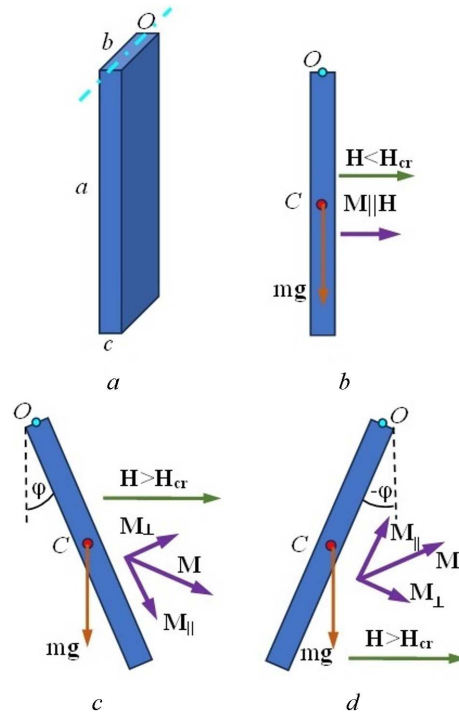


Рис. 1. Зображення маятників, які мають форму циліндра чи прямокутного паралелепіпеда (*a*, *b*); стани маятника в поперечному ( $\mathbf{H} \perp \mathbf{mg}$ ) стаціонарному магнітному полі *b*–*d*,  $O$  позначено вісь обертання,  $C$  – центр мас балки

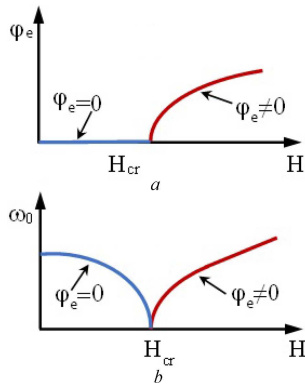
внутрішнього магнітного поля, тому переваг для форми серед цих маятників нема.

Можливі три стани намагніченого маятника:

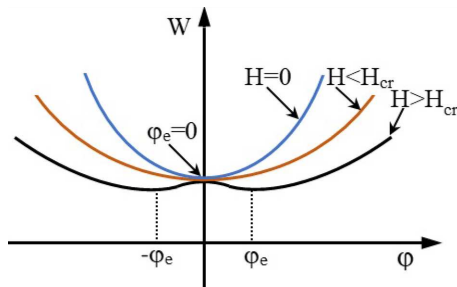
(i) на рис. 1, *b* маятник не відхилений від вихідного стану з вертикальною орієнтацією балки, сила тяжіння  $mg$ , де  $m$  – маса, а  $g$  – прискорення вільного падіння, яка направлена вздовж осі балки і не створює моменту сили, намагніченість балки направлена вздовж поля,  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$ , векторний добуток  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = 0$ , тому маятник знаходиться в рівновазі;

(ii) на рис. 1, *c* маятник відхилений до поля на кут,  $\varphi \neq 0$ , сила тяжіння направлена під кутом  $\varphi$  до балки, намагніченість  $\mathbf{M}$  неколінеарна з  $\mathbf{H}$ , вона має складові,  $M_{\parallel} = \chi_{\parallel} H \sin \varphi$ ,  $M_{\perp} = \chi_{\perp} H \cos \varphi$ , де  $\chi_{\parallel}$  та  $\chi_{\perp}$  – поздовжня та поперечна складові магнітної сприйнятливості,  $\chi_{\parallel} > \chi_{\perp}$ , бо довга вісь балки є віссю легкого намагнічування;

(iii) на рис. 1, *d* – стан з протилежним поворотом маятника на кут  $(-\varphi)$  та поздовжньою складовою намагніченості  $\mathbf{M}_{\parallel}$ , направленою вгору вздовж балки.



**Рис. 2.** Графік польової залежності кута відхилення  $\varphi_e(H)$  маятника в магнітному полі (а). Польова залежність  $\omega_0(H)$  для власної частоти (б)



**Рис. 3.** Залежність енергії  $W$  від кута  $\varphi$  повороту маятника,  $\varphi_e = 0$  при  $H < H_{cr}$ ,  $\pm\varphi_e \neq 0$  при  $H > H_{cr}$

Енергію маятника можна записати у вигляді

$$W(\varphi, H) = \frac{1}{2}mga(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}\Delta\chi H^2 V \sin^2 \varphi, \quad (1)$$

де  $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ ,  $V = abc$  або  $V = \pi r^2 a$  – об’єм балки. Енергія  $W(\varphi, H)$  є парною функцією по  $H$  та  $\varphi$ , стани (ii) та (iii) мають однакову енергію, поворот та намагнічування на рис. 1, с є рівноможливим з поворотом та намагнічуванням на рис. 1, d.

Умова рівноваги визначається з рівняння

$$\frac{dW(\varphi, H)}{d\varphi} = \frac{V}{2} \sin \varphi (\rho ga - 2\Delta\chi H^2 \cos \varphi) = 0, \quad (2)$$

де  $\rho$  – густина речовини балки. Рівняння (2) задовольняє умову механічної рівноваги, момент сили тяжіння скомпенсований моментом сил, що діє на балку завдяки її намагнічуванню.

З (2) маємо два розв’язки. Для першого розв’язку  $\sin \varphi = 0$ , якому відповідає рівноважний стан маятника з  $\varphi_e = 0$ , коли балка не відхилена. Другий розв’язок відповідає рівноважному стану, в

якому балка відхилена,  $\varphi_e \neq 0$ ,

$$\cos \varphi_e = \rho ga / 2\Delta\chi H^2. \quad (3)$$

Другий розв’язок виконується, коли поле стає більшим за критичне

$$H > H_{cr} = \sqrt{\frac{\rho ga}{2\Delta\chi}}. \quad (4)$$

Залежність кута повороту  $\varphi_e(H)$  від поля наведена на рис. 2, вона має критичний характер в околі порогового поля, коли  $H > H_{cr}$  та  $H/H_{cr} \rightarrow 1$ , то

$$\varphi_e \approx \sqrt{2(H/H_{cr} - 1)}.$$

Коли  $H < H_{cr}$ , балка маятника знаходиться у високосиметричному магнітному стані з намагніченістю, направленою вздовж важкої осі балки, поздовжня намагніченість відсутня,  $M_{\parallel} = 0$ . Коли  $H > H_{cr}$  балка маятника без зміни форми відхиляється полем у один з двох можливих мінімумів енергії (див. рис. 3), котрі виникають завдяки спонтанному виникненню поздовжньої складової намагніченості в балці, в ній відбувається орієнтаційний магнітний фазовий перехід з високосиметричного стану, до низькосиметричного.

В полі  $H > H_{cr}$  при  $H \rightarrow H_{cr}$  польова залежність  $M_{\parallel}$  в околі порогового поля має критичний індекс 1/2

$$M_{\parallel} = \chi_{\parallel} H \sin \varphi_e = \pm \chi_{\parallel} H \sqrt{1 - \frac{H_{cr}^2}{H^2}} \approx \pm \chi_{\parallel} \sqrt{2H_{cr}} \sqrt{H - H_{cr}}. \quad (5)$$

Похідна поздовжньої складової намагніченості балки в критичній точці дорівнює нескінченності  $(dM_{\parallel}/dH)_{H=H_{cr}} = \pm\infty$ , що відповідає критичній поведінці намагніченості при орієнтаційному магнітному фазовому переході.

На відміну від орієнтаційного магнітного фазового переходу в магнітному полі, направленому перпендикулярно до легкої осі одновісного феромагнетика, коли поле індукує перехід з низькосиметричного магнітного стану до високосиметричного магнітного стану, в маятнику відбувається зворотний процес, поперечне магнітне поле індукує орієнтаційний магнітний фазовий перехід з високосиметричного магнітного стану до низькосиметричного магнітного стану.

### 3. Власна частота коливань балки

Власна частота  $\omega_0$  маятника визначається з відношення  $\omega_0^2 = k/I$ , де  $I$  – момент інерції балки,  $I = ma^2/3$ ,  $k$  – коефіцієнт жорсткості коливальної системи, який дорівнює другій похідній енергії (1) в положенні рівноваги  $k = \left. \frac{d^2W}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_e}$ .

В полі  $H < H_{cr}$  в стані з  $\varphi_e = 0$  величина коефіцієнта  $k$  залежить від магнітного поля:

$$k = \left. \frac{d^2W}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \frac{1}{2}mga - \Delta\chi H^2 V. \quad (6)$$

Якщо маятник відхилений, то величина коефіцієнта  $k$  визначається переважно дією сили тяжіння, магнітне поле зменшує величину коефіцієнта  $k$ .

Власна частота коливань маятника в поперечному стаціонарному полі, меншому за порогове  $H < H_{cr}$ , визначається з виразу

$$\begin{aligned} \omega_0(H < H_{cr}) &= \sqrt{\frac{3g}{2a} \left(1 - \frac{H^2}{H_{cr}^2}\right)} = \\ &= \omega_0(H = 0) \sqrt{1 - \frac{H^2}{H_{cr}^2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\omega_0^2(H = 0) = \frac{3g}{2a}$  – квадрат власної частоти за відсутності поля.

Власна частота (7) зменшується у магнітному полі, вона стає рівною нулю в критичній точці  $H = H_{cr}$  (див. рис. 2, b). Величина похідної власної частоти (7) в критичній точці прямує до нескінченності,  $(d\omega_0/dH)_{H=H_{cr}} \rightarrow -\infty$ .

В  $H > H_{cr}$  польова залежність коефіцієнта  $k$  змінюється

$$\begin{aligned} k &= \left. \frac{d^2W}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_e \neq 0} = \Delta\chi V H^2 - \frac{m^2 g^2 a^2}{4\Delta\chi V H^2} = \\ &= \Delta\chi V H^2 \left(1 - \frac{H_{cr}^4}{H^4}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Для відхиленого маятника, коли поле стає більше за порогове, при визначенні стійкості магнітне поле відіграє переважну роль порівняно з тяжінням.

Користуючись (8), знайдемо вираз для власної частоти при  $H > H_{cr}$

$$\omega_0(H > H_{cr}) = \sqrt{\frac{3\Delta\chi H^2}{\rho a^2} \left(1 - \frac{H_{cr}^4}{H^4}\right)}. \quad (9)$$

Власна частота (9) маятника прямує до нуля в критичній точці, а її похідна в цій точці прямує до нескінченності.

При  $H \gg H_{cr}$  власна частота зростає прямо пропорційно величині магнітного поля (див. рис. 2, b). Це відбувається в результаті намагнічування балки і її повороту. При зростанні  $H$  маятник повертається до поля, зростає  $M_{\parallel}$  складова намагніченості балки, тобто зростає величина вектора  $\mathbf{M}$ , і він більше нахилений до осі балки, яка є віссю легкого намагнічування, що призводить до зростання величини  $k$ .

### 4. Збудження коливань змінним магнітним полем

Нехай на балку маятника додатково до стаціонарного поля  $\mathbf{H}$  діє змінне періодичне магнітне поле  $\mathbf{h}$ , колінеарне до стаціонарного  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{h}$ , яке має амплітуду  $h_a$  та частоту  $\omega$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_a e^{i\omega t}$ . Вплив змінного поля залежить від стану балки. Якщо балка маятника не відхилена стаціонарним полем і намагнічена вздовж поля,  $H < H_{cr}$ , то змінна складова магнітного поля може збуджувати коливання тільки завдяки польовій залежності власної частоти, тобто завдяки параметричному резонансу. У відхиленому стані, коли стаціонарна складова поля більша за порогове значення,  $H > H_{cr}$ , намагніченість не колінеарна з вектором напруженості магнітного поля, то змінна складова поля буде індукувати вимушені коливання.

#### 4.1. Вимушені коливання

Розкладемо енергію (1) в ряд по малому зміщенню для кута повороту  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_e$ , де  $\varphi_e$  – кут повороту спричинений стаціонарною складовою поля, та для малого приросту поля  $\Delta H$

$$\begin{aligned} W(\varphi, H) &= \frac{1}{2}mga(1 - \cos \varphi_e) - \\ &- \frac{1}{2}\Delta\chi H^2 V \sin^2 \varphi_e + \\ &+ \left. \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right|_{H, \varphi_e} \Delta\varphi + \left. \frac{\partial W}{\partial H} \right|_{H, \varphi_e} \Delta H + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right|_{H, \varphi_e} (\Delta\varphi)^2 + \left. \frac{\partial W}{\partial \varphi \partial H} \right|_{H, \varphi_e} \Delta\varphi \Delta H + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial H^2} \right|_{H, \varphi_e} (\Delta H)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Врахуємо, що в рівновазі виконується рівняння (2), друга похідна по куту дорівнює коефіцієнту  $k$ . Далі будемо вважати, що  $\Delta H \ll H$ , та знехтуємо останнім доданком в (10). Припустимо також, що  $\Delta H = h_a e^{i\omega t}$ , де  $h_a$  – амплітудне значення змінного поля. За цих наближень отримаємо, що коли стаціонарна складова більша порога,  $H > H_{cr}$ , то в лінійному наближенні при малих величинах збудження кута повороту маятника, індукованого змінним магнітним полем, на маятник будуть діяти два моменти сил, один з яких пропорційний величині зміщення  $N_\varphi = -\Delta\chi V H^2 \left(1 - \frac{H_{cr}^4}{H^4}\right) \Delta\varphi = -k\Delta\varphi$  і протилежний до зміщення, а другий є вимушуючим моментом сили  $N_h = \Delta\chi V H \sin 2\varphi_e h_a e^{i\omega t}$ .

Диференціальне рівняння вимушених коливань [6, 29] балки при  $H > H_{cr}$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} + \omega_0^2(H > H_{cr})\Delta\varphi = \\ = \Delta\chi \frac{V}{I} H \sin 2\varphi_e h_a e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (11)$$

З (11) знаходимо, що амплітуда вимушених коливань, індукованих магнітним полем, може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{\max} = \frac{V}{I} \frac{\Delta\chi H \sin 2\varphi_e}{\omega_0^2(H > H_{cr}) - \omega^2} h_a = \\ = \frac{2\Delta\chi \frac{3}{\rho a^2} \frac{H_{cr}^2}{H} \sqrt{1 - \frac{H_{cr}^4}{H^4}}}{\frac{3\Delta\chi H^2}{\rho a^2} \left(1 - \frac{H_{cr}^4}{H^4}\right) - \omega^2} h_a. \end{aligned} \quad (12)$$

З (12) видно, що амплітуда вимушених механічних коливань маятника залежить від стаціонарної складової поля, бо власна частота залежить від поля. Слід враховувати, що чисельник в (12) також залежить від величини  $H$ .

#### 4.2. Параметричний резонанс

Якщо балка маятника не відхилена стаціонарним полем,  $\varphi_e = 0$ , то не буде вимушених коливань, індукованих малим змінним полем, паралельним стаціонарному полю, бо  $N_h = 0$ , для такої орієнтації балки її намагніченість паралельна до поля. Але маємо врахувати, що при  $H < H_{cr}$  власна частота коливань маятника залежить від величини

прикладеного магнітного поля. Якщо крім стаціонарного, діє ще й змінне магнітне поле, яке представимо у вигляді  $h = h_a \cos \omega t$ , то при  $\varphi_e = 0$  вираз для власної частоти коливань маятника можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_0^2 = \omega_0^2(H = 0) \left(1 - \frac{(H + h_a \cos \omega t)^2}{H_{cr}^2}\right) \approx \\ \approx \omega_0^2(H = 0) \left(1 - \frac{H^2 + 2Hh_a \cos \omega t}{H_{cr}^2}\right) = \\ = \omega_0^2(H = 0) \left(1 - \frac{H^2}{H_{cr}^2} - \frac{2Hh_a \cos \omega t}{H_{cr}^2}\right) = \\ = \omega_0^2(H) \left(1 - \frac{2Hh_a}{H_{cr}^2 - H^2} \cos \omega t\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо вираз (13) підставити у рівняння власних коливань маятника, то отримаємо рівняння Мат'є [29]:

$$\frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} + \omega_0^2(H)(1 - \delta \cos \omega t)\Delta\varphi = 0, \quad (14)$$

де  $\delta$  – параметр,  $\delta = 2h_a H / (H_{cr}^2 - H^2)$ . В (14) враховано, що при  $\varphi_e = 0$  виконується рівність  $\Delta\varphi_e = 0$ .

З (14) маємо, що при  $h_a \ll H$  може спостерігатися ефект параметричного резонансу. Основна частота, на якій спостерігатиметься параметричний резонанс має бути вдвічі більшою власної частоти,  $\omega \approx 2\omega_0(H)$  [29].

Коли  $H = 0$ , величина параметра  $\delta$  в рівнянні Мат'є буде пропорційною квадрату амплітуди змінного магнітного поля  $\delta \sim h_a^2$ , а основна резонансна частота буде рівною  $\omega \approx \omega_0(H)$ .

Зауважимо, що частотні особливості поведінки магнітного маятника розглянуті в наближенні малих зміщень.

#### 5. Висновки

Здійснено опис стійкості фізичного маятника, виготовленого з магнітом якого феромагнетика в поперечному магнітному полі. Показано, що коли намагніченість маятника не колінеарна магнітному полю, то момент сил, спричинений магнітним полем, змінює рівновагу маятника. Коли намагніченість колінеарна магнітному полю рівновага маятника не порушується, але змінюється жорсткість коливальної системи, її величина зменшується при

зростанні величини магнітного поля. Під дією стаціонарного магнітного поля відбувається зміна положення рівноваги маятника, якщо магнітне поле стає за величиною більше порогового значення. Пороговий характер зміни положення рівноваги маятника зумовлений орієнтаційним магнітним фазовим переходом у феромагнетику маятника. В критичній точці відбувається фазовий перехід від високосиметричного магнітного стану до низькосиметричного магнітного стану.

Мале змінне магнітне поле, додане до постійного, індукує вимушені механічні коливання маятника, коли стала складова поля перевершує величину критичного поля. Якщо стало поле менше критичного, то змінна складова магнітного поля не індукує вимувених механічних коливань маятника. Але, якщо поле менше порогового, то можливий ефект індукування змінним магнітним полем параметричного резонансу для механічних коливань маятника. Для коливань зі скінченими (не малими) величинами зміщення маємо очікувати нові ефекти поведінки магнітного маятника як сильно нелінійної системи.

Як відзначалося у вступі ефект втрати стійкості маятника в магнітному полі схожий на індукований магнітним полем критичний поворот магнітної частинки в матриці еластомера. В роботі [26] також здійснено опис збурення вимувених механічних коливань частинки під дією змінного магнітного поля, проте ефект параметричного резонансу в цій роботі не аналізувався. Виходячи з результатів нашого дослідження, слід припустити, що для частинки в матриці еластомера також можливий параметричний резонанс для її механічних коливань, індукований змінним магнітним полем.

1. T. Boeck, S.L. Sanjari, T. Becker. Parametric instability of a magnetic pendulum in the presence of a vibrating conducting plate. *Nonlinear Dyn.* **102**, 2039 (2020).
2. K. Polczynski, S. Skurativskiy, M. Bednarek, J. Awrejcewicz. Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus. *Mech. Syst. Signal. Pr.* **154**, 107560 (2021).
3. V. Tran, E. Brost, M. Johnston, J. Jalkio. Predicting the behavior of a chaotic pendulum with a variable interaction potential. *Chaos* **23**, 033103 (2013).
4. M. Wojna, A. Wijata, G. Wasilewski, J. Awrejcewicz. Numerical and experimental study of a double physical pendulum with magnetic interaction. *J. Sound Vib.* **430**, 214 (2018).
5. B. Nana, K. Polczynski, P. Woaf, J. Awrejcewicz, G. Wasilewski. Analysis of the nonlinear dynamics of a single pendulum driven by a magnetic field using the magnetic charges interaction model and the experimentally fitted interaction model. *Mech. Syst. Signal. Pr.* **209**, 111114 (2024).
6. A. Siahmakoun, V.A. French, J. Patterson. Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field. *Am. J. Phys.* **65**, 393 (1997).
7. A. Wijata, K. Polczynski, J. Awrejcewicz. Theoretical and numerical analysis of regular one-side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field. *Mech. Syst. Signal. Pr.* **150**, 107229 (2021).
8. Y. Uzun, E. Kurt, H.H. Kurt. Explorations of displacement and velocity nonlinearities and their effects to power of a magnetically-excited piezoelectric pendulum. *Sens. Actuators A* **224**, 119 (2015).
9. M.I. Gonzalez, A. Bol. Controlled damping of a physical pendulum: Experiments near critical conditions. *Eur. J. Phys.* **27**, 257 (2006).
10. H. Horner, C.M. Varma. Nature of spin-reorientation transitions. *Phys. Rev. Lett.* **20**, 845 (1968).
11. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, 1984) [ISBN: 9780080091051].
12. E.C. Stoner, E.P. Wohlfarth. A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys. *Philos. Trans. R. Soc. London* **240**, 599 (1948).
13. H. Thomas. Phase Transitions in a Uniaxial Ferromagnet. *Phys. Rev.* **187**, 630 (1969).
14. V.M. Kalita, I.M. Ivanova, V.M. Loktev. Quantum effects of magnetization of an easy-axis ferromagnet with  $S = 1$ . *Theor. Math. Phys.* **173**, 1620 (2012).
15. C. Kittel. Ferromagnetic resonance. *J. Phys. Radium* **12** (3), 291 (1951).
16. J.-M. Beaujour, D. Ravelosona, I. Tudosa, E. Fullerton, A.D. Kent. Ferromagnetic resonance linewidth in ultrathin films with perpendicular magnetic anisotropy. *Phys. Rev. B* **80**, 180415 (2009).
17. E. Mancini, F. Pressacco, M. Haertinger, E.E. Fullerton, T. Suzuki, G. Woltersdorf, C.H. Back. Magnetic phase transition in iron-rhodium thin films probed by ferromagnetic resonance. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **46**, 245302 (2013).
18. C. Bihler, H. Huebl, M.S. Brandt, S.T. Goennenwein, M. Reinwald, U. Wurstbauer, M. Doppe, D. Weiss, W. Wegscheider. Magnetic anisotropy of  $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$  thin films on GaAs (311)A probed by ferromagnetic resonance. *Appl. Phys. Lett.* **89**, 012507 (2006).
19. F.C. Moon, Y.-H. Pao. Magnetorheological effect in elastomers containing uniaxial ferromagnetic particles. *J. Appl. Mech.* **35**, 53 (1968).
20. K. Yu, N.X. Fang, G. Huang, Q. Wang. Magnetoactive acoustic metamaterials. *Adv. Mater.* **30**, 1706348 (2018).
21. M. Schrodner, G. Pflug. Magnetomechanical properties of composites and fibers made from thermoplastic elastomers (TPE) and carbonyl iron powder (CIP). *J. Magn. Magn. Mater.* **454**, 258 (2018).

22. Y. Liu, S. Chen, X. Tan, C. Cao. A finite element framework for magneto-actuated large deformation and instability of slender magneto-active elastomers. *Int. J. Appl. Mech.* **12**, 2050013 (2020).
23. Y.L. Raikher, O.V. Stolbov, G.V. Stepanov. Shape instability of a magnetic elastomer membrane. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **41**, 152002 (2008).
24. F. Gerbal, Y. Wang, F. Lyonnet, J.-C. Bacri. A refined theory of magnetoelastic buckling matches experiments with ferromagnetic and superparamagnetic rods. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **112**, 7135 (2015).
25. V.M. Kalita, Y.I. Dzhezherya, S.V. Cherepov, Y.B. Skirta, A.V. Bodnaruk, G.G. Levchenko. *Smart Mater. Struct.* **30**, 025020 (2021).
26. V.M. Kalita, Yu.I. Dzhezherya, S.V. Cherepov, Yu.B. Skirta, A.V. Bodnaruk, S.M. Ryabchenko. Spontaneous change of symmetry in a magnetoactive elastomer beam at its critical bending induced by a magnetic field, *Smart Mater. Struct.* **32**, 045002 (2023).
27. V.M. Kalita, Y.I. Dzhezherya, G.G. Levchenko. The loss of mechanical stability and the critical magnetization of a ferromagnetic particle in an elastomer. *Soft Matter.* **15**, 5987 (2019).
28. V.M. Kalita, I.M. Ivanova, V.M. Loktev. Magnetorheological effect in elastomers containing uniaxial ferromagnetic particles. *Condensed Matter Physics* **23**, 23608(2020).
29. A.H. Nayfeh, D.T. Mook. *Nonlinear oscillations* (John Wiley & sons, 1979) [ISBN: 9780471035558].

Одержано 05.07.24

*V.M. Kalita, S.O. Reshetniak, S.M. Ryabchenko*

INSTABILITY AND DISTURBANCE  
OF FERROMAGNETIC PENDULUM OSCILLATIONS  
AT MAGNETIC-ORIENTATION PHASE  
TRANSITION INDUCED BY MAGNETIC FIELD

Nonlinear effects of magnetization and magnetic phase transition on the stability and dynamics of a pendulum made of soft-magnetic ferromagnet have been considered. The pendulum is a beam, with its longitudinal dimension being much larger than the transverse dimensions. It has been shown that the magnetization of the pendulum affects its stability and can lead to a critical change in the pendulum equilibrium state in a magnetic field directed perpendicularly (transversely) to the pendulum. The oscillating system loses its rigidity in the critical field, and the eigenfrequency of mechanical pendulum oscillations tends to zero. The critical character of the influence of the magnetic field on the pendulum occurs due to the magnetic-field-induced orientational magnetic phase transition in the ferromagnetic material of the pendulum, which is accompanied by a change in its magnetic state symmetry. An alternating magnetic field together with a stationary magnetic field induces forced mechanical oscillations of the pendulum if the stationary field strength is larger than a threshold value. If the stationary field is less than the critical one, the alternating magnetic field can cause the parametric resonance of the mechanical oscillations of the pendulum.

*Keywords:* magnetic pendulum, eigenfrequency, orientational magnetic phase transition, parametric resonance, forced oscillations.