Х.К. НГУЄН,[1] Б. ШОВІНО[2]

[1] Кафедра фізики, Університет Бабеш-Бойяї
(Клуж-Напока 400084, Румунія;
ORCID: 0000-0003-2343-0508; e-mail: hoang.nguyen@ubbcluj.ro)

[2] Університет Лазурного берега, Обсерваторія Лазурного берега, CNRS,
Лабораторія Лангранжа
(Ніцца седекс 4, Франція; e-mail: bertrand.chauvineau@oca.eu)

УДК 539

ПОРУШЕННЯ γ В ҐРАВІТАЦІЇ БРАНСА–ДІККЕ [1]

Розв'язок Бранса класу I у ґравітації Бранса–Дікке (БД) є основним у вивченні ґравітаційних теорій за межами загальної теорії відносності. Відкритий у 1961 році, цей розв'язок відображає зовнішній вакуум сферичної зірки Бранса–Дікке і характеризується двома підгоночними параметрами. Дивно, але зв'язок між цими параметрами і властивостями зірки не був точно встановлений. В даній роботі ми заповнюємо цю прогалину, виводячи повний зовнішній розв'язок Бранса класу I, виражений через загальну енергію і загальний тиск сферично симетричного джерела ґравітації. Розв'язок дозволяє точно вивести всі постньютонівські параметри ґравітації Бранса–Дікке для віддалених областей поля сферичного джерела. Зокрема, для параметра γ замість традиційного результату $\gamma_{\mathrm{PPN}} = \frac{\omega+1}{\omega+2}$ ми отримуємо аналітичний вираз $\gamma_{\mathrm{exact}} = \frac{\omega+1+(\omega+2)\,\Theta}{\omega+2+(\omega+1)\,\Theta}$, де Θ є відношенням загального тиску $P_\parallel^* + 2P_\perp^*$ до повної енергії E^*, що міститься в джерелі маси. Наша непертурбативна формула для γ дійсна для всіх напруженостей полів і типів матерії, що входять до складу джерела маси. Отже, спостережувані обмеження на γ таким чином встановлюють спільні обмеження на ω і Θ, причому останній представляє загальну характеристику джерела маси. У більш широкому сенсі наша формула підкреслює важливість тиску (коли $\Theta \neq 0$)) у сферичних зірках Бранса–Дікке і, можливо, у зірках в межах інших модифікованих теорій ґравітації.

Ключові слова: ґравітація Бранса–Дікке, стаціонарний сферично симетричний розв'язок, тензор енергії-імпульсу.

1. Вступ

Ґравітація Бранса–Дікке є другою за вивченістю теорією ґравітації після загальної теорії відносності (ЗТВ). Вона являє собою одне з найпростіших розширень теорії ґравітації за межами ЗТВ [1]. Вона характеризується додатковим динамічним скалярним полем ϕ, яке, згідно з початковим баченням Бранса і Дікке в 1961 році, діє як обернена змінна "константа" Ньютона G. Скалярне поле має кінетичний член, який залежить від параметра (Бранса–Дікке) ω у ґравітаційній дії:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big[\Phi\,\mathcal{R} - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\Big]. \tag{1}$$

У границі нескінченного значення для ω, кінетичний член зазвичай називають "замороженим", що робить Φ всюди постійною величиною. У цій границі, якщо поле Φ наближається до свого (ненульового) постійного значення зі швидкістю порядка $\mathcal{O}(1/\omega)$, член $\frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$ буде наближатися до нуля зі швидкістю порядка $\mathcal{O}(1/\omega)$ і, отже, ним можна нехтувати порівняно з членом $\Phi\,\mathcal{R}$, що приводить до ефективного відновлення класичної дії Ейнштейна–Гільберта [2].

Разом з викладом своєї теорії [1] Бранс також визначив чотири класи точних розв'язків у стати-

Цитування: Нгуєн Х.К., Шовіно Б. Порушення γ в ґравітації Бранса–Дікке. *Укр. фіз. журн.* **69**, №6, 479 (2024).
Citation: Nguyen H.K., Chauvineau B. Violation of γ in Brans–Dicke gravity. *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 7, 478 (2024). https://doi.org/10.15407/ujpe69.7.478.

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XII Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2024): Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics".

[2] Було показано, що для нестаціонарного випадку і/або за наявності сингулярності, швидкість збіжності становить $\mathcal{O}(1/\sqrt{\omega})$. Однак це питання виходить за рамки даної роботи, оскільки ми розглянемо тут лише стаціонарний і регулярний випадок. Для отримання додаткової інформації ми відсилаємо читача до нашої нещодавньої роботи [3], де ми також оглядали літературу про аномалію $\mathcal{O}(1/\sqrt{\omega})$.

чній сферично-симетричній задачі [2]. Отримання розв'язків Бранса було здійснено в яному вигляді Бронніковим у 1973 році [4]. Проте з чотирьох класів фізично значущим є лише клас I Бранса. Він може відновити розв'язок Шварцшильда в його просторі параметрів.

Для порівняння зі спостереженнями або експериментами Бранс вивів постньютонівські (PN) параметри Робертсона (або Едінгтона–Робертсона–Шиффа) на основі свого розв'язку класу I:

$$\beta_{\mathrm{PPN}} = 1, \tag{2}$$

$$\gamma_{\mathrm{PPN}} = \frac{\omega+1}{\omega+2}. \tag{3}$$

Параметр γ важливий, оскільки він визначає величину просторової кривини, створюваної тілом у стані спокою, і може бути безпосередньо виміряний через детектування відхилення світла і часову затримку сигналу (ефект Шапіро). Параметризована постньютонівська (PPN) формула γ відновлює результат загальної теорії відносності $\gamma_{\mathrm{GR}} = 1$, відомий для ЗТВ у границі нескінченного ω, в якій скалярне поле БД стає постійним всюди. Сучасні обмеження, отримані з використанням спостережень в межах Сонячної системи, для величини ω означають, що цей параметр перевищує 40,000 [6].

Слід підкреслити, що "традиційні" результати (2) і (3) були отримані *в припущенні нульового тиску в джерелі сили тяжіння.* Слід зазначити, що ці формули також можна вивести безпосередньо з PPN формалізму для дії Бранса–Дікке, не вдаючись до розв'язку Бранса класу I [5, 7]. Виведення в рамках PPN спирається на два важливі наближення: (i) слабке поле і (ii) повільні рухи. Стосовно останнього наближення, часто недооцінюється те, що не тільки зірки повинні рухатися повільно, але й мікроскопічні компоненти, які складають зірки, також повинні бути повільними. Це означає, що речовина всередині зірок повинна мати низький тиск, що характерно для "ньютонівських" зірок.

Мета нашої роботи двояка. По-перше, аналітична форма для зовнішнього вакууму містить два параметра, які потрібно задавати. Питання визначення їх за функціями розподілу енергії і тиску всередині джерела маси не було чітко описано в літературі. Встановлення їхнього зв'язку із джерелом маси, як правило, потребує використання повного формалізму рівнянь Толмена–Оппенгеймера–Волкова (ТОВ), адаптованих до ґравітації Бранса–Дікке [8]. Більше того, розв'язування рівнянь ТОВ, навіть у більш простій теорії ЗТВ, зазвичай потребує чисельних методів, за винятком кількох окремих, нереалістичних випадків, таких як нестисливі рідини. Тому, на перший погляд, отримати конкретні вирази для цих залежностей може здатися нереальним. Дивно, але, як ми покажемо в цій статті, такий погляд є надто песимістичним. Виявляється, повний формалізм рівнянь ТОВ не потрібен. Натомість знадобиться лише підсистема, яка містить рівняння поля і скалярне рівняння БД. Це пояснюється тим, що для фіксації двох вільних параметрів зовнішнього вакууму потрібні лише два рівняння. Ми представимо строге, але коротке виведення, яке стало доступним лише завдяки нашій недавній публікації [9].

По-друге, повний розв'язок дозволяє отримати *будь-які* постньютоновскі параметри, застосовні для далеких областей поля в стаціонарних сферичних зірках Бранса–Дікке. Як ми покажемо в цій роботі, виведення є *непертурбативним* і *не потребує двох наближень PPN*, які вимагають слабкого поля та низького тиску, згаданих вище.

Результати, представлені у цій публікації, були отримані під час підготовки наших двох останніх робіт [9, 10]. Для більш детального ознайомлення з концепцією і технічними моментами ми відсилаємо читача до цих робіт.

2. Рівняння поля та тензор енергії-імпульсу

Добре відомо [4], що при відображенні Вейля $\left\{\tilde{g}_{\mu\nu} := \Phi\, g_{\mu\nu},\ \tilde{\Phi} := \ln\Phi\right\}$, ґравітаційний сектор дії БД можна привести до системи Ейнштейна як $\int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi}\left[\tilde{\mathcal{R}} - (\omega+3/2)\,\tilde{\nabla}^{\mu}\tilde{\Phi}\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\Phi}\right]$. Скалярне поле БД в системі Ейнштейна $\tilde{\Phi}$ має кінетичний член зі знаком, який визначається як $(\omega+3/2)$. Якщо не зазначено інше, ми далі обмежимо наш розгляд нормальним ("нефантомним") випадком $\omega > -3/2$, де кінетична енергія для $\tilde{\Phi}$ є позитивною.

Рівняння поля є такими:

$$R_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\Phi^2}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{\Phi}\partial_\mu\partial_\nu\Phi + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\partial_\lambda\ln\Phi =$$

$$= \frac{8\pi}{\Phi}\left(T_{\mu\nu} - \frac{\omega+1}{2\omega+3}T\,g_{\mu\nu}\right), \tag{4}$$

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right) = \frac{8\pi}{2\omega+3}T\sqrt{-g}. \tag{5}$$

В ізотропній системі координат, яка є статичною і сферично симетричною, метрику можна записати у вигляді:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]. \tag{6}$$

Можна безпосередньо перевірити з рівнянь (4)–(6), що найзагальніша форма тензора енергії-імпульсу у цьому підході є такою:

$$T_\mu^\nu = \mathrm{diag}\big(-\epsilon,\, p_\parallel,\, p_\perp,\, p_\perp\big), \tag{7}$$

де густина енергії ϵ, радіальний тиск $p_\parallel$ і тангенціальний тиск $p_\perp$ є функціями r. Зауважте, що тензор енергії-імпульсу є анізотропним, якщо $p_\parallel \neq p_\perp$. Його слід має вигляд:

$$T = -\epsilon + p_\parallel + 2p_\perp. \tag{8}$$

3. Вакуумний розв'язок Бранса класу I за межами зірки

Відомо, що скалярна метрика для вакууму є розв'язком Бранса класу I (який задовольняє рівнянням (5)–(4) для $T_{\mu\nu} = 0$) [2]. В ізотропній системі координат (6) розв'язок має вигляд [2]:

$$\begin{cases} A = \left(\dfrac{r-k}{r+k}\right)^{\frac{2}{\lambda}}, \\ B = \left(1+\dfrac{k}{r}\right)^4\left(\dfrac{r-k}{r+k}\right)^{2-2\frac{\Lambda+1}{\lambda}}, \qquad \text{для } r \geqslant r_*, \\ \Phi = \left(\dfrac{r-k}{r+k}\right)^{\frac{\Lambda}{\lambda}} \end{cases} \tag{9}$$

де r_* – радіус зірки, і

$$\lambda^2 = (\Lambda+1)^2 - \Lambda\left(1 - \frac{\Lambda}{2}\omega\right). \tag{10}$$

Оскільки λ і Λ пов'язані за допомогою (10), цей розв'язок включає два незалежні параметри, в якості яких можна вибрати $(k,\, \Lambda)$.

4. Рівняння поля у внутрішній області

Для області $r \leqslant r_*$, підставляючи метрику (6) і поле БД $\Phi(r)$ у рівняння (5) і 00-*компоненту* рівняння (4), і використовуючи тензор енергії-імпульсу в рівнянні (7), отримаємо для функцій $A(r)$, $B(r)$, $\Phi(r)$ два звичайні диференційні рівняння:

$$\left(r^2\sqrt{AB}\Phi'\right)' = \frac{8\pi}{2\omega+3}\Big[-\epsilon + p_\parallel + 2p_\perp\Big] r^2\sqrt{AB^3}, \tag{11}$$

$$\left(r^2\Phi\sqrt{\frac{B}{A}}A'\right)' = 16\pi\Big[\epsilon + \frac{\omega+1}{2\omega+3}\big(-\epsilon + p_\parallel + 2p_\perp\big)\Big] r^2\sqrt{AB^3}. \tag{12}$$

Перевага цих рівнянь полягає в тому, що в лівій частині у них стоять точні похідні. Проінтегруємо рівняння (11) і (12) від центра зірки, а саме $r = 0$, до координати $r > r_*$. Тоді функції (A, B, Φ) задані (9) у r. Для $r > r_*$ члени $r^2\sqrt{AB}\Phi'$ і $r^2\Phi\sqrt{\frac{B}{A}}A'$, які входять до лівих частин (11) і (12), не залежать від r, оскільки праві частини цих рівнянь дорівнюють нулю у *зовнішньому* вакуумі. З іншого боку, вимога регулярності всередині зірки накладає умову $\Phi'(0) = A'(0) = 0$ (тобто відсутність конічної сингулярності) і скінченні значення самих полів. Розрахунок дає

$$\frac{k\,\Lambda}{\lambda} = \frac{4\pi}{2\omega+3}\int\limits_0^{r_*} dr\, r^2\sqrt{AB^3}\Big[-\epsilon + p_\parallel + 2p_\perp\Big], \tag{13}$$

та

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{4\pi}{2\omega+3}\int\limits_0^{r_*} dr\, r^2\sqrt{AB^3}\times \times\Big[(\omega+2)\epsilon + (\omega+1)\big(p_\parallel + 2p_\perp\big)\Big]. \tag{14}$$

Зауважимо, що $r^2\sqrt{AB^3}$ є квадратним коренем із визначника метрики з точністю до члена $\sin\theta$. (Відповідно, інтеграли в правих частинах рівнянь (13) і (14) є інваріантними відносно радіальних перетворень координат, оскільки комбінація $r^2\sqrt{AB^3}\sin\theta$ еквівалентна $\sqrt{-g}$.) Тоді ми можемо визначити інтеграли енергії і тисків:

$$E^* = 4\pi\int\limits_0^{r_*} dr\, r^2\sqrt{AB^3}\,\epsilon, \tag{15}$$

$$P_\parallel^* = 4\pi\int\limits_0^{r_*} dr\, r^2\sqrt{AB^3}\,p_\parallel, \tag{16}$$

$$P_\perp^* = 4\pi\int\limits_0^{r_*} dr\, r^2\sqrt{AB^3}\,p_\perp. \tag{17}$$

Підставляючи в (13) і (14), отримуємо

$$\frac{k}{\lambda} = E^*\left[\frac{\omega+2}{2\omega+3} + \frac{\omega+1}{2\omega+3}\,\Theta\right], \tag{18}$$

та

$$\Lambda = \frac{\Theta - 1}{\omega + 2 + (\omega+1)\,\Theta}, \tag{19}$$

де безрозмірний параметр Θ визначається як

$$\Theta := \frac{P^*_\parallel + 2\,P^*_\perp}{E^*}. \tag{20}$$

Разом із (9) і (10) ці співвідношення дають повний вираз для зовнішнього простору-часу і скалярного поля сферичної зірки Бранса–Дікке. Наскільки нам відомо, цей спосіб не був чітко викладений у літературі до наших останніх робіт [9, 10].

Для ідеальної рідини $p_\parallel = p_\perp \equiv p$, отже $P^*_\parallel = P^*_\perp \equiv P$. Рівняння (10), (13) і (14) повністю визначають зовнішній розв'язок (9), коли відомі інтеграли (15)–(17), причому ці інтеграли фіксуються моделлю внутрішньої структури зірки. Це в явному вигляді визначає рух частинок за межами зірки, як у віддалених, так і в близьких до зірки областях.

5. Пост-ньютонівські параметри (β, γ, δ)

У віддалених просторових областях статичну сферично симетричну метрику в ізотропних координатах можна розкласти як [7]:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\,\frac{M}{r} + 2\beta\,\frac{M^2}{r^2} + ...\right)dt^2 + \left(1 + 2\gamma\,\frac{M}{r} + \frac{3}{2}\delta\,\frac{M^2}{r^2} + ...\right)\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right), \tag{21}$$

де β і γ є параметрами Робертсона (або Едінгтона–Робертсона–Шиффа), тоді як δ є пост-ньютонівським параметром другого порядку (як для світла, так і для планетарних рухів). Можна безпосередньо перевірити, що метрика Шварцшильда дає:

$$\beta_{\rm Schwd} = \gamma_{\rm Schwd} = \delta_{\rm Schwd} = 1. \tag{22}$$

Метрику у (6) можна переписати у формі таких розкладів:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{4}{\lambda}\frac{k}{\rho} + \frac{8}{\lambda^2}\frac{k^2}{r^2} + ...\right)dt^2 + \left(1 + \frac{4}{\lambda}(1+\Lambda)\frac{k}{r} + \frac{2}{\lambda^2}\left(4(1+\Lambda)^2 - \lambda^2\right)\frac{k^2}{r^2} + ...\right) \times \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right). \tag{23}$$

Порівнюючи рівняння (21) із рівнянням (23) і покладаючи

$$M = 2\,\frac{k}{\lambda}, \tag{24}$$

ми отримаємо

$$\beta_{\rm exact} = 1, \tag{25}$$

$$\gamma_{\rm exact} = 1 + \Lambda, \tag{26}$$

$$\delta_{\rm exact} = \frac{1}{3}\left(4(1+\Lambda)^2 - \lambda^2\right), \tag{27}$$

де ми використали індекс "exact" ("точний") для підкреслення результату. Зверніть увагу, що Λ безпосередньо вимірює відхилення параметра γ від одиниці ($\gamma_{\rm GR} = 1$ для ЗТВ). З рівняння (19) випливає, що Λ *залежить як від* ω, *так і від* Θ. Нарешті, ми приходимо до

$$\gamma_{\rm exact} = \frac{\omega + 1 + (\omega+2)\,\Theta}{\omega + 2 + (\omega+1)\,\Theta}, \tag{28}$$

що також можна для зручності переписати як

$$\gamma_{\rm exact} = \frac{\gamma_{\rm PPN} + \Theta}{1 + \gamma_{\rm PPN}\,\Theta}, \tag{29}$$

якщо згадати, що $\gamma_{\rm PPN} = \frac{\omega+1}{\omega+2}$. Наскільки нам відомо, замкнутий вираз (28) для γ був відсутній у літературі до наших останніх робіт [9, 10].

Щодо δ:

$$\delta_{\rm exact} = \frac{1}{\left[\omega + 2 + (\omega+1)\,\Theta\right]^2}\left[\left(\omega^2 + \frac{3}{2}\omega + \frac{1}{3}\right) + \left(2\omega^2 + \frac{19}{3}\omega + \frac{13}{3}\right)\Theta + \left(\omega^2 + \frac{25}{6}\omega + \frac{13}{3}\right)\Theta^2\right]. \tag{30}$$

На рисунку показано контурні графіки $\gamma_{\rm exact}$ і $\delta_{\rm exact}$ як функції $\gamma_{\rm PPN}$ (тобто $\frac{\omega+1}{\omega+2}$) і Θ. Крім того, за допомогою рівнянь (18) і (20), рівняння (24) дає активну ґравітаційну масу

$$M = \frac{2\omega+4}{2\omega+3}\,E^* + \frac{2\omega+2}{2\omega+3}\,\left(P^*_\parallel + 2P^*_\perp\right), \tag{31}$$

де очевидним є внесок тиску в активну ґравітаційну масу [11, 12].

6. Виродження при надвисокому тиску

Для $\Theta \to 1^-$ як γ, так і δ прямують до 1, їхніх значень у випадку ЗТВ. Взагалі кажучи, для $\Theta \to 1^-$, оскільки $\Lambda \to 0$ і $\lambda \to 1$ незалежно від ω (за умови, що $\omega \in (-3/2, +\infty)$), значення k наближається до

$$k \to \frac{\omega+2}{2\omega+3}\, E^* + \frac{\omega+1}{2\omega+3}\, \left(P_\parallel^* + 2P_\perp^*\right). \tag{32}$$

Таким чином, ω-залежність вміщується у k, і розв'язок класу I Бранса вироджується у розв'язок Шварцшильда:

$$\begin{cases} A = \left(\dfrac{r-k}{r+k}\right)^2, \\ B = \left(1 + \dfrac{k}{r}\right)^4, \\ \Phi = 1 \end{cases} \quad \text{для } r \geqslant r_*. \tag{33}$$

Тому ультрарелятивістичні зірки Бранса–Дікке *неможливо відрізнити* від їхніх аналогів у ЗТВ, коли це стосується їх зовнішнього вакууму. Цей факт можна пояснити наступним спостереженням: для ультрарелятивістичної матерії слід тензора енергії-імпульса зникає відповідно до рівняння (8). Тоді скалярне рівняння (5) *всюди* спрощується до $\Box\Phi = 0$. У поєднанні з умовою регулярності в центрі зірки це забезпечує постійність Φ у всьому просторі-часі, який тепер описується розв'язком Шварцшильда. Отже, скалярний ступінь вільності в ґравітації БД подавляється в ультрарелятивістичній границі. Це може бути підказкою про інтригуючу можливість повного відновлення теореми Біркгофа в цій границі.

7. Обговорення

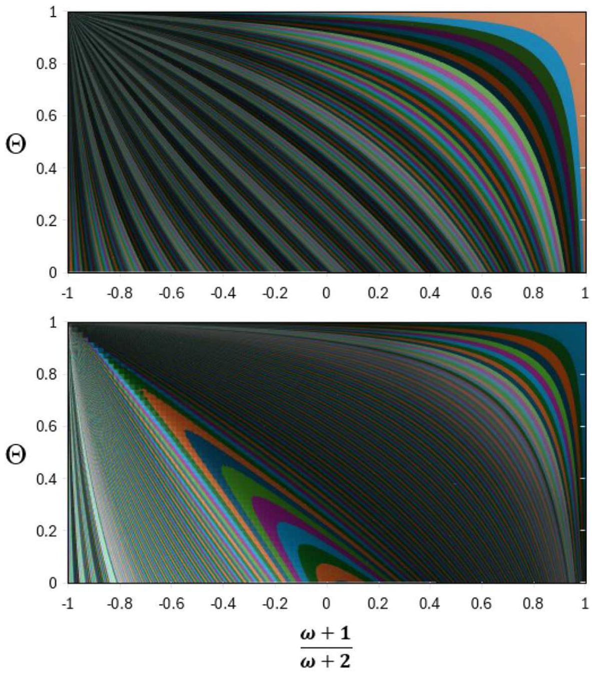
Формули (28) і (30) є основним результатом цієї роботи:

• *Непертурбативний підхід*: наші викладки є непертурбативними за своєю природою. Наш підхід використовує *інтегрованість* 00-компоненти рівняння поля (4) разом із рівнянням скалярного поля (5).

• *Економність підходу*: наш висновок спирається виключно на скалярне рівняння поля і 00-компоненту рівняння поля, без потреби досліджувати повний набір рівнянь, зокрема 11- та 22-компонентну систему рівнянь поля [3]. Додатковими фізичними припущеннями є регулярність у центрі зірки та існування поверхні зірки, що розділяє внутрішню і зовнішню області.

• *Універсальність результатів*: остаточні формули (28) і (30) справедливі для всіх напруженостей полів і всіх типів матерії (наприклад, конвективної або неконвективної). Ми не припускаємо, що матерія, з якої складаються зірки, є ідеальною рідиною або є ізоентропійним середовищем.

• *Характеристики вищої похідної*: на відміну від однопараметричної метрики Шварцшильда, розв'язок Бранса класу I залежить від двох параметрів, тобто розв'язок визначається не лише своєю ґравітаційною масою, а й *скалярною масою* на додачу до ґравітаційної [4]. Зовнішній вакуум БД має відображати внутрішню структуру і склад зірки. Це очікування підтверджується в рівняннях (28) і (30), підкреслюючи роль параметра Θ.



Контурні графіки γ_{exact} (верхня панель) і δ_{exact} (нижня панель) в залежності від Θ і $\frac{\omega+1}{\omega+2}$ для діапазону $\Theta \in [0, 1]$ і $\omega \in (-3/2, +\infty)$, останній відповідає $\frac{\omega+1}{\omega+2} \in (-1, 1)$. Виміряне $\gamma_{\text{exact}} \approx 1$ може означати $\frac{\omega+1}{\omega+2} \approx 1$ (тобто $\omega \gg 1$) або $\Theta \approx 1$ (тобто ультрарелятивістична матерія). Контури розташовані на однаковій відстані з кроком 0,01. Для заданого контуру у верхній панелі відповідне значення γ_{exact} можна прочитати на осі абсцис, де контур її перетинає. Вимірюючи як γ, так і δ, можна визначити значення ω і Θ

[3] Зауважте, що встановлення функціональної форми розв'язку Бранса класу I все ж потребує повного набору рівнянь

• *Роль тиску*: на рисунку показано контурні графіки $\gamma_{\rm exact}$ і $\delta_{\rm exact}$ як функції $\frac{\omega+1}{\omega+2}$ і Θ. Є три цікавих спостереження:

– Ультра-релятивістична границя $\Theta \simeq 1^-$ означає $\gamma_{\rm exact} \simeq 1$, *незалежно* від ω.

– Для ньютонівських зірок, тобто зірок із низьким тиском ($\Theta \approx 0$), результат PPN є хорошим наближенням *незалежно* від напруженості поля.

– Спільне вимірювання γ і δ, в принципі, може дозволити визначити ω і Θ. Однак через нелінійні зв'язки в (28) і (30) для заданої пари $\{\gamma,\ \delta\}$ можуть існувати кілька розв'язків для $\{\omega,\ \Theta\}$. Вимірювання третього параметра PN (крім β) в принципі може вирішити цю проблему.

8. Висновок

Ми отримали точні аналітичні формули (28) і (30) для пост-ньютонівських параметрів γ і δ для сферичних джерел маси в БД. Висновки ґрунтуються на інтегровності 00-компоненти рівняння поля, що робить його незбуреним і застосовним для будь-якої напруженості поля і типу речовини, з якої складається джерело. Традиційний результат PPN для ґравітації БД, $\gamma_{\rm PPN} = \frac{\omega+1}{\omega+2}$, не залежить від фізичних характеристик джерела маси. У світлі наших точних результатів $\gamma_{\rm PPN}$ слід розглядати як наближення для зірок у зміненій ґравітації в умовах низького тиску. Наші висновки виявляють обмеження формалізму PPN, особливо в сценаріях, що характеризуються високим зоряним тиском. Розумно очікувати, що роль тиску може поширюватися на інші модифіковані теорії ґравітації.

BC дякує Антуану Стругареку за надання корисної кореспонденції. HKN дякує Мустафі Азрегайну, Валеріо Фараоні, Тіберіу Харко і учасникам XII Конференції Больяї–Гауса–Лобачевського (BGL-2024): "Неевклідова геометрія в сучасній фізиці і математиці" (Будапешт, 1–3 травня 2024 р.) за цінні коментарі.

1. C.H. Brans, R. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
2. C.H. Brans. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation II. *Phys. Rev.* **125**, 2194 (1962).
3. H.K. Nguyen, B. Chauvineau. $\mathcal{O}(1/\sqrt{\omega})$ anomaly in Brans–Dicke gravity with trace-carrying matter. arXiv:2402.14076 [gr-qc].
4. K.A. Bronnikov. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon. B* **4**, 251 (1973).
5. C.M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, second edition (Cambridge University Press, 2018).
6. C.M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativ.* **17**, 4 (2014).
7. S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons, 1972).
8. H.K. Nguyen, B. Chauvineau. An optimal gauge for Tolman–Oppenheimer–Volkoff equation in Brans–Dicke gravity (in preparation).
9. B. Chauvineau, H.K. Nguyen. The complete exterior spacetime of spherical Brans–Dicke stars. *Phys. Lett. B* **855**, 138803 (2024). arXiv:2404.13887 [gr-qc].
10. H.K. Nguyen, B. Chauvineau. Impact of star pressure on γ in modified gravity beyond post-Newtonian approach. arXiv:2404.00094 [gr-qc].
11. J.C. Baez, E.F. Bunn. The meaning of Einstein's equation. *Amer. Jour. Phys.* **73**, 644 (2005). arXiv:gr-qc/0103044.
12. J. Ehlers, I. Ozsvath, E.L. Schucking, Y. Shang. Pressure as a source of gravity. *Phys. Rev. D* **72**, 124003 (2005). arXiv:gr-qc/0510041.

Одержано 24.06.24.
Переклад на українську мову Ю.А. Куца

H.K. Nguyen, B. Chauvineau

VIOLATION OF γ IN BRANS–DICKE GRAVITY

The Brans Class I solution in Brans–Dicke gravity is a staple in the study of gravitational theories beyond General Relativity. Discovered in 1961, it describes the exterior vacuum of a spherical Brans–Dicke star and is characterized by two adjustable parameters. Surprisingly, the relationship between these parameters and the properties of the star has not been rigorously established. In this article, we bridge this gap by deriving the complete exterior solution of Brans Class I, expressed in terms of the total energy and total pressure of the spherisymmetric gravity source. The solution allows for the exact derivation of all post-Newtonian parameters in Brans–Dicke gravity for far field regions of a spherical source. Particularly for the γ parameter, instead of the conventional result $\gamma_{\rm PPN} = \frac{\omega+1}{\omega+2}$, we obtain the analytic expression $\gamma_{\rm exact} = \frac{\omega+1+(\omega+2)\,\Theta}{\omega+2+(\omega+1)\,\Theta}$, where Θ is the ratio of the total pressure $P_\parallel^* + 2P_\perp^*$ and total energy E^* contained within the mass source. Our non-perturbative γ formula is valid for all field strengths and types of matter comprising the mass source. Consequently, observational constraints on γ thus set joint bounds on ω and Θ, with the latter representing a global characteristic of the mass source. More broadly, our formula highlights the importance of pressure (when $\Theta \neq 0$) in spherical Brans–Dicke stars, and potentially in stars within other modified theories of gravitation.

Keywords: Brans–Dicke gravity, static spherically symmetric solution, energy-momentum tensor.