О. ГОЛОВНЕВ

Центр теоретичної фізики Британського університету в Єгипті
(Ель-Шерук, Каїр 11837, Єгипет; e-mail: agolovnev@yandex.ru)

УДК 539

СТУПЕНІ ВІЛЬНОСТІ В МОДИФІКОВАНІЙ ТЕЛЕПАРАЛЕЛЬНІЙ ҐРАВІТАЦІЇ [1]

У цій статті я піднімаю питання про ступені вільності в модифікованій телепаралельній ґравітації. Ці теорії дійсно мають додаткову структуру на звичайному (псевдо)рімановому многовиді, що є структурою плоского паралельного переносу. Ця структура абсолютно абстрактна і непередбачувана (чисто калібрувальна) в еквівалентних моделях загальної відносності, однак після модифікацій вона стає фізичною. Проблема полягає в тому, що в найпопулярніших моделях ця локальна симетрія порушена, але не є стабільною, отже існують сумнозвісні проблеми сильного зв'язку. Аналіз на основі гамільтоніанів стає складним і має суперечливі результати. Забавно, що ми бачимо у доступних лінійних збуреннях $f(T)$ ґравітації те, що набагато ближче до аналізу з меншою кількістю динамічних ступенів вільності із добре відомою помилкою, тоді як більш точна робота передбачає набагато більше динаміки, ніж ми бачили досі. Я обговорюю можливі причини цієї загадки, а також виступаю на користь вивчення найбільш загальних нових моделей загальної відносності, які зазвичай ігноруються через підозру існування "духів".

К л ю ч о в і с л о в а: модифікована телепаралельна ґравітація, (псевдо)рімановий многовид, нова загальна теорія відносності, квантова теорія поля.

1. Вступ

Сьогодні модифікована ґравітація дуже популярна через низку причин, починаючи від суто феноменологічних проблем і закінчуючи глибокими теоретичними питаннями. Жодна з цих мотивацій не є безсумнівною. Проте нинішня ситуація є достатньо загадковою для того, щоб продовжився великий потік статей про модифіковані ґравітації. Цікавим моментом у цій діяльності є те, що, виявляється, дуже важко нетривіально модифікувати загальну теорію відносності (ЗТВ), не створюючи катастрофи того чи іншого роду, що, на жаль, дуже часто залишається поза увагою заради написання більшої кількості статей.

Серед цікавих варіантів в літературі є давня ідея радикальної зміни геометрії простору-часу шляхом додавання поверх метрики ще одного плоского зв'язку. Ці телепаралельні підходи можуть сміливо починатися з простого відтворення ЗТВ дуже неприродною мовою. Конкретизуючи поняття плоского зв'язку двома крайніми випадками лише кручення і лише неметричності, можна говорити про триєдиність ґравітації [1]. Оскільки в реальному світі всі пробні траєкторії частинок відповідають рімановій геодезії спостережуваної метрики, я б не підтримав цю точку зору. У будь-якій іншій теорії також можна ввести деякі нові приховані структури і використовувати їх для побудови іншої версії відомої фізики.

Якщо піти ще далі у використанні неспостережуваних штучних структур, кожен міг би стверджувати, що вирішив проблему енергії ґравітації [2, 3]. Я категорично не згоден з цим [4], якщо тільки ми не введемо суттєво модифіковану телепаралельну модель замість ЗТВ-еквівалентної. У випадку простого відтворення ЗТВ, плоский зв'язок є абсолютно езотеричним для звичайного спостерігача, і можна справді зробити багато різних

Ц и т у в а н н я: Головнев А. Ступені вільності в модифікованій телепаралельній ґравітації. *Укр. фіз. журн.* **69**, №7, 456 (2024).

C i t a t i o n: Golovnev A. Degrees of freedom in modified teleparallel gravity. *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 7, 456 (2024). https://doi.org/10.15407/ujpe69.7.456.

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XII Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2024): Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics".

конструкцій для тієї самої мети, наприклад, ввести фіксований простір Мінковського і розглядати метрику реального світу як динамічне поле на фоні цього простору. Це очевидний спосіб мати чітко визначені закони збереження, хоча по відношенню до штучних конструкцій, побудованих лише нашою уявою. Я віддаю перевагу визнанню того, що загалом не існує об'єктивного розуміння збереження енергії тощо.

Я б також зазначив, що телепаралельні описи ґравітації не мають чіткого відношення до реального світу. У ЗТВ-еквівалентних моделях виконується просто кожний плоский зв'язок, в'язі, які можуть бути накладені по самому визначенню розглядуваної моделі, наприклад, зникаюча неметричність для метричної телепаралелі або зникаюче кручення для симетричної телепаралелі. Однак вони дають нам нові шляхи модифікації теорії ґравітаційної взаємодії. Це цікаво саме по собі, не кажучи вже про те, щоб відкрити нам шляхи кращого розуміння ЗТВ і її місця в теоретичному ландшафті.

У розділі 2 дається стислий опис загальної концепції телепаралельної геометрії, потім буде накладена умова нульової неметричності у всьому подальшому тексті статті. У розділах 3 і 4 обговорюються найбільш загальні (хоча і зі збереженням парності) моделі Нової загальної теорії відносності (Нова ЗТВ). Зазвичай такими варіантами нехтують через страх перед "духами" [5]. Я стверджую [6], що це питання потрібно дослідити більш детально. Якщо щось виникає в метричній телепаралельній ґравітації, то саме цей випадок може суттєво допомогти нам із законами збереження, оскільки повна структура плоского паралельного переносу стає фізичною. Потім, у розділах 5 і 6, я обговорюю, мабуть, найпопулярнішу модифіковану телепаралельну ґравітацію, а саме $f(\mathbb{T})$ [7]. Це проста модифікація ЗТВ-еквівалентного випадку, і вибір телепаралельної геометрії більше не є довільним у ньому, але він також не є повністю фіксованим, що приводить до заплутаного зоопарку залишкових симетрій [8], повсюдних проблем сильного зв'язку [9] і, отже, погано визначеної кількості ступенів вільності. Незважаючи на повну теоретичну катастрофу, ця модифікація все ще дуже активно використовується для (наївної) феноменології. Нарешті, у розділі 7 я роблю висновки.

2. Телепаралельна геометрія

Дозвольте мені почати з основного поняття телепаралельних структур. А саме, ми припускаємо, що на просторово-часовому многовиді існує незалежний зв'язок тензора кривини, що прямує до нуля. Оскільки тензор кривини описує зміну векторного поля при паралельному перенесенні його по нескінченно малому замкнутому контуру, це означає, що якщо переносити вектор з однієї точки в іншу по двох різних плавних траєкторіях, результат буде однаковим, якщо тільки ці шляхи плавно деформуються один в одного. Залишаючи за дужками випадок нетривіальної топології, ми отримуємо однозначне поняття двох векторів на деякій відстані, які рівні або паралельні один одному, звідси і назва.

Загалом, враховуючи плоске паралельне перенесення, можна вибрати базис 1-форм $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ в деякій точці і отримати коваріантно-постійний базис 1-форм $e^a_\mu(x)$ у повному просторі-часі, або принаймні над топологічно тривіальною ділянкою навколо початкової точки. Із врахуванням глобальної свободи початкового вибору базису, ця "правильна" ко-тетрада, або набір коваріантно незмінних полів 1-форми, є точним представленням телепаралельного зв'яку. У той самий час, можна також використовувати дуальний базис ə^μ_a коваріантно постійних векторів, або тетраду, з $\text{ə} = e^{-1}$ в термінах матриць.

Зауважте, що зазвичай я позначаю як тетради, так і ко-тетради тією самою літерою e, а різниця між ними залишається виключно у положенні латинських та грецьких індексів. Для педагогічних цілей тут я дотримуюся позначення літер ə і e з класичної статті [1]. Іншим варіантом, який зустрічається в літературі [10], є використання літер E і e.

Загалом, телепаралельна геометрія дійсно має базис коваріантно незмінних векторних полів, або певну форму прямуючого до нуля спінового зв'язку на "коваріантній" мові, $\partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e^a_\alpha = 0$, що передбачає афінний зв'язок типу Вайценбека:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \text{ə}^\alpha_a \partial_\mu e^a_\nu. \qquad (1)$$

Якщо ми вважаємо, що плоский зв'язок (1) об'єктивно існує на даному просторово-часовому многовиді, тоді його визначальна (ко-)тетрада e^a_μ не є вільною для вибору. Навпаки, це — динамічна змінна, і вона має підпорядковуватися рівнянням руху даної моделі. Якщо ми хочемо мати справу з довільною (ортонормальною) тетрадою, чи то для опису спостерігача, чи для зв'язку ферміонів, це має бути інший об'єкт, скажімо h^a_μ, який служить ще одним базисом для представлення всіх геометричних величин.

Усі наведені вище міркування не залежать від конкретного типу телепаралельних моделей. Можна це уточнити в подальшому, і це приведе нас до двох основних підходів без кривини [1]. Найпростіша версія, хоча вона з'явилася значно пізніше за класичну телепаралельність, називається ***симетричною телепаралельністю***, і тут йдеться про (теле)паралельне перенесення без кручення, $\partial_\mu e^a_\nu = \partial_\nu e^a_\mu$. Принаймні локально, базова котетрада може бути представлена як координатний базис,

$$e^a_\mu = \frac{\partial \zeta^a}{\partial x^\mu}. \tag{2}$$

Іншими словами, структура паралельного перенесення є структурою простору Мінковського, причому скалярні поля ζ^a є його декартовими координатами. Просто фізична метрика – це інше поле, і тому тут є нетривіальна неметричність $Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \bigtriangledown_\alpha g_{\mu\nu}$.

Інакше кажучи, у симетричному телепаралельному підході існують координати ζ^a (2) із нульовими коефіцієнтами афінного зв'язку. ЗТВ-еквівалентна модель у цьому випадку (STEGR) в основному задана нековаріантною дією ГГ Ейнштейна з частинними похідними метрики, які інтерпретуються як компоненти тензора неметричності в декартових координатах телепаралельної структури.

Іншим варіантом є класична або метрична телепаралельна геометрія, у якій ми допускаємо лише кручення. Це лежить в основ даної статті. Тоді умова нульової неметричності означає, що всі скалярні добутки не змінюються під час паралельного перенесення. Зокрема, ми можемо послідовно вибрати визначальну тетраду як ортонормальну. Звичайний підхід до цього полягає в тому, щоб розглядати тетраду як єдину динамічну змінну, з якої визначається метрика

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu. \tag{3}$$

У цьому випадку дві різні літери для тетрад і котетрад виглядають особливо дивно, адже перехід від однієї до іншої можна вважати простим підняттям і опусканням грецьких індексів за метрикою простору-часу і латинських за метрикою Мінковського. Тоді нам, ймовірно, доведеться також записати обернену метрику як $\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \eta^{ab}\mathfrak{e}^\mu_a \mathfrak{e}^\nu_b$

Телепаралельний зв'язок (1) автоматично сумісний з метрикою (3), хоча в загальному випадку він має нетривіальний тензор кручення

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}, \tag{4}$$

і можна легко перевірити, що скаляр кручення

$$\mathbb{T} = \frac{1}{4} T_{\alpha\mu\nu} T^{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} T_{\alpha\mu\nu} T^{\mu\alpha\nu} - T_\mu T^\mu, \tag{5}$$

де $T_\mu \equiv T^\alpha{}_{\mu\alpha}$, відрізняється від (мінус) звичайної скалярної кривини (Леві-Чівіта) лише поверхневим членом. Таким чином, лагранжіан $\mathbb{T}$ визначає телепаралельну теорію, еквівалентну загальній теорії відносності (TEGR).

3. Нова загальна теорія відносності

Коли ми зафіксували метричну телепаралельну структуру (1) і (3), тобто плоский і сумісний з метрикою зв'язок, однією з найбільш природних ідей [11] у пошуках модифікованої ґравітації стає модифікація коефіцієнтів у скалярі кручення (5):

$$\mathfrak{T} = \frac{a}{4} \cdot T_{\alpha\mu\nu} T^{\alpha\mu\nu} + \frac{b}{2} \cdot T_{\alpha\mu\nu} T^{\mu\alpha\nu} - c \cdot T_\mu T^\mu. \tag{6}$$

Це найбільш загальний квадратичний відносно кручення інваріант (який зберігає парність). Дія $\int \mathfrak{T} \cdot \sqrt{-g} d^4x$ визначає те, що називається нова загальна теорія відносності, із відновленням старої доброї загальної відносності у випадку $a = b = c$.

Історично випадок так званої однопараметричної нової ЗТВ [11], тобто $a + b = 2c$ зі ще одним вільним параметром, видаленим шляхом фіксації ефективної ґравітаційної сталої, мав перевагу порівняно з іншими випадками через заявлену відсутність "духів" [5] і завдяки таким самим статичним сферично-симетричним розв'язкам, як і в ЗТВ [11]. Однак, з одного боку, ця опція, здається, не дуже цікава, оскільки відхилення від ЗТВ навряд чи можна побачити, ані у (незбурених) астрофізичних розв'язках [12], ані в лінійних космологічних збуреннях [13], якщо не використовувати неприродно складні тетради [14]. З іншого боку, існують аргументи, що динамічна структура таких обмежених моделей не може бути надійною та стабільною [15].

У цьому відношенні моя думка [6] полягає в тому, що найбільш загальні (“тип 1”) нові моделі ЗТВ (6), тобто

$$a \neq b, \quad a \neq -b, \quad a+b \neq 2c, \quad a+b \neq 6c, \tag{7}$$

є найбільш перспективними. Залишкових симетрій практично немає. З шістнадцяти змінних чотири є чисто калібрувальними через інваріантність дифеоморфізму, ще чотири є фізичними, але із в'язями через калібрувальні симетрії, і тому присутні вісім динамічних мод. Як у просторі Мінковського [6], так і в (просторово плоскому) космологічному просторі-часі [13] чітко видно всі поляризації хвиль.

Дозвольте мені коротко описати найпростіший випадок слабкої ґравітації. Щоб досліджувати ґравітаційні хвилі відносно тривіального фону Мінковського, $e^a_\mu = \delta^a_\mu$, потрібно розглянути найбільш загальне збурення тетради, на відміну від лише деякого можливого вибору тетради для найзагальнішого збурення метрики. Модифіковані телепаралельні ґравітації мають більше рівнянь руху через їх нетривіальну антисиметричну частину, і вони, звичайно, вимагають більше змінних. Або іншими словами, локальна лоренц-інваріантність порушена, і тому різні тетради для однієї метрики фізично відрізняються. Зокрема, в $f(\mathbb{T})$ ґравітації лоренцеві бусти збуреної тетради дійсно впливають на скалярні космологічні збурення [16]. Якщо йти до лоренц-коваріантного опису, то повинні бути враховані нові змінні у спіновому зв'язку [17].

Я продовжую підхід чистої тетради [6]. Розділивши збурення на скаляри, вектори та симетричний безслідовий тензор, можемо параметризувати збурену тетраду як

$$\begin{aligned} &e^0_0 = 1 + \phi,\\ &e^0_i = \partial_i \beta + \mathcal{L}_i + \mathcal{M}_i,\\ &e^i_0 = \partial_i \zeta + \mathcal{L}_i - \mathcal{M}_i,\\ &e^i_j = (1-\psi)\delta_{ij} + \partial^2_{ij}\sigma + \epsilon_{ijk}\partial_k s +\\ &+ \partial_j c_i + \partial_i \chi_j - \partial_j \chi_i + \frac{1}{2} h_{ij}. \end{aligned} \tag{8}$$

де збурення метричного тензора задаються як ϕ, ψ, $\beta - \zeta$, σ, $2\mathcal{M}_i$, c_i і h_{ij} . Крім того, ми отримали (8) лоренцеві бусти в $\beta+\zeta$ і $2\mathcal{L}_i$, а також просторові повороти s і χ_i.

Враховуючи те, що інваріантність дифеоморфізму все ще існує (з тетрадою, прийнятою як набір векторів), ми повинні зафіксувати калібрування, яке буде [6, 13, 16]:

$$\beta = \zeta, \quad \sigma = 0, \quad c_i = 0, \tag{9}$$

залишаючи нам дванадцять фізичних мод, доки виконується умова (7).

У тензорному секторі немає обмежень. Якщо $a \neq -b$, також немає нової калібрувальної свободи; і дві стандартні поляризації ґравітона задовольняють простому хвильовому рівнянню

$$\ddot{h}_{ij} - \triangle h_{ij} = 0 \tag{10}$$

яке зникає, якщо $a + b = 0$.

Якщо $a \pm b \neq 0$ і $a + b \neq 2c$, векторний сектор можна представити як

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathcal{M}}_i - \triangle \mathcal{M}_i = 0,\\ &\ddot{\chi}_i - \triangle \chi_i = \frac{2b(a+b) - 4ac}{(a-b)(a+b-2c)} \cdot \dot{\mathcal{M}}_i,\\ &\mathcal{L}_i = \frac{a+b}{a-b} \cdot \mathcal{M}_i - \dot{\chi}_i, \end{aligned} \tag{11}$$

де перше рівняння спочатку мало коефіцієнт $a+b$. У трьох нерозбіжних векторах є шість змінних. Ми бачимо, що дві моди мають в'язі (останнє рівняння), тоді як чотири є динамічними, причому лише дві динамічні моди видно в метриці ($\mathcal{M}_i$).

Нарешті, у скалярному секторі нові змінні s і ζ не є чисто калібрувальними, якщо $a \neq b$ і $a+b \neq 2c$, відповідно. Якщо також $a \neq -b$, скалярна мода в метриці має бути конформною, $\phi = -\psi$, і ми отримуємо

$$\begin{aligned} &\ddot{s} - \triangle s = 0,\\ &\ddot{\zeta} - \triangle \zeta = 0,\\ &\phi = -\psi = \frac{2c-a-b}{6c-a-b} \cdot \dot{\zeta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Є дві динамічні моди. Одна з них (s) прихована від звичайних спостерігачів, тоді як (ζ) присутня в конформній моді метрики.

Всього існує вісім динамічних мод, п'ять з яких ми бачимо в метриці (10)–(12). Те, що можна побачити в метриці, дещо схоже на ґравітацію без “духів”: один тензор, один вектор і один скаляр. Крім того, є три динамічні моди, які знаходяться виключно в групі Лоренца. Чотири в'язі дійсно фіксують іншу половину з групи Лоренца, а також накладають одне обмеження ($\phi = -\psi$) на шість метричних змінних.

Можна також розглядати Нову Теорію Відносності як таку, що має чотири векторні поля (що утворюють тетраду) із дією, яка є квадратичною відносно похідних, які входять лише в комбінаціях (4)

$$\mathfrak{F}^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu. \qquad (13)$$

Поки зберігаються відповідні калібрувальні симетрії, ми зазвичай очікуємо вісім ступенів вільності, якщо тільки немає дуже тонких додаткових налаштувань параметрів. Це саме те, що має місце в квадратичній дії для слабкої ґравітації, згаданої вище. Симетрії $U(1)^{\otimes 4}$ більше там немає, і можна було б очікувати, що тоді буде загалом дванадцять ступенів вільності. Однак абелева симетрія замінюється повними дифеоморфізмами, які все ще зменшують кількість динамічних ступенів вільності на чотири завдяки узагальненню тотожностей Б'янкі [11, 12, 18].

4. Нестабільності нової загальної відносності?

Повернемося до питань стабільності. Нещодавно з'явилася стаття [19], в якій нові моделі ЗТВ аналізуються більш ретельно, ніж це було раніше, з класичним результатом [5], який був отриманий шляхом безпосереднього використання операторів спінової проекції (отже, нових членів із похідними) прямо у виразі для дії. Як згадувалося вище, ця стара робота [5] привела наукову спільноту до прийняття лише 1-параметричної моделі Нової ЗТВ, а точніше, 2-параметричної, якщо не наполягати на експериментальному значенні ефективної ґравітаційної сталої. Звичайно, додаткові похідні в дії загалом змінюють дану модель. Нещодавно ми з колегами [6] стверджували, що загальна 3-параметрична нова теорія ЗТВ насправді може бути життєздатною, тоді як нова стаття [19] стверджує, що це не так, через присутність "духів" у векторному секторі збурень.

Відверто кажучи, я не можу говорити про це напевно, оскільки повна відповідь вимагала б ретельного аналізу всіх динамічних характеристик, в ідеалі за межами лінійного наближення. Що можна побачити в роботі [6], це те що кінетична частина (лінеаризованого із фіксовним калібруванням) гамільтоніана може бути додатно визначеною, за винятком нединамічної конформної моди. Звісно, цього недостатньо, щоб справді мати на увазі стабільність. Наприклад, масивне векторне поле з $m^2 < 0$ також має позитивно визначену кінетичну частину свого канонічного гамільтоніана. Однак це стає не так для часової складової, або при використанні трюку Штюкельберга. Тим не менш, його завжди потрібно ретельно аналізувати, тоді як аргументи статті [19] не задовольняють цю вимогу.

Меншою проблемою є те, що вони отримують дію в термінах калібрувально-інваріантних змінних. Як я вже пояснював [20], калібрувальна структура має вирішальне значення. У коваріантних телепаралельних теоріях дійсно можна було б використати Лоренц-інваріантні калібрувально змінні, створюючи таким чином чисті тетрадні теорії [21], без зміни фізичного змісту. Однак це справедливо завдяки чисто алгебраїчній природі симетрії, чого не можна сказати про дифеоморфізми. Закриваючи очі на фундаментальні аспекти, зауважимо, що зміни в кількості просторових похідних часто є досить корисними для теорії збурень, де ми, скажімо, покладаємо будь-яку гармонічну функцію тотожним нулем, однак це може створити суттєві відмінності, коли залучаються похідні відносно часу. Наприклад, в електродинаміці, якщо прийняти калібрувально-інваріантну напруженість поля як динамічну змінну, можна усунути похідні з дії, роблячи рівняння тривіальними.

Важливим моментом у розумінні статті [19] є те, що її автори міркують лише в термінах динамічних ("розповсюджуваних") мод, ніби моди із в'язями не є фізичними. В електродинаміці можна будувати дію лише для поперечних (калібрувально-інваріантних) мод. Це дійсно можна зробити, але це не те саме, що справжня електродинаміка, в якій поздовжня мода також є фізичною, оскільки в ній діє закон Кулона. У випадку нової ЗТВ така позиція також змушує авторів думати про потенційну життєздатність ґравітаційних моделей [19] лише з точки зору поширення "духів", не піклуючись про можливу появу випадкової калібрувальної свободи (за межами дифеоморфізмів) у метричному секторі. Звичайно, це не дуже гарна ідея. Це добре, якщо деякі метричні збурення не поширюються самі по собі, але вони повинні передбачатися, так чи інакше, щоб мав сенс звичайний зв'язок для матерії. Додаткова калібрувальна свобода в метричних збуреннях неприпустима.

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2024. Т. 69, № 7

Загалом, я повинен визнати, що підрахунок динамічних мод [19] у векторному секторі типу 1 виявився правильним. У їхніх позначеннях, єдина похідна відносно часу у цій частині математичних викладок містилася у визначенні нової калібрувально-інваріантної змінної $D_i = S_i - \dot{F}_i$. Варіація відносно D тоді еквівалентна варіації в термінах S. Аналогічно, ми можемо уявити механічну систему для $x(t)$ і $y(t)$ з лагранжіаном $L = (y - \dot{x})^2$ і рівнянням $y = \dot{x}$. Можна взяти калібрувально-інваріантну змінну $Y = y - \dot{x}$, для якої лагранжіан $L = Y^2$ вимагає $Y = 0$. Це рівняння таке саме, як і раніше, отримане від варіації відносно y. У той самий час, воно є більш обмежувальним, ніж це було в рівнянні для x, проте останнє все одно було випереджено рівнянням для y.

Наприкінці вони знайшли [19] два повністю динамічних поперечних вектора і один поперечний вектор із накладеною додатковою умовою. Це той самий результат (11), який ми мали [6]. Тоді твердження про "духів" [19] походить від того, що автори змогли вивести рівняння четвертого порядку з двох рівнянь другого порядку. Робити з цього висновок про "духів" абсолютно невірно. Неважко зробити те саме для багатьох абсолютно стабільних систем.

Дозвольте мені обговорити просту іграшкову модель лагранжіана:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2xy),$$

який відповідає гамільтоніану

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + 2xy\right)$$

з додатно визначеною кінетичною частиною і без додаткових зв'язків (в'язей). "Духа" взагалі немає, хоча потенціальна енергія не обмежена. Тим не менш, рівняння руху

$$\ddot{x} + y = 0, \quad \ddot{y} + x = 0$$

можна відразу привести до форми

$$\ddddot{x} - x = 0, \quad y = -\ddot{x},$$

яке є рівнянням четвертого порядку для однієї зі змінних, а друга однозначно визначається після знаходження першої. Це не означає, що ми породили "духа" нізвідки.

Якщо це викликає занепокоєння, можна вибрати $\frac{1}{2}(x + y)^2$ замість xy у потенціальній енергії, і в цьому випадку так само можна переписати рівняння у термінах вищих похідних, навіть якщо це виглядатиме набагато менш природно, ніж проста заміна змінних на $x+y$ і $x-y$. Або, щоб поставити питання ще гостріше, можна почати з абсолютно стабільної моделі $L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x^2\right)$ і ввести нові змінні $s = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ і $a = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Потім легко переписати рівняння як додаткову умову (зв'язок) для одного з них і рівняння четвертого порядку для іншого. І справді, дві моди рівнянь другого порядку потребують загалом чотирьох умов Коші, тому всю задачу можна представити в термінах одного рівняння четвертого порядку. Чи справді це означає наявність поганого "духа" у системі?

Отже твердження [19] про виявлення "духів" є необґрунтованим. Звісно, на лінійному рівні навіть не має великого сенсу питання стабільності, адже динаміка повністю контрольована. Щойно ми ввімкнемо взаємодію, у Лоренц-інваріантній теорії з "духами" негативні кінетичні енергії загалом створять нескінченну кількість способів породження нових збуджень з дотриманням усіх законів збереження, отже ми зазвичай очікуємо побачити нестабільність без скінченного часового масштабу. Це дуже цікаве питання, чи присутні "духи" чи ні, навіть якщо ми все ще можемо терпіти деякі з них у фізичній теорії [22], але проблема вимагає більш детального аналізу. У чому я цілком впевнений, так це в тому, що загальні (тип 1) моделі [6] є досить надійними з точки зору своїх фізичних мод. Це завжди чотири дифеоморфізми, і більше жодних додаткових умов (в'язей). Питання стабільності ще належить дослідити.

5. Нелінійні $f(\mathbb{T})$ моделі

Дозвольте мені тепер перейти до дуже популярної моделі, $f(\mathbb{T})$ ґравітації. Ми повернемося до стандартного скаляра кручення (5) TEGR і введемо нелінійну функцію від нього в дію: $\int f(\mathbb{T})\cdot\sqrt{-g}d^4x$. Сам скаляр кручення $\mathbb{T}$ був майже звичайною густиною лагранжіана Ейнштейна–Гільберта, що відрізняється від останнього лише поверхневим членом, який нічого не змінює у системі рівнянь. Але як тільки поверхневий член потрапив в аргумент нелінійної функції, вона стає вже не такою. Тим не менш, можна використовувати цю структуру дії для полегшення варіацій і подальших обчислень [23].

Рівняння руху (у вакуумі) варто записати в коваріантній формі

$$f_T \cdot G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,(f - f_T\mathbb{T}) \cdot g_{\mu\nu} + f_{TT} \cdot S_{\mu\nu\alpha}\partial^\alpha\mathbb{T} = 0, \quad (14)$$

на відміну від значної частин літератури з модифікованої телепаралельної ґравітації. Кілька коментарів до позначень. Суперпотенціал, або спряження до кручення, $S_{\alpha\mu\nu}$ є тензором, який можна визначити

$$S_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(K_{\mu\alpha\nu} + g_{\alpha\mu}T_\nu - g_{\alpha\nu}T_\mu),$$
$$K_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(T_{\alpha\mu\nu} + T_{\nu\alpha\mu} + T_{\mu\alpha\nu}) \quad (15)$$

через тензор викривлення $K_{\alpha\mu\nu}$ (15), який, у свою чергу, є різницею між телепаралельним зв'язком і зв'язком Леві-Чівіта. $G_{\mu\nu}$ – це звичайний тензор Ейнштейна, обчислений за допомогою метрики $g_{\mu\nu}$. Оскільки це стосується зв'язку Леві-Чівіта, ми часто позначаємо його (0) $\overset{(0)}{G}_{\mu\nu}$ або $\mathring{G}_{\mu\nu}$. Нарешті, існують похідні функції f, тобто $f_T \equiv \frac{df}{d\mathbb{T}}$ і $f_{TT} \equiv \frac{d^2f}{d\mathbb{T}^2}$.

Ми відразу бачимо, що у випадку лінійної функції $f(\mathbb{T})$, рівняння (14) зводяться до рівнянь загальної теорії відносності, або TEGR, лише з ґравітаційною сталою, перенормованою на коефіцієнт f_T, і додатковою космологічною константою, заданою $f(0)$. Справді нова модифікація викликана виключно членом f_{TT} (14). У цьому немає нічого дивного, оскільки за нетривіальні модифікації ґравітації відповідає саме нелінійність функції f. Зауважимо також, що це єдиний член у рівняннях (14), який має нетривіальну антисиметричну частину, а також залежить від лоренцевих поворотів тетради за межами скалярних коефіцієнтів. Звичайно, причиною цього є порушена локальна лоренц-інваріантність. Трохи більше занепокоєння викликає те, що постійні $\mathbb{T}$ розв'язки ніколи не виходять за межі загальної відносності, і ми, ймовірно, зможемо знайти (дуже часто досить неприродне) перетворення Лоренца простої тетради, яке зробить це для будь-якої заданої метрики, як, наприклад, це було зроблено (з використанням нульових тетрад) для метрики Керра [24] і космологічних метрик [25].

Поки що все добре, але потім виникають фундаментальні питання [9]. Як уже зазначалося вище, одній і тій же метриці можуть відповідати різні тетради, навіть ортонормовані. Коли це фізичні об'єкти, ми стикаємося з проблемою вибору справжнього фізичного об'єкту. У випадку слабкої ґравітації природно взяти тривіальну тетраду $e^a_\mu = \delta^a_\mu$. Саме для неї характерні всі симетрії, а також вона має нульовий тензор кручення. Чого ще ми хочемо від справжнього вакууму? Однак тоді скаляр кручення (5) входить квадратично у збурення відносно цього важливого фону. Отже, квадратична дія відчуває тільки лінійний член у розкладі Тейлора функції f, таким чином повертаючи нас до TEGR. Або, що те саме, f_{TT}-член у рівняннях (14) очевидно зникає в лінійному порядку.

Враховуючи те, що повна лінійна теорія навколо фону Мінковського є нічим іншим, як просто TEGR, ми маємо проблему сильного зв'язку у формі випадкової калібрувальної симетрії. А саме, вся локальна група Лоренца повністю відновлюється на лінійному рівні. Оскільки в загальному випадку це точно не так, то це сингулярний локус фазового простору. Навіть якщо б ми дбали лише про моди поширення, то принаймні один новий динамічний ступінь вільності повинен бути присутній у повній моделі [26]. Досить погана новина полягає в тому, що цей проблемний локус є дуже простим і важливим місцем для будь-якої теорії.

В принципі, сингулярні локуси можна знайти у фазових просторах багатьох модифікованих теорій ґравітації, як, наприклад, у нулях першої чи другої похідної функції f у $f(R)$ ґравітації. Що є дивним в теоріях $f(\mathbb{T})$, так це те, що в них постійно присутня проблема сильного зв'язку. Якщо не бавитись із дуже надуманими структурами [25], просторово плоску космологію можна побудувати за допомогою конформно перемасштабованої тетради $e^a_\mu = a(t) \cdot \delta^a_\mu$. Давно було помічено, що в лінійних космологічних збуреннях досі немає нової динамічної моди [27]. Точний аналіз [16] також показує трохи випадкову калібрувальну симетрію для псевдоскалярної моди s. Що стосується нових динамічних мод, то не дуже допомагає навіть використання просторово викривлених космологій [28].

6. Бажані розшарування?

Враховуючи цю досить неясну ситуацію з динамічними, обмеженими в'язями та чистими калібрувальними модами в теорії, було б природним поглянути на гамільтонів аналіз. Однак це виявляється досить складним завданням через непостійні ранги алгебр дужок Пуассона для додаткових умов (в'язей). У цьому знову немає нічого нового для моделей із погано визначеною кількістю ступенів вільності, за винятком того, наскільки частими здаються події змін рангу в $f(\mathbb{T})$ ґравітації. Насправді в літературі є суперечливі результати.

Наскільки мені відомо, доступні три основні твердження щодо гамільтоніану [29, 30, 31]. В роботах [29, 31] у звичайному просторово-часовому вимірі знайдено три нові динамічні моди, тобто поверх звичайних двох поляризацій ґравітонів, таким чином, загалом $2 + 3 = 5$, тоді як робота [30] наполягала лише на одній новій динамічній моді, а отже, загалом на трьох. Остання робота [31] є, ймовірно, найточнішою, хоча досі немає дискусій про те, як стрибають числа у фазовому просторі, і які необхідні припущення для отримання повної кількості заявлених мод. Постійні розв'язки $\mathbb{T}$ без можливих варіацій навіть у збуреннях не враховуються.

У роботі [30], яка нарахувала менше динамічних мод, допущена очевидна помилка. А саме, просторові похідні допоміжного скалярного поля, що дорівнює $\mathbb{T}$, не були враховані в дужках Пуассона [31]. Виходячи з цього, досить спокусливо зробити висновок про те, що реальна кількість нових динамічних мод дорівнює трьом. Однак загадка полягає в тому, що, наскільки я знаю, це не те, що коли-небудь спостерігалося в явних обчисленнях за теорією збурень. Я вже згадував про лише нуль нових мод у слабкій ґравітації і в космології. З іншого боку, використовуючи залишкові симетрії [8], можна отримати безліч інших розв'язків з метрикою Мінковського і $\mathbb{T} = 0$. Вивчаючи збурення відносно цих розв'язків, ми бачимо щонайбільше "майже одну" додаткову моду [26], причому слово "майже" означає якесь дивне обмеження свободи вибору для умов Коші.

Як це може бути? Нагадаємо, що помилка в гамільтоніані полягала в нехтуванні просторовим градієнтом $\mathbb{T}$. Однак, якщо ми не вибираємо несиметричні конфігурації [25], космологічний простір-час здебільшого має часово-подібний градієнт, якщо ми не говоримо про різкі стрибки чи щось подібне. Тоді можна було б (частково) зафіксувати калібрування $\mathbb{T}(t, \mathbf{x}) = t$ як для фону, так і для збурень, і тоді, можливо, використати аналіз статті [30]. Якщо це так, то схоже, що в цій конкретній підмножині точок фазового простору є розшаровування. За винятком того, що така ситуація не є універсальною для всіх можливих режимів, це дещо схоже на випадок полів [32].

Щоб краще побачити, що відбувається, припустімо, що ми зафіксували калібрування у вигляді $\mathbb{T} = t$ і $g_{0i} = 0$. У цьому випадку останній член у рівняннях (14) набуває вигляду $f_{TT} \cdot S_{\mu\nu 0}$. Він містить максимум перші похідні і не дає внесок у в'язі гамільтоніана (часовий компонент рівняння). Антисиметричні рівняння мають вигляд $S_{\mu\nu 0} - S_{\nu\mu 0} = 0$. Для шести лоренцевих змінних ми отримуємо три рівняння для швидкостей через комбінації $\mathfrak{F}^a_{0i}$ (13) у змішаних компонентах. Водночас три інші (просторові) антисиметричні рівняння означають лише те, що $\eta_{ab} e^a_0 \mathfrak{F}^b_{ij} = 0$, і не вимагають початкових даних. Три початкові дані для рівнянь $\mathfrak{F}^a_{0i}$ також обмежені однією умовою $\mathbb{T} = t$, і все це справді виглядає як одна додаткова мода у всій лоренцевій області.

Відзначимо також, що тепер більш зрозуміло, що сталося в космології [16]. Скалярна частина рівняння $S_{ij0} - S_{ji0} = 0$ просто зникає, що призводить до того, що кількість рівнянь стає на меншою на одиницю, оскільки немає скалярного внеску в $\eta_{ab} e^a_0 \mathfrak{F}^b_{ij}$. Просто неможливо мати антисиметричний відносно i та j лінійний вираз для скалярів. Для лінійних збурень псевдоскаляр належить до випадкової калібрувальної симетрії, оскільки він не впливає на скаляр кручення $\mathbb{T}$, навіть на квадратичному рівні. Інтуїтивно можна зробити висновок про те, що додаткова свобода калібрування накладає додаткові умови (в'язі), а отже, не буде ніяких нових динамічних мод. Зауважте, що принаймні у випадках викривлених просторів [28] є ще над чим подумати.

Водночас у випадку статичних сферично-симетричних розв'язків маємо калібрування $\mathbb{T} = \mathbb{T}(r)$. Потім є додатковий член із похідними у в'язі гамільтоніана, і всі шість антисиметричних рівнянь містять швидкості всередині величин $\mathfrak{F}^a_{0i}$ (13) через компоненти$S_{\mu\nu r} - S_{\nu\mu r}$. Цілком можливо, що мова йде про три нові динамічні ступені вільності. На жаль, важко в явному вигляді аналізувати збурення навколо таких розв'язків через відсутність відомих точних незбурених розв'язків, за винятком досить проблематичних випадків комплекснозначних тетрад [33]. Ймовірно, можливим шляхом було б робити збурення навколо конструкцій плоского горизонту [34], навіть якщо вони набагато менш фізичні.

Зауважте також, що, враховуючи такі відмінності для різних типів поведінки $\mathbb{T}$, не повинно бути нічого дивного в тому, що умови Коші можуть виглядати досить нерегулярними [26] для збурень навколо розв'язків $\mathbb{T} = 0$ або будь-якого іншого постійного значення. Перехід до розв'язків із постійним $\mathbb{T}$ як до найпростіших, тепер виглядає навіть більш підозрілим.

Нарешті, я повинен зазначити, що динамічні проблеми $f(\mathbb{T})$ також згадувалися в [35] вже десять років тому дещо непрозорою мовою характеристик. Крім "біфуркації в'язі", існувала також непередбачуваність еволюції у формі додаткової свободи калібрування. Додаткова калібрувальна свобода внаслідок неповного порушення лоренцевої симетрії може бути гарною, якщо її можна застосовувати стабільним способом і не поширювати на метричний сектор. Ані перше [15], ані останнє [36], здається, не стосується модифікованих телепаралельних структур, принаймні в найпростіших випадках, і тому наявність залишкових симетрій [8] нам зовсім не допомагає [37]. На мій погляд, ми повинні звернути більше уваги на роботи [35, 36, 37], хоча я і не вірю багатьом їхнім тлумаченням.

7. Обговорення і висновки

Цікавий урок, який слід засвоїти, полягає в тому, що модифікація телепаралельної ґравітації є дуже небезпечною справою. При цьому дуже часто ми робимо безпідставні висновки. Одним із найцікавіших для мене таких випадків є твердження про "духів" у новій загальній теорії відносності за винятком випадку "одного параметра" [5]. Коли ми вводимо в дію додаткові похідні, заради формалізму спінового проектора, ми не замислюємося над тим, наскільки це змінює розглядувану модель.

Я думаю, що стаття [19] торкається дуже цікавої теми і представляє дуже важливу роботу. Настав час переосмислити всі обмеження, накладені на різні метрично-афінні моделі ґравітації, сліпо покладаючись на звичайні ідеї квантової теорії поля (QFT), які можуть не завжди працювати. У той самий час, головне твердження [19] про те, що у векторному секторі спотерігаються "духи", не має належних доказів. По суті, кожна теорія з декількома змінними може бути переписана в термінах деяких мод із в'язями і функцією, що задовольняє рівнянню з вищими похідними. Можна було б сказати, що давня стаття [5] була більш інформативною в цьому відношенні. Незважаючи на те, що також не можна мати на увазі нестабільність, це явно вказує на те, що будуть проблеми з використанням звичайних методів QFT у цих моделях.

На мій погляд, найзагальніша нова теорія відносності є дуже перспективним варіантом, оскільки вона має чітко визначену кількість ступенів вільності. Нам ще потрібно краще вивчити питання "духів" і динамічної стабільності в цілому. Однак у більш популярних моделях, таких як $f(\mathbb{T})$, навіть цього немає. Проблеми сильного зв'язку в цих моделях настільки повсюдні, що навіть кількість ступенів вільності незрозуміла. Люди все ще широко використовують такі теорії для космології, але проблема дуже серйозна. Не варто вкладати багато зусиль у прогнозування, заплющуючи очі на те, що динаміка є дуже погано визначеною.

Хочу також зауважити, що обговорення скінченного і нескінченного сильного зв'язку [19] виглядає досить дивно. Навіть якщо ми зробимо константу тонкої структури надзвичайно великою, рівняння електродинаміки матимуть ті самі ступені вільності: дві динамічні, одну в'язь і ще одну, пов'язану із калібруванням. Це скінченний випадок. Ми лише втрачаємо здатність знаходити розв'язки за допомогою теорії збурень, не кажучи вже про квантування. З іншого боку, якщо нам не вистачає деяких мод у лінійному аналізі, це пов'язано із нескінченно сильним зв'язком і проблемою погано визначених початкових значень, навіть хоча моди зазвичай спостерігаються у вищих порядках [20].

Говорячи у загальних рисах, на переважно інтуїтивному рівні, зауважимо, що коефіцієнт перед кінетичним членом дорівнює нулю, і це означає, що канонічне нормування поля призводить до того, що коефіцієнт у потенціальному члені розходиться, звідси і назва. Якщо зв'язок сильний, але без таких сингулярностей, тоді рівняння можна вивчати математично, навіть якщо ми не маємо уявлення про те, як зробити його квантовим. Розуміння квантової фізики є окремою великою проблемою. Проблема $f(\mathbb{T})$ полягає в тому, що навіть на суто класичному рівні вона дуже погано визначена, і не видається можливим надати їй якогось чітко визначеного змісту, щоб стали можливими надійні розрахунки.

1. Jose Beltrán Jiménez, L. eisenberg, T.S. Koivisto. The Geometrical Trinity of gravity. *Universe* **5**, 173 (2019). arXiv:1903.06830.
2. D. Aguiar Gomes, Jose Beltrán Jiménez, T.S. Koivisto. Energy and entropy in the Geometrical Trinity of gravity. *Phys. Rev. D* **107** (2023) 024044. arXiv:2205.09716.
3. D. Aguiar Gomes, Jose Beltrán Jiménez, T.S. Koivisto. General parallel cosmology. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **12**, 010 (2023). arXiv:2309.08554.
4. A. Golovnev. A pamphlet against the energy. arXiv: 2306.12895.
5. P. van Nieuwenhuizen. On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation. *Nucl. Phys. B* **60**, 478 (1973).
6. A. Golovnev, A.N. Semenova, V.P. Vandeev. Gravitational waves in new general relativity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **01**, 003 (2024). arXiv:2309.02853.
7. R. Ferraro, F. Fiorini. Modified teleparallel gravity: Inflation without inflaton. *Phys. Rev. D* **75**, 084031 (2007). arXiv:gr-qc/0610067.
8. R. Ferraro, F. Fiorini. Remnant group of local Lorentz transformations in $f(T)$ theories. *Phys. Rev. D* **91**, 064019 (2015). arXiv:1412.3424.
9. A. Golovnev, M.J. Guzmán. Foundational issues in $f(T)$ gravity theory. *Intern. J. Geomet. Meth. Modern Phys.* **18**, 2140007 (2021). arXiv:2012.14408.
10. R. Ferraro, M.J. Guzmán. Hamiltonian formulation of teleparallel gravity. *Phys. Rev. D* **94**, 104045 (2016). arXiv:1609.06766.
11. K. Hayashi, T. Shirafuji. New general relativity. *Phys. Rev. D* **19**, 3524 (1979).
12. A. Golovnev, A.N. Semenova, V.P. Vandeev. Static spherically symmetric solutions in New General Relativity. *Classical and Quantum Gravity* **41**, 055009 (2024). arXiv:2305.03420.
13. A. Golovnev, A.N. Semenova, V.P. Vandeev. Conformal transformations and cosmological perturbations in New General Relativity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04**, 064 (2024). arXiv:2312.16021.
14. H. Asukūla, S. Bahamonde, M. Hohmann, V. Karanasou, Ch. Pfeifer, J.L. Rosa. Spherically symmetric vacuum solutions in 1-Parameter New General Relativity and their phenomenology. arXiv:2311.17999.
15. J.B. Jimenez, K.F. Dialektopoulos. Non-linear obstructions for consistent New General Relativity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **01**, 018 (2020). arXiv:1907.10038.
16. A. Golovnev, T. Koivisto. Cosmological perturbations in modified teleparallel gravity models. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 012 (2018). arXiv:1808.05565.
17. A. Golovnev. Perturbations in $f(T)$ cosmology and the spin connection. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04**, 014 (2020). arXiv:2001.10015.
18. A. Golovnev, M.J. Guzmán. Bianchi identities in $f(T)$ gravity: Paving the way to confrontation with astrophysics. *Phys. Lett. B* **810**, 135806 (2020). arXiv:2006.08507.
19. S. Bahamonde, D. Blixt, K.F. Dialektopoulos, A. Hell. Revisiting stability in New General Relativity. arXiv: 2404.02972.
20. A. Golovnev. On the degrees of freedom count on singular phase space submanifolds. arXiv:2311.10690.
21. D. Blixt, R. Ferraro, A. Golovnev, M.J. Guzmán. Lorentz gauge-invariant variables in torsion-based theories of gravity. Phys. Rev. D **105**, 084029 (2022). arXiv:2201.11102.
22. C. Deffayet, A. Held, Sh. Mukohyama, A. Vikman. Global and local stability for ghosts coupled to positive energy degrees of freedom. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 031 (2023). arXiv:2305.09631.
23. A. Golovnev. Issues of Lorentz-invariance in $f(T)$ gravity and calculations for spherically symmetric solutions. *Classical and Quantum Gravity* **38**, 197001 (2021). arXiv: 2105.08586.
24. C. Bejarano, R. Ferraro, M.J. Guzmán. Kerr geometry in $f(T)$ gravity. *Eur. Phys. J. C* **75**, 77 (2015). arXiv: 1412.0641.
25. C. Bejarano, R. Ferraro, M.J. Guzmán. McVittie solution in $f(T)$ gravity. *Eur. Phys. J. C* **77**, 825 (2017). arXiv: 1707.06637.
26. A. Golovnev, M.J. Guzmán. Non-trivial Minkowski backgrounds in $f(T)$ gravity. *Phys. Rev. D* **103**, 044009 (2021). arXiv:2012.00696.
27. K. Izumi, Y.Ch. Ong. Cosmological perturbation in $f(T)$ gravity revisited. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 029 (2013). arXiv:1212.5774.
28. S. Bahamonde, K.F. Dialektopoulos, M. Hohmann, J. Levi Said, Ch. Pfeifer, E.N. Saridakis. Perturbations in non-flat cosmology for $f(T)$ gravity. *Eur. Phys. J. C* **83**, 193 (2023). arXiv:2203.00619.
29. M. Li, R.-X. Miao, Y.-G. Miao. Degrees of freedom of $f(T)$ gravity. *J. High Energy Phys.* **07**, 108 (2011). arXiv: 1105.5934.
30. R. Ferraro, M.J. Guzmán. Hamiltonian formalism for $f(T)$ gravity. *Phys. Rev. D* **97**, 104028 (2018). arXiv:1802.02130.
31. M. Blagojević, J.M. Nester. Local symmetries and physical degrees of freedom in $f(T)$ gravity: A Dirac Hamiltonian constraint analysis. *Phys. Rev. D* **102**, 064025 (2020). arXiv:2006.15303.
32. J. Bhattacharyya, A. Coates, M. Colombo, A.E. Gümrükçüoğlu, Th.P. Sotiriou. Revisiting the cuscuton as a Lorentz-violating gravity theory. *Phys. Rev. D* **97**, 064020 (2018). arXiv:1612.01824.
33. S. Bahamonde, A. Golovnev, M.J. Guzmán, J. Levi Said, Ch. Pfeifer. Black holes in $f(T,B)$ gravity: Exact and perturbed solutions. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **01**, 037 (2022). arXiv:2110.04087.
34. A. Awad, A. Golovnev, M.J. Guzmán, W. El Hanafy. Revisiting diagonal tetrads: New Black Hole solutions in $f(T)$ gravity. *Eur. Phys. J. C* **82**, 972 (2022). arXiv:2207.00059.
35. Y.Ch. Ong, K. Izumi, J.M. Nester, P. Chen. Problems with propagation and time evolution in $f(T)$ gravity. *Phys. Rev. D* **88**, 024019 (2013). arXiv:1303.0993.
36. K. Izumi, J.-A. Gu, Y.Ch. Ong. Acausality and nonunique evolution in generalized teleparallel gravity. *Phys. Rev. D* **89**, 084025 (2014). arXiv:1309.6461.

37. P. Chen, K. Izumi, J.M. Nester, Y.Ch. Ong. Remnant symmetry, propagation and evolution in $f(T)$ gravity. *Phys. Rev. D* **91**, 064003 (2015). arXiv:1412.8383.

Одержано 24.05.24.
Переклад на українську мову Ю.А. Куца

A. Golovnev

DEGREES OF FREEDOM
IN MODIFIED TELEPARALLEL GRAVITY

I discuss the issue of degrees of freedom in modified teleparallel gravity. These theories do have an extra structure on top of the usual (pseudo)Riemannian manifold, that of a flat parallel transport. This structure is absolutely abstract and unpredictable (pure gauge) in GR-equivalent models, however, it becomes physical upon modifications. The problem is that, in the most popular models, this local symmetry is broken but not stably So, hence the infamous strong coupling issues. The Hamiltonian analyses become complicated and with contradictory results. A funny point is that what we see in available linear perturbation treatments of $f(T)$ gravity is much closer to the analysis with less dynamical degrees of freedom which has got a well-known mistake in it, while the more accurate work predicts much more of dynamics than what has ever been seen till now. I discuss possible reasons behind this puzzle, and also argue in favor of studying the most general New GR models which are commonly ignored due to suspicion of ghosts.

K e y w o r d s: modified teleparallel gravity, (pseudo)Riemannian manifold, New General Relativity (New GR) models, quantum-field-theory.