О.О. ВАХНЕНКО,[1] В.О. ВАХНЕНКО[2]

[1] Відділ теорії нелінійних процесів в конденсованих середовищах,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова, НАН України
(Вул. Метрологічна 14-б, Київ 03143; e-mail: vakhnenko@bitp.kyiv.ua; https://orcid.org/0000-0001-8371-9499)

[2] Відділ динаміки твердого деформівного тіла,
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна, НАН України
(Вул. Богдана Хмельницького 63-б, Київ 01054; https://orcid.org/0000-0002-1250-9563)

УДК 539

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ НОВИХ ІНТЕҐРОВНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА КВАЗІОДНОВИМІРНИХ ҐРАТКАХ. ПАРАМЕТРИЧНО УРУХОМЛЮВАНА НЕЛІНІЙНА СИСТЕМА ПСЕВДОЗБУДЖЕНЬ НА ДВОНІЖКОВІЙ ДРАБИНЧАТІЙ ҐРАТЦІ

Спираючись на засадничі принципи побудови інтеґровних еволюційних нелінійних систем на квазіодновимірних ґратках запропоновано нову нелінійну інтеґровну систему параметрично урухомлюваних псевдоекситонів на регулярній двоніжковій драбинчатій ґратці. Початкова (прототипна) форма системи є виводжуваною в термінах напівдискретного рівняння нульової кривини зі спектральним та еволюційним операторами, заданими спеціально підлаштованими 3×3 квадратовими матрицями. Хоча найнижчі збережні локальні густини, знайдені нами прямим рекурсивним методом, і не вказали на можливу алгебричну будову Гамільтонової функції системи, проте евристично обґрунтований пошук вдалого двоступеневого перетворення прототипних польових функцій до фізично вмотивованих дав фізично змістовну нелінійну інтеґровну систему з часозалежними повздовжніми та поперечними параметрами міжвузлових зв'язків. Часові залежності параметрів міжвузлових зв'язків трансформованої системи є послідовно означеними в термінах супутнього параметричного урухомлювача, формалізованого чотирма звичайними однорідними лінійними диференційними рівняннями з часозалежними коефіцієнтами. Фізично змістовна параметрично урухомлювана нелінійна система допускає компактне Гамільтонове формулювання, в якому дві пари польових функцій набувають сенсу двох пар канонічно спряжених польових амплітуд. Насамкінець розлого висвітлено математичні властивості явного параметричного урухомлювання коливного типу.

Ключові слова: нелінійна динаміка, інтеґровна система, двоніжкова драбинчата ґратка, параметричне урухомлювання, гамільтонова динаміка.

1. Вступ

Починаючи з середини минулого століття тенденція переходу фізичного та математичного розгляду багатокомпонентних фізичних систем за межі суто лінійних описів ставала все більш виразною. Тут варто звернути увагу на піонерський нелінійний підхід, започаткований Ландау та Пекарем в теорії поляронів [1], а також майже нелінійний розгляд, запропонований Боголюбовим для адіабатичної теорії збурень у задачі про взаємодію частинок із квантовим полем [2]. Ці та низка інших майбутніх досліджень [3–6] породили дуже генеративну концепцію повністю інтеґровних нелінійних моделей Шрьодінґера як у їхньому диференційно-диференційному (неперервному) [7–9], так і диференційно-різницевому (напівдискретному) [9–16] варіантах виконання.

Цитування: Вахненко О.О., Вахненко В.О. Побудова та аналіз нових інтеґровних нелінійних динамічних систем на квазіодновимірних ґратках. Параметрично урухомлювана нелінійна система псевдозбуджень на двоніжковій драбинчатій ґратці. *Укр. фіз. журн.* **69**, № 8, 579 (2024).

Завдяки нещодавньому технологічному прогресу в синтезі низькорозмірних нанорозмірних надструктур [17–21], які розглядаються як метаматеріали, що є перспективними для мікроелектронних пристроїв, ми вважаємо, що напівдискретні повністю інтеґровні моделі нелінійних збуджень і нелінійних псевдозбуджень на квазіодновимірних ґратках будуть мати значний застосовний попит.

У цій статті ми пропонуємо нову параметрично керовану нелінійну інтеґровну систему псевдозбуджень на двоніжковій драбинчатій ґратці. Аби розв'язати цю задачу, ми виходимо з основних принципів розроблення напівдискретних нелінійних інтеґровних систем на квазіодновимірних ґратках, які були ретельно перелічені в нашій попередній статті [22]. Крім того, ми окреслюємо основні кроки до створення нескінченної ієрархії локальних законів збереження в термінах прямого рекурентного методу [13, 23–26]. Також з'ясовуємо евристичні особливості належного налаштування початково незафіксованих функцій вибірки.

Важливо, що кінцева форма розробленої напівдискретної нелінійної інтеґровної системи допускає стисле динамічне Гамільтонове формулювання, що характеризується стандартною дужкою Пуассона. Однак сама процедура стандартизації виявилася абсолютно відмінною від тієї, що стосується інтеґровної нелінійної системи Шрьодінґера на двоніжковій драбинчатій ґратці з фонорегульовним міжвузловим резонансним зв'язком [27, 28].

2. Допоміжна матричнозначна лінійна задача та відповідний анзатц для спектральної та еволюційної матриць

Дотримуючись загальних правил розроблення інтеґровних напівдискретних нелінійних систем на регулярних квазіодновимірних ґратках [12, 22, 29], почнемо розгляд з набору двох допоміжних матричних рівнянь,

$$X(n+1|\lambda) = L(n|\lambda)X(n|\lambda) \tag{2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}X(n|\lambda) = A(n|\lambda)X(n|\lambda), \tag{2.2}$$

які є лінійними відносно допоміжної матриці-функції $X(n|\lambda)$. Тут символ n позначає змінну дискретної просторової координати, що змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Символ τ позначає безперервну змінну часу. Символ λ позначає незалежний від часу спектральний параметр. Аби досягти поставленої мети, всі три залучені величини – $X(n|\lambda)$, $L(n|\lambda)$, та $A(n|\lambda)$ – вважаємо квадратовими 3×3-матрицями. Спектральне рівняння (2.1) керується спектральним оператором $L(n|\lambda)$, тоді як еволюційне рівняння (2.2) – оператором еволюції $A(n|\lambda)$.

Набір допоміжних лінійних рівнянь (2.1)–(2.2) є перевизначеним. Щоб забезпечити сумісність цього перевизначеного набору, операція диференціювання за змінною часу τ та операція зсуву вздовж просторової змінної n у застосуванні до допоміжної матриці-функції $X(n|\lambda)$ у допоміжному лінійному наборі (2.1)–(2.2) має комутувати, тобто [12],

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}X(m|\lambda)\right]_{m=n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}X(n+1|\lambda). \tag{2.3}$$

Як наслідок такої комутативної процедури, ми приходимо до матричнозначної напівдискретної умови нульової кривини [29, 30]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}L(n|\lambda) = A(n+1|\lambda)L(n|\lambda) - L(n|\lambda)A(n|\lambda) \tag{2.4}$$

для допустимих форм спектрального, $L(n|\lambda)$, та еволюційного, $A(n|\lambda)$, операторів.

Нижче ми пропонуємо один із успішних варіантів, винайдених аби завдовольнити умови нульової кривини (2.4). Зокрема, наша пропозиція ґрунтується на наступних анзатцах для спектрального, $L(n|\lambda)$, та еволюційного, $A(n|\lambda)$, операторів

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{12}(n) & f_{13}(n) \\ f_{21}(n) & f_{22}(n)+\lambda & f_{23}(n) \\ f_{31}(n) & f_{32}(n) & f_{33}(n) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

та

$$A(n|\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n)+b_{22}(n)\lambda & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

за умови виконання умови несингулярности $\det L(n|\lambda) \neq 0$. Тут залежні від простору та часу компоненти $f_{jk}(n) = f_{jk}(n|\tau)$ спектральної матриці $L(n|\lambda)$ треба розглядати як прототип функції поля майбутньої нелінійної інтеґровної системи, закодованої в рівнянні нульової кривини (2.4). З іншого боку, залежні від простору та часу компоненти $a_{jk}(n) = a_{jk}(n|\tau)$ і $b_{22}(n) = b_{22}(n|\tau)$ еволюційної матриці $A(n|\lambda)$ повинні мати здатність до специфікації, спираючись на умову нульової кривини (2.4) та певні розумні припущення щодо фізично змістовних локальних законів збереження.

3. Інтегровна напівдискретна нелінійна система в термінах прототипних функцій поля

Таким чином, вставивши запропоновані вище анзатци (2.5) та (2.6) у рівняння нульової кривини (2.4) і зібравши члени з однаковими ступенями спектрального параметра λ в кожному матричному елементі рівняння, ми можемо записати шість компонентів еволюційної матриці $A(n|\lambda)$:

$$a_{22}(n) = a_{22}, \tag{3.1}$$

$$b_{22}(n) = b_{22}, \tag{3.2}$$

$$a_{21}(n) = b_{22}f_{21}(n), \tag{3.3}$$

$$a_{12}(n+1) = f_{12}(n)b_{22}, \tag{3.4}$$

$$a_{23}(n) = b_{22}f_{23}(n), \tag{3.5}$$

$$a_{32}(n+1) = f_{32}(n)b_{22}. \tag{3.6}$$

Тут кожен із параметрів a_{22} та b_{22} може залежати від часу. Інші чотири компоненти – $a_{11}(n)$, $a_{13}(n)$, $a_{33}(n)$ $a_{31}(n)$, які називаються функціями вибору, залишаються невизначеними на даний момент. Крім того, ми відновлюємо набір із дев'яти напівдискретних нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{f}_{11}(n) &= a_{11}(n+1)f_{11}(n) + a_{13}(n+1)f_{31}(n) - \\ &- f_{11}(n)a_{11}(n) - f_{13}(n)a_{31}(n),\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{13}(n) &= a_{11}(n+1)f_{13}(n) + a_{13}(n+1)f_{33}(n) - \\ &- f_{11}(n)a_{13}(n) - f_{13}(n)a_{33}(n),\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{33}(n) &= a_{31}(n+1)f_{13}(n) + a_{33}(n+1)f_{33}(n) - \\ &- f_{31}(n)a_{13}(n) - f_{33}(n)a_{33}(n),\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{31}(n) &= a_{31}(n+1)f_{11}(n) + a_{33}(n+1)f_{31}(n) - \\ &- f_{31}(n)a_{11}(n) - f_{33}(n)a_{31}(n),\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{22}(n) &= b_{22}f_{21}(n+1)f_{12}(n) + b_{22}f_{23}(n+1)f_{32}(n) - \\ &- f_{21}(n)f_{12}(n-1)b_{22} - f_{23}(n)f_{32}(n-1)b_{22},\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{21}(n) &= b_{22}f_{21}(n+1)f_{11}(n) + a_{22}f_{21}(n) + \\ &+ b_{22}f_{23}(n+1)f_{31}(n) - f_{21}(n)a_{11}(n) - \\ &- f_{22}(n)b_{22}f_{21}(n) - f_{23}(n)a_{31}(n),\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{12}(n) &= a_{11}(n+1)f_{12}(n) + f_{12}(n)b_{22}f_{22}(n) + \\ &+ a_{13}(n+1)f_{32}(n) - f_{11}(n)f_{12}(n-1)b_{22} - \\ &- f_{12}(n)a_{22} - f_{13}(n)f_{32}(n-1)b_{22},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{23}(n) &= b_{22}f_{21}(n+1)f_{13}(n) + a_{22}f_{23}(n) + \\ &+ b_{22}f_{23}(n+1)f_{33}(n) - f_{21}(n)a_{13}(n) - \\ &- f_{22}(n)b_{22}f_{23}(n) - f_{23}(n)a_{33}(n),\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\dot{f}_{32}(n) &= a_{31}(n+1)f_{12}(n) + f_{32}(n)b_{22}f_{22}(n) + \\ &+ a_{33}(n+1)f_{32}(n) - f_{31}(n)f_{12}(n-1)b_{22} - \\ &- f_{32}(n)a_{22} - f_{33}(n)f_{32}(n-1)b_{22},\end{aligned} \tag{3.15}$$

які називаються прототипною напівдискретною нелінійною інтеґровною системою. І саме ця система нас цікавить. Крапка над змінною в кожному з написаних вище рівнянь (3.7)–(3.9) означає диференціювання цієї змінної за змінною часу τ.

Завдяки можливості бути представленою у стислій матричній формі рівняння нульової кривини (2.4), одержана напівдискретна нелінійна система (3.7)–(3.9) набуває статусу системи інтеґровної за Лаксом. Як правило, цей факт також підтверджує інтеґровність напівдискретної нелінійної системи в сенсі Ліувіля [30]. У будь-якому випадку інтеґровність за Лаксом забезпечує строгі методи для одержання точних аналітичних розв'язків системи, а також для генерування нескінченної ієрархії локальних законів збереження.

4. Основні кроки у створенні локальних законів збереження

Згідно з визначенням, будь-який окремий локальний закон збереження, пов'язаний з певною напівдискретною системою на квазіодновимірній регульовній ґратці, можна записати у такій формі:

$$\dot{\rho}(n) = J(n) - J(n+1), \tag{4.1}$$

де функції $\rho(n) = \rho(n|\tau)$ і $J(n) = J(n|\tau)$ позначають локальну густину та локальний струм, відповідно.

Найпростіший спосіб створити принаймні деякі локальні закони збереження для інтеґровної напівдискретної системи на квазіодновимірній ґратці базується на універсальному локальному законі збереження

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln\left[\det L(n|\lambda)\right] = \mathrm{Sp}A(n+1|\lambda) - \mathrm{Sp}A(n|\lambda), \tag{4.2}$$

який легко одержати з представлення системи з нульовою кривиною (2.4) завдяки тотожності

$$\mathrm{Sp}\left(L^{-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}L\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln\left(\det L\right), \tag{4.3}$$

що дійсна для будь-якої неособливої ($\det L \neq 0$) квадратової матриці L.

Таким чином, для спектрального, $L(n|\lambda)$, та еволюційного, $A(n|\lambda)$, операторів, визначених запропонованими раніше формулами (2.5) і (2.6)–(3.6), процедура, заснована на універсальному локальному законі збереження (4.2), дає лише два локальні закони збереження

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln\left[W_0(n)\right] = a_{11}(n+1) + a_{22}(n+1) - \\ - a_{11}(n) - a_{22}(n), \tag{4.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln\left[W_1(n)\right] = a_{11}(n+1) + a_{22}(n+1) - \\ - a_{11}(n) - a_{22}(n), \tag{4.5}$$

де локальні густини $\ln[W_0(n)]$ та $\ln[W_1(n)]$ мають вигляд

$$W_0(n) = f_{21}(n)f_{13}(n)f_{32}(n) + f_{23}(n)f_{31}(n)f_{12}(n) - \\ - f_{21}(n)f_{33}(n)f_{12}(n) - f_{23}(n)f_{11}(n)f_{32}(n) + \\ + [f_{11}(n)f_{33}(n) - f_{13}(n)f_{31}(n)]f_{22}(n) \tag{4.6}$$

та

$$W_1(n) = f_{11}(n)f_{33}(n) - f_{13}(n)f_{31}(n), \tag{4.7}$$

відповідно.

На щастя, існує декілька технічно різних, але в основному еквівалентних систематичних підходів для рекурсивного створення ієрархії локальних законів збереження [13, 23–26, 28] без будь-яких посилань на дані розсіювання у допоміжній спектральній задачі, а також на гамільтонову структуру, що лежить в основі ієрархії інтеґровних систем, пов'язаних з прийнятим спектральним оператором.

Наприклад, перший крок нашого власного підходу [23–25, 28] полягає у відновленні адекватного рекурсивного представлення для допоміжних величин $\Gamma_{jk}(n|\lambda)$ з таким обмеженням:

$$\Gamma_{ji}(n|\lambda)\Gamma_{ik}(n|\lambda) = \Gamma_{jk}(n|\lambda). \tag{4.8}$$

Для успішного виконання цієї задачі допоміжні величини $\Gamma_{jk}(n|\lambda)$ мають бути розкладені в певний правильний ряд за спектральним параметром λ або за оберненим спектральним параметром $1/\lambda$. Потім їх треба вставити у фундаментальний набір просторових рівнянь Ріккаті

$$\Gamma_{jk}(n+1|\lambda)\sum_{i=1}^{3}L_{ki}(n|\lambda)\Gamma_{ik}(n|\lambda) = \\ = \sum_{i=1}^{3}L_{ji}(n|\lambda)\Gamma_{ik}(n|\lambda), \tag{4.9}$$

що залежать винятково від матричних елементів $L_{jk}(n|\lambda)$ спектрального оператора $L(n|\lambda)$. Отже, кожен коефіцієнт розкладу будь-якої допоміжної величини $\Gamma_{jk}(n|\lambda)$ має постати як певний комбінований вираз, що складається з прототипних функцій поля.

Як тільки бажаної точності для рекурсивних представлень допоміжних величин $\Gamma_{jk}(n|\lambda)$ досягнуто, одержаний обрізаний ряд належить підставити в набір із трьох ($j = 1, 2, 3$) генерувальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln\left[M_{jj}(n|\lambda)\right] = B_{jj}(n+1|\lambda) - B_{jj}(n|\lambda), \tag{4.10}$$

функційні структури яких, як видно, дублюють функційну структуру типового локального закону збереження (4.1). З цієї причини величини $M_{jj}(n|\lambda)$ і $B_{jj}(n|\lambda)$, визначені формулами

$$M_{jj}(n|\lambda) = \sum_{i=1}^{3}L_{ji}(n|\lambda)\Gamma_{ij}(n|\lambda) \tag{4.11}$$

та

$$B_{jj}(n|\lambda) = \sum_{i=1}^{3}A_{ji}(n|\lambda)\Gamma_{ij}(n|\lambda), \tag{4.12}$$

слугують для створення ієрархії локальних густин та ієрархії локальних струмів, відповідно. Тут величини $A_{jk}(n|\lambda)$ означають матричні елементи оператора еволюції $A(n|\lambda)$.

Зібравши доданки з однаковими степенями спектрального параметра λ в кожному з трьох ($j = 1$, 2, 3) генерувальних рівнянь (4.10), можна відновити будь-яку потрібну кількість локальних законів збереження з їхньої нескінченної ієрархії.

Застосування описаної вище схеми генерації до кожного з трьох генерувальних рівнянь (4.10), заданих спектральною, $L(n|\lambda)$, та еволюційною, $A(n|\lambda)$, матрицями у запропонованій нами формі (2.5) та (2.6)–(3.6) показує, що принаймні декілька найнижчих збережених густин, пов'язаних з першим ($j = 1$) та третім ($j = 3$) генерувальними рівняннями, є збережними густинами досить тривіальної форми $F(n+1) - F(n)$, яка абсолютно непридатна з фізичної точки зору. Саме тому ми простежимо тут лише ключові обчислення, пов'язані з другим ($j = 2$) генерувальним рівнянням.

Перш за все, ми бачимо, що явні вирази (4.11) і (4.12), взяті для комбінованих величин $M_{22}(n|\lambda)$ і $B_{22}(n|\lambda)$, оперують тільки з двома невідомими допоміжними величинами $\Gamma_{12}(n|\lambda)$ і $\Gamma_{32}(n|\lambda)$, оскільки $\Gamma_{22}(n|\lambda) = 1$ з огляду на фундаментальні обмеження (4.8). Отже, достатньо застосувати рекурентну схему до двох із шести оригінальних рівнянь Ріккаті (4.9)

$$\Gamma_{12}(n+1|\lambda) \times$$
$$\times [f_{21}(n)\Gamma_{12}(n|\lambda) + \lambda + f_{22}(n) + f_{23}(n)\Gamma_{32}(n|\lambda)] =$$
$$= f_{11}(n)\Gamma_{12}(n|\lambda) + f_{12}(n) + f_{13}(n)\Gamma_{32}(n|\lambda), \quad (4.13)$$
$$\Gamma_{32}(n+1|\lambda) \times$$
$$\times [f_{21}(n)\Gamma_{12}(n|\lambda) + \lambda + f_{22}(n) + f_{23}(n)\Gamma_{32}(n|\lambda)] =$$
$$= f_{31}(n)\Gamma_{12}(n|\lambda) + f_{32}(n) + f_{33}(n)\Gamma_{32}(n|\lambda). \quad (4.14)$$

Виявляється, що набір із двох написаних вище нелінійних рівнянь Ріккаті (4.13) та (4.14) можна розв'язувати рекурсивно за допомогою двох розкладів у ряд

$$\Gamma_{12}(n|\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{12}(n|k)\lambda^{-k-1} \quad (4.15)$$

та

$$\Gamma_{32}(n|\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{32}(n|k)\lambda^{-k-1} \quad (4.16)$$

для двох допоміжних величин $\Gamma_{12}(n|\lambda)$ і $\Gamma_{32}(n|\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$. В результаті елементарних алгебричних розрахунків виявлено, що найнижчими коефіцієнтами розкладу є

$$\gamma_{12}(n|0) = f_{12}(n-1), \quad (4.17)$$
$$\gamma_{32}(n|0) = f_{32}(n-1), \quad (4.18)$$
$$\gamma_{12}(n|1) = f_{11}(n-1)f_{12}(n-2) +$$
$$+ f_{13}(n-1)f_{32}(n-2) - f_{12}(n-1)f_{22}(n-1), \quad (4.19)$$
$$\gamma_{32}(n|1) = f_{33}(n-1)f_{32}(n-2) +$$
$$+ f_{31}(n-1)f_{12}(n-2) - f_{32}(n-1)f_{22}(n-1). \quad (4.20)$$

Отже, генератор локальних густин $\ln[M_{22}(n|\lambda)]$, представлений через комбіновану величину $M_{22}(n|\lambda)$ [див. формулу (4.11)] з використанням розкладів (4.15) та (4.16) для $\Gamma_{12}(n|\lambda)$ та $\Gamma_{32}(n|\lambda)$, доповнених явними формулами (4.17)–(4.20), дає вирази для найнижчих коефіцієнтів розкладу $\rho_{22}(n|1)$, $\rho_{22}(n|2)$, та $\rho_{22}(n|3)$:

$$\rho_{22}(n|1) = f_{22}(n), \quad (4.21)$$
$$\rho_{22}(n|2) = f_{21}(n)f_{12}(n-1) - \frac{1}{2}f_{22}(n)f_{22}(n) +$$
$$+ f_{23}(n)f_{32}(n-1), \quad (4.22)$$
$$\rho_{22}(n|3) = f_{21}(n)f_{11}(n-1)f_{12}(n-2) +$$
$$+ f_{21}(n)f_{13}(n-1)f_{32}(n-2) +$$
$$+ f_{23}(n)f_{33}(n-1)f_{32}(n-2) +$$
$$+ f_{23}(n)f_{31}(n-1)f_{12}(n-2) -$$
$$- f_{22}(n)[f_{21}(n)f_{12}(n-1) + f_{23}(n)f_{32}(n-1)] -$$
$$- [f_{21}(n)f_{12}(n-1) + f_{23}(n)f_{32}(n-1)]f_{22}(n-1) +$$
$$+ \frac{1}{3}f_{22}(n)f_{22}(n)f_{22}(n). \quad (4.23)$$

Статус цих трьох величин як локальних збережних густин перевірено прямим обчисленням їхніх похідних за часом – $\dot{\rho}_{22}(n|1)$, $\dot{\rho}_{22}(n|2)$, та $\dot{\rho}_{22}(n|3)$ – з використанням напівдискретних нелінійних рівнянь (3.7)–(3.9) для запропонованої прототипної нелінійної інтеґровної системи.

Вираз для локального струму $J_{22}(n|1)$, пов'язаного з локальною густиною $\rho_{22}(n|1)$ (4.21), є очевидним із напівдискретного нелінійне рівняння (3.11) для $\dot{f}_{22}(n)$. Вираз для локального струму $J_{22}(n|2)$, пов'язаного з локальною густиною $\rho_{22}(n|2)$ (4.22), визначається формулою

$$J_{22}(n|3) = f_{21}(n)f_{12}(n-1)b_{22}f_{22}(n-1) +$$
$$+ f_{23}(n)f_{32}(n-1)b_{22}f_{22}(n-1) -$$
$$- f_{21}(n)f_{11}(n-1)f_{12}(n-2)b_{22} -$$
$$- f_{21}(n)f_{13}(n-1)f_{32}(n-2)b_{22} -$$
$$- f_{23}(n)f_{33}(n-1)f_{32}(n-2)b_{22} -$$
$$- f_{23}(n)f_{31}(n-1)f_{12}(n-2)b_{22}. \quad (4.24)$$

Вираз для локального струму $J_{22}(n|3)$, пов'язаного з локальною густиною $\rho_{22}(n|3)$ (4.23), виявився надто громіздким, тому ми не наводимо його заради стислости викладу.

5. Інтуїтивна фіксація функцій вибору та проміжна форма напівдискретної нелінійної інтеґровної системи

Дивлячись на одержані вирази (4.21)–(4.23) для локальних збережних густин $\rho_{22}(n|1)$, $\rho_{22}(n|2)$ та $\rho_{22}(n|3)$, ми бачимо, що жодного з них не можна розглядати як густину функції Гамільтона чи густину збуджень, пов'язаних з досліджуваною прототипною напівдискретною нелінійною інтеґровною системою (3.7)–(3.9).

Вирішальним кроком для подолання цієї серйозної перешкоди є фіксація довільних функцій вибору $a_{11}(n)$, $a_{13}(n)$, $a_{33}(n)$, $a_{31}(n)$ відповідно до підставово вмотивованої вимоги. Після ретельного аналізу нашого прототипу інтеґровної напівдискретної нелінійної системи (3.7)–(3.9) ми вирішили втиснути функцію

$$\varrho_{22}(n) = f_{21}(n) f_{12}(n) + f_{23}(n) f_{32}(n) \tag{5.1}$$

у прокрустове ложе локального закону збереження

$$\dot{\varrho}_{22}(n) = \mathcal{J}_{22}(n) - \mathcal{J}_{22}(n+1). \tag{5.2}$$

Наші інтуїтивні міркування, підкріплені елементарними аналітичними розрахунками, дали такі результати:

$$a_{11}(n) = a_{11}, \tag{5.3}$$

$$a_{13}(n) = a_{13}, \tag{5.4}$$

$$a_{33}(n) = a_{33}, \tag{5.5}$$

$$a_{31}(n) = a_{31} \tag{5.6}$$

та

$$f_{11}(n) = f_{11}, \tag{5.7}$$

$$f_{13}(n) = f_{13}, \tag{5.8}$$

$$f_{33}(n) = f_{33}, \tag{5.9}$$

$$f_{31}(n) = f_{31}. \tag{5.10}$$

Іншими словами, функції $a_{11}(n)$, $a_{13}(n)$, $a_{33}(n)$, $a_{31}(n)$ та $f_{11}(n)$, $f_{13}(n)$, $f_{33}(n)$, $f_{31}(n)$ мають бути незалежними від змінної просторової координати n. Проте кожна з цих функцій може залежати від часу.

Що стосується локального струму $\mathcal{J}_{22}(n)$, пов'язаного з локальною густиною $\varrho_{22}(n)$ (5.1), то він набуває вигляду

$$\mathcal{J}_{22}(n) = -b_{22} f_{21}(n) f_{11} f_{12}(n-1) - \\ - b_{22} f_{21}(n) f_{13} f_{32}(n-1) - b_{22} f_{23}(n) f_{31} f_{12}(n-1) - \\ - b_{22} f_{23}(n) f_{33} f_{32}(n-1). \tag{5.11}$$

Хоча вираз (5.1) для $\varrho_{22}(n)$ виглядає як локальна густина збуджень або локальна густина заряду, однак ця наївна інтерпретація виявляється оманливою.

Водночас, завдяки просторовій незалежності функцій вибору a_{11} та a_{33} [див. формули (5.3) та (5.5)], локальні закони збереження (4.4) і (4.5) перетворюються на дві диференційні в'язі

$$\dot{W}_0(n) = 0, \tag{5.12}$$

$$\dot{W}_1(n) = 0 \tag{5.13}$$

на функціональні вирази (4.6) та (4.7) для $W_0(n)$ та $W_1(n)$, відповідно.

Друга диференційна в'язь (5.13) вказує на те, що просторонезалежний вираз $f_{11} f_{33} - f_{13} f_{31}$ має бути також і часонезалежним, тобто

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left[f_{11} f_{33} - f_{13} f_{31} \right] = 0. \tag{5.14}$$

Що стосується першої диференціальної в'язі (5.12), ми вважаємо за краще перетворити її на цілковиту тотожність за допомогою підстановки

$$f_{22}(n) = h_{22}(n) + \\ + \frac{f_{21}(n) f_{33} f_{12}(n) + f_{23}(n) f_{11} f_{32}(n)}{f_{11} f_{33} - f_{13} f_{31}} - \\ - \frac{f_{21}(n) f_{13} f_{32}(n) + f_{23}(n) f_{31} f_{12}(n)}{f_{11} f_{33} - f_{13} f_{31}}, \tag{5.15}$$

яка означає, що функція $f_{22}(n)$ втратила свій статус функції незалежного поля. Тут $h_{22}(n)$ – часонезалежна функція інтеґрування. Для того щоб зберегти однорідність простору, ми також припускаємо її незалежність від просторової координати n. Таким чином, маємо

$$h_{22}(n) = h_{22}, \tag{5.16}$$

де

$$\dot{h}_{22} = 0. \tag{5.17}$$

Взявши до уваги результати, одержані в цьому розділі, ми одержуємо проміжну форму напівдискретної нелінійної інтеґровної системи у вигляді:

$$\dot{f}_{11} = a_{13}f_{31} - f_{13}a_{31}, \quad (5.18)$$

$$\dot{f}_{13} = a_{11}f_{13} + a_{13}f_{33} - f_{11}a_{13} - f_{13}a_{33}, \quad (5.19)$$

$$\dot{f}_{33} = a_{31}f_{13} - f_{31}a_{13}, \quad (5.20)$$

$$\dot{f}_{31} = a_{31}f_{11} + a_{33}f_{31} - f_{31}a_{11} - f_{33}a_{31}, \quad (5.21)$$

$$\dot{f}_{21}(n) = b_{22}f_{21}(n+1)f_{11} + a_{22}f_{21}(n) + {} + b_{22}f_{23}(n+1)f_{31} - f_{21}(n)a_{11} - {} - f_{22}(n)b_{22}f_{21}(n) - f_{23}(n)a_{31}, \quad (5.22)$$

$$\dot{f}_{12}(n) = a_{11}f_{12}(n) + f_{12}(n)b_{22}f_{22}(n) + {} + a_{13}f_{32}(n) - f_{11}f_{12}(n-1)b_{22} - {} - f_{12}(n)a_{22} - f_{13}f_{32}(n-1)b_{22}, \quad (5.23)$$

$$\dot{f}_{23}(n) = b_{22}f_{21}(n+1)f_{13} + a_{22}f_{23}(n) + {} + b_{22}f_{23}(n+1)f_{33} - f_{21}(n)a_{13} - {} - f_{22}(n)b_{22}f_{23}(n) - f_{23}(n)a_{33}, \quad (5.24)$$

$$\dot{f}_{32}(n) = a_{31}f_{12}(n) + f_{32}(n)b_{22}f_{22}(n) + {} + a_{33}f_{32}(n) - f_{31}f_{12}(n-1)b_{22} - {} - f_{32}(n)a_{22} - f_{33}f_{32}(n-1)b_{22}. \quad (5.25)$$

Тут треба пам'ятати, що функцію $f_{22}(n)$ визначено раніше одержаними формулами (5.15)–(5.17).

Не втрачаючи загальности ми спрощуємо наш наступний розгляд, припускаючи, що кожен із двох часозалежних параметрів a_{22} і h_{22} дорівнює нулю

$$a_{22} = 0, \quad (5.26)$$

$$h_{22} = 0. \quad (5.27)$$

Це припущення можна легко виправдати калібрувальним перетворенням вихідних функцій поля $f_{21}(n)$, $f_{12}(n)$, $f_{23}(n)$, $f_{32}(n)$ до трансформованих функцій поля $F_{21}(n)$, $F_{12}(n)$, $F_{23}(n)$, $F_{32}(n)$. Ці перетворення описуємо формулами

$$f_{21}(n) = F_{21}(n)\exp\left[+A_{22} - C_{22}\right], \quad (5.28)$$

$$f_{12}(n) = F_{12}(n)\exp\left[-A_{22} + C_{22}\right], \quad (5.29)$$

$$f_{23}(n) = F_{23}(n)\exp\left[+A_{22} - C_{22}\right], \quad (5.30)$$

$$f_{32}(n) = F_{32}(n)\exp\left[-A_{22} + C_{22}\right], \quad (5.31)$$

$$\dot{A}_{22} = a_{22}, \quad (5.32)$$

$$\dot{C}_{22} = b_{22}h_{22}. \quad (5.33)$$

Інше спрощення полягає у введенні перемасштабованих, часозалежних параметрів a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33} за допомогою формули

$$a_{jk} = b_{22}\mathrm{a}_{jk} \quad (5.34)$$

та перемасштабованої часової змінної $\mathcal{T}$ за допомогою диференціальної рівности

$$\mathrm{d}\mathcal{T} = b_{22}\mathrm{d}\tau. \quad (5.35)$$

Це спостереження дає нам змогу задати параметр b_{22} простою рівністю

$$b_{22} = 1 \quad (5.36)$$

у просторово-часовій частині (5.22)–(5.25) одержаної проміжної напівдискретної нелінійної системи (5.18)–(5.25).

Зрештою, три прийняті спрощення (5.26), (5.27), та (5.36) не відкидають системні параметричні урухомлювальні джерела, що проявляються через допустимі часові залежності параметрів a_{11}, a_{13}, a_{33}, a_{31}, а також часові залежності просторонезалежних урухомлювальних функцій f_{11}, f_{13}, f_{33}, f_{31}. Насправді, параметрично урухомлювальну систему як таку доцільно асоціювати лише з останніми чотирма одержаними рівняннями (5.22)–(5.25), а перші чотири рівняння (5.18)–(5.21) розглядати як основний параметричний урухомлювач.

6. Напівдискретна нелінійна інтеґровна система в термінах фізично вмотивованих функцій поля

Основна ідея конвертування проміжної напівдискретної нелінійної інтеґровної системи (5.18)–(5.25) до звичної Гамільтонової форми полягає у прийнятній трансформації її початкових польових функцій $f_{21}(n)$, $f_{12}(n)$, $f_{23}(n)$, $f_{32}(n)$ до нових $g_{21}(n)$, $g_{12}(n)$, $g_{23}(n)$, $g_{32}(n)$, спираючись на певну фізично зрозумілу умову.

Аби реалізувати цю доречну ідею, спочатку розглянемо набір формул перетворення

$$g_{21}(n) = f_{21}(n)e_{11} + f_{23}(n)e_{31}, \quad (6.1)$$

$$g_{12}(n) = e_{11}f_{12}(n) + e_{13}f_{32}(n), \quad (6.2)$$

$$g_{23}(n) = f_{21}(n)e_{13} + f_{23}(n)e_{33}, \quad (6.3)$$

$$g_{32}(n) = e_{31}f_{12}(n) + e_{33}f_{32}(n), \quad (6.4)$$

специфіковані умовою

$$[g_{21}(n)g_{12}(n)+g_{23}(n)g_{32}(n)]\sqrt{f_{11}f_{33}-f_{13}f_{31}}=$$
$$=f_{21}(n)f_{33}f_{12}(n)+f_{23}(n)f_{11}f_{32}(n)-$$
$$-f_{21}(n)f_{13}f_{32}(n)-f_{23}(n)f_{31}f_{12}(n). \tag{6.5}$$

Права частина виразу (6.5) була підказана явним виразом (5.15) для локальної збережної густини $\rho_{22}(n|1)=f_{22}(n)$ (4.21) з $h_{22}(n)=0$.

Елементарні алгебричні маніпуляції з формулами перетворення (6.1)–(6.4) та з прийнятою умовою (6.5) приводять до набору нелінійних алгебричних рівнянь

$$e_{33}^2+e_{31}e_{13}=F_{11}, \tag{6.6}$$
$$(e_{33}+e_{11})e_{13}=-F_{13}, \tag{6.7}$$
$$e_{11}^2+e_{13}e_{31}=F_{33}, \tag{6.8}$$
$$(e_{11}+e_{33})e_{31}=-F_{31}, \tag{6.9}$$

що дає змогу визначити невідомі, часозалежні коефіцієнти e_{11}, e_{13}, e_{33}, e_{31} в термінах урухомлювальних функцій f_{11}, f_{13}, f_{33}, f_{31}. Тут було використано скорочене позначення

$$F_{jk}=\frac{f_{jk}}{\sqrt{f_{11}f_{33}-f_{13}f_{31}}}, \tag{6.10}$$

де $j\neq 2$ і $k\neq 2$.

Результат розрахунку описується формулами

$$e_{11}=e+d, \tag{6.11}$$
$$e_{13}=-\frac{F_{13}}{2e}, \tag{6.12}$$
$$e_{33}=e-d, \tag{6.13}$$
$$e_{31}=-\frac{F_{31}}{2e}, \tag{6.14}$$

де

$$e^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,(F_{11}+F_{33}), \tag{6.15}$$
$$d=\frac{1}{4e}\,(F_{33}-F_{11}) \tag{6.16}$$

та виконується тотожність

$$e_{11}e_{33}-e_{13}e_{31}\equiv 1. \tag{6.17}$$

Для проведення всіх необхідних перетворень з проміжною нелінійною інтеґровною системою (5.22)–(5.25) ми маємо розглянути також формули обернених перетворень

$$f_{21}(n)=g_{21}(n)d_{11}+g_{23}(n)d_{31}, \tag{6.18}$$
$$f_{12}(n)=d_{11}g_{12}(n)+d_{13}g_{32}(n), \tag{6.19}$$
$$f_{23}(n)=g_{21}(n)d_{13}+g_{23}(n)d_{33}, \tag{6.20}$$
$$f_{32}(n)=d_{31}g_{12}(n)+d_{33}g_{32}(n). \tag{6.21}$$

Тут часозалежні коефіцієнти d_{11}, d_{13}, d_{31}, d_{33} пов'язані з часозалежними коефіцієнтами e_{11}, e_{13}, e_{31}, e_{33} простими формулами

$$d_{11}=e_{33}, \tag{6.22}$$
$$d_{13}=-e_{13}, \tag{6.23}$$
$$d_{33}=e_{11}, \tag{6.24}$$
$$d_{31}=-e_{31}. \tag{6.25}$$

Незважаючи на своє елементарне підґрунтя, фактична процедура переформулювання системи в термінах нових фізично вмотивованих функцій поля $g_{jk}(n)$ виявляється досить громіздкою через виражену залежність від часу урухомлювальних функцій f_{jk} і коефіцієнтів перетворення e_{jk}, а також через можливу залежність параметрів a_{jk} від часу. Тому ми вважаємо за краще навести лише остаточні формули, що охоплюють динамічні особливості перетвореної напівдискретної нелінійної інтеґровної системи. Одержані рівняння руху наводимо у вигляді:

$$+\dot g_{21}(n)=g_{21}(n+1)f_{11}+g_{23}(n+1)f_{31}-$$
$$-g_{21}(n)a_{11}-g_{23}(n)a_{31}-$$
$$-\frac{g_{21}(n)g_{12}(n)+g_{23}(n)g_{32}(n)}{\sqrt{f_{11}f_{33}-f_{13}f_{31}}}\,g_{21}(n), \tag{6.26}$$

$$-\dot g_{12}(n)=f_{11}g_{12}(n-1)+f_{13}g_{32}(n-1)-$$
$$-a_{11}g_{12}(n)-a_{13}g_{32}(n)-$$
$$-g_{12}(n)\,\frac{g_{21}(n)g_{12}(n)+g_{23}(n)g_{32}(n)}{\sqrt{f_{11}f_{33}-f_{13}f_{31}}}, \tag{6.27}$$

$$+\dot g_{23}(n)=g_{23}(n+1)f_{33}+g_{21}(n+1)f_{13}-$$
$$-g_{23}(n)a_{33}-g_{21}(n)a_{13}-$$
$$-\frac{g_{21}(n)g_{12}(n)+g_{23}(n)g_{32}(n)}{\sqrt{f_{11}f_{33}-f_{13}f_{31}}}\,g_{23}(n), \tag{6.28}$$

$$-\dot{g}_{32}(n) = f_{33}g_{32}(n-1) + f_{31}g_{12}(n-1) - \\ - a_{33}g_{32}(n) - a_{31}g_{12}(n) - \\ - g_{32}(n)\,\frac{g_{21}(n)g_{12}(n) + g_{23}(n)g_{32}(n)}{\sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}}. \tag{6.29}$$

Тут вже враховано анонсовані спрощення (5.16), (5.27) та (5.26), (5.36), які стверджують, що $h_{22}(n) = 0$ та $a_{22} = 0$, $b_{22} = 1$ без втрати загальности. До того ж треба пам'ятати, що урухомлювальні функції f_{jk} регулюються набором рівнянь (5.18)–(5.21), наведених у розділі 5.

Написані вище напівдискретні нелінійні рівняння (6.26)–(6.29) визначають зміст величини $\rho_{22}(n)$, заданої формулою

$$\rho_{22}(n) = g_{21}(n)g_{12}(n) + g_{23}(n)g_{32}(n), \tag{6.30}$$

як локальну збережну густину. Однак ми маємо сумнів, чи ця локальна збережна густина $\rho_{22}(n)$ зберігає свій знак як функція координати n і часу τ. Із цієї причини ми схильні розглядати її як локальну густину заряду подібно до термінології, прийнятої в інших наших роботах [31–37].

Локальний струм $J_{22}(n)$ у локальному законі збереження

$$\dot{\rho}_{22}(n) = J_{22}(n) - J_{22}(n+1), \tag{6.31}$$

який пов'язаний з локальною густиною заряду (6.30), визначається формулою

$$J_{22}(n) = \\ = -g_{21}(n)f_{11}g_{12}(n-1) - g_{21}(n)f_{13}g_{32}(n-1) - \\ - g_{23}(n)f_{33}g_{32}(n-1) - g_{23}(n)f_{31}g_{12}(n-1). \tag{6.32}$$

Досліджувану систему рівнянь (6.26)–(6.29) належить розглядати як систему двох сполучених псевдоекситонних підсистем. Кожна з підсистем описується власною парою польових функцій. Цими парами функцій є $g_{21}(n)$, $g_{12}(n)$ та $g_{23}(n)$, $g_{32}(n)$. Кожна пара функцій приписується окремому одновимірному регулярному ланцюжку. Тому кожна з підсистем розташовується винятково на вузлах свого окремого ланцюжка. Міжвузловий лінійний зв'язок вздовж одного окремого ланцюжка описується параметром f_{11}. Лінійний зв'язок між вузлами вздовж іншого окремого ланцюжка описується параметром f_{33}. Лінійний зв'язок між вузлами вздовж певного ланцюжка виглядає надзвичайно асиметричним (одностороннім) на відміну від симетричного (двостороннього) лінійного зв'язку між вузлами вздовж конкретного ланцюжка, що є типовим для звичайних молекулярних екситонів [38]. І через це внутрішньовузлові збудження нашої системи називаються псевдоекситонними. Параметри лінійного зв'язку f_{31}, a_{31} і f_{13}, a_{13} між польовими функціями різних підсистем характеризують лінійну взаємодію між вузлами двох різних ланцюжків. Ця поперечна лінійна взаємодія є фактично відповідальною за встановлення двоніжкової драбинчатої конфігурації у регулярній фоновій ґратці.

7. Гамільтонове формулювання напівдискретної нелінійної інтеґровної системи в термінах фізично вмотивованих функцій поля

У розділі 5 було зазначено, що одержані стандартним чином найнижчі локальні збережні густини $\rho_{22}(n|1)$, $\rho_{22}(n|2)$ [див. рівняння (4.21) та (4.22)] не можна прийняти як густину функції Гамільтона досліджуваної напівдискретної нелінійної інтеґровної системи. Видається, що ця ситуація має певну подібність до випадку багатокомпонентних інтеґровних напівдискретних нелінійних систем Шрьодінґера, де знання базових локальних законів збереження не відкриває шляхів для побудови точного Гамільтонового представлення у фізично змістовних термінах [39, 40].

На щастя, рівняння руху для напівдискретної нелінійної інтеґровної системи, що нас цікавить, які представлені в термінах фізично вмотивованих функцій поля (6.26)–(6.29), допускають перезапис у стислій Гамільтоновій формі, виявленій суто евристично. В результаті ми приходимо до канонічних гамільтонових динамічних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{21}(n) = -\frac{\partial H}{\partial g_{12}(n)}, \tag{7.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{12}(n) = +\frac{\partial H}{\partial g_{21}(n)}, \tag{7.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{23}(n) = -\frac{\partial H}{\partial g_{32}(n)}, \tag{7.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{32}(n) = +\frac{\partial H}{\partial g_{23}(n)} \tag{7.4}$$

з функцією Гамільтона, заданою виразом

$$H = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{21}(m)a_{11}g_{12}(m) - g_{21}(m+1)f_{11}g_{12}(m)] +$$
$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{21}(m)a_{13}g_{32}(m) - g_{21}(m+1)f_{13}g_{32}(m)] +$$
$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{23}(m)a_{33}g_{32}(m) - g_{23}(m+1)f_{33}g_{32}(m)] +$$
$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} [g_{23}(m)a_{31}g_{12}(m) - g_{23}(m+1)f_{31}g_{12}(m)] +$$
$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[g_{21}(m)g_{12}(m) + g_{23}(m)g_{32}(m)]^2}{2\sqrt{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}}}. \tag{7.5}$$

Таким чином, ми чітко бачимо, що польові функції $g_{21}(n)$ і $g_{12}(n)$ набувають значення канонічно спряжених амплітуд динамічного поля на одній ніжці драбинчатої ґратки, тоді як польові функції $g_{23}(n)$ і $g_{32}(n)$ набувають значення канонічно спряжених амплітуд динамічного поля на іншій ніжці драбинчатої ґратки.

Загалом, Гамільтонова система (7.1)–(7.5) не зберігає повну енергію через допустимі часові залежності параметрів зв'язку a_{11}, a_{13}, a_{33}, a_{31} і f_{11}, f_{13}, f_{33}, f_{31}. Це твердження узгоджується з доведеним фундаментальним правилом, що виключає повну енергію зі списку збережних величин для будь-якої часозалежної (параметрично урухомлюваної) Гамільтонової системи [41, 42].

8. Явний приклад супроводжувального параметричного урухомлювання

Продемонструємо одну з можливих явних реалізацій параметричного урухомлювання (5.18)–(5.21), що супроводжує або проміжну напівдискретну нелінійну інтеґровну систему (5.22)–(5.25), або фізично вмотивовану напівдискретну нелінійну інтеґровну систему (6.26)–(6.29).

Для цього розбиваємо урухомлювальні функції f_{11}, f_{13}, f_{33}, f_{31} і урухомлювальні параметри a_{11}, a_{13}, a_{33}, a_{31} на відповідні часонезалежні і часозалежні частини. Тобто, ми задали f_{jk} і a_{jk} формулами

$$f_{jk} = u_{jk} + v_{jk}, \tag{8.1}$$

$$a_{jk} = u_{jk} - v_{jk}, \tag{8.2}$$

де доданки u_{jk} не залежать від часу,

$$\dot{u}_{jk} = 0, \tag{8.3}$$

тоді як часозалежні доданки v_{jk} визначаються системою звичайних лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{v}_{11} = 2u_{13}v_{31} - 2v_{13}u_{31}, \tag{8.4}$$

$$\dot{v}_{13} = 2u_{11}v_{13} - 2v_{11}u_{13} + 2u_{13}v_{33} - 2v_{13}u_{33}, \tag{8.5}$$

$$\dot{v}_{33} = 2u_{31}v_{13} - 2v_{31}u_{13}, \tag{8.6}$$

$$\dot{v}_{31} = 2u_{31}v_{11} - 2v_{31}u_{11} + 2u_{33}v_{31} - 2v_{33}u_{31}. \tag{8.7}$$

Ці звичайні лінійні однорідні диференційні рівняння (8.4)–(8.7) виникають шляхом прямої підстановки формул розбиття (8.1) та (8.2) у вихідні рівняння для параметричного урухомлювання (5.18)–(5.21).

Далі ми накладаємо обмеження

$$(u_{11} - u_{33})^2 + 4u_{13}u_{31} < 0, \tag{8.8}$$

що дає нам змогу розглядати систему звичайних лінійних однорідних диференційних рівнянь (8.4)–(8.7) як коливальну систему, що характеризується власною частотою

$$\omega = 2\sqrt{-(u_{11} - u_{33})^2 - 4u_{13}u_{31}}. \tag{8.9}$$

Як наслідок, суто коливальні розв'язки системи урухомлювальних рівнянь (8.4)–(8.7) можна представити у формі

$$v_{jk} = c_{jk}\cos(\omega\tau + \varphi) + s_{jk}\sin(\omega\tau + \varphi), \tag{8.10}$$

де φ – довільна стала. Часонезалежні коефіцієнти c_{jk} і s_{jk} задаються формулами

$$c_{11} = +c, \tag{8.11}$$
$$c_{13} = \frac{c}{2u_{31}}(u_{33} - u_{11}) - \frac{s\,\omega}{4u_{31}}, \tag{8.12}$$
$$c_{33} = -c, \tag{8.13}$$
$$c_{31} = \frac{c}{2u_{13}}(u_{33} - u_{11}) + \frac{s\,\omega}{4u_{13}}, \tag{8.14}$$
$$s_{11} = +s, \tag{8.15}$$
$$s_{13} = \frac{s}{2u_{31}}(u_{33} - u_{11}) + \frac{c\,\omega}{4u_{31}}, \tag{8.16}$$
$$s_{33} = -s, \tag{8.17}$$
$$s_{31} = \frac{s}{2u_{13}}(u_{33} - u_{11}) - \frac{c\,\omega}{4u_{13}}, \tag{8.18}$$

де c і s – довільні, часонезалежні параметри.

Разом з тим, вираз (8.9) для власної частоти ω підказує нам параметризувати фонові константи u_{jk} за допомогою формул

$$u_{11} = u + \frac{\omega}{4}\sinh(r), \tag{8.19}$$

$$u_{13} = +\frac{\omega}{4}\cosh(r)\exp(+2q), \tag{8.20}$$

$$u_{33} = u - \frac{\omega}{4}\sinh(r), \tag{8.21}$$

$$u_{31} = -\frac{\omega}{4}\cosh(r)\exp(-2q), \tag{8.22}$$

де кожен із трьох введених параметрів u, r, q не залежить від часу. Як наслідок, для часонезалежних параметрів c_{13}, c_{31} і s_{13}, s_{31} ми одержуємо параметризовані вирази

$$c_{13} = +c\tanh(r)\exp(+2q) + $$
$$+ s\,\mathrm{sech}(r)\exp(+2q), \tag{8.23}$$

$$c_{31} = -c\tanh(r)\exp(-2q) + $$
$$+ s\,\mathrm{sech}(r)\exp(-2q), \tag{8.24}$$

$$s_{13} = +s\tanh(r)\exp(+2q) - $$
$$- c\,\mathrm{sech}(r)\exp(+2q), \tag{8.25}$$

$$s_{31} = -s\tanh(r)\exp(-2q) - $$
$$- c\,\mathrm{sech}(r)\exp(-2q). \tag{8.26}$$

Нарешті, вираз для незалежного від часу нормалізаційного фактора $f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}$ набуває досить сприйнятливого представлення

$$f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31} = u^2 + \frac{\omega^2}{16} - (c^2+s^2)\,\mathrm{sech}^2(r), \tag{8.27}$$

що уможливлює встановити фізично змістовний критерій його додатної визначености

$$u^2 + \frac{\omega^2}{16} > (c^2+s^2)\,\mathrm{sech}^2(r). \tag{8.28}$$

Насправді параметр q виявляється абсолютно зайвим для практичного розгляду за умови явно заданого параметричного урухомлювання. Його можна без вагань вилучити з рівнянь руху (6.26)–(6.29), здійснюючи прості перетворення

$$g_{21}(n) = G_{21}(n)\exp(-q), \tag{8.29}$$

$$g_{12}(n) = G_{21}(n)\exp(+q), \tag{8.30}$$

$$g_{23}(n) = G_{23}(n)\exp(+q), \tag{8.31}$$

$$g_{32}(n) = g_{32}(n)\exp(-q) \tag{8.32}$$

до перемасштабованих амплітуд поля $G_{21}(n)$, $G_{12}(n)$ і $G_{23}(n)$, $G_{32}(n)$, які є фізично еквівалентні до попередніх амплітуд $g_{21}(n)$, $g_{12}(n)$ і $g_{23}(n)$, $g_{32}(n)$ з обнуленим q. Таким чином, ми припускаємо, що

$$q = 0 \tag{8.33}$$

без втрати загальности.

9. Фізично вмотивована напівдискретна нелінійна інтеґровна система за явно заданого параметричного урухомлювання

Для зручности розглянемо в деталях незавуальоване Гамільтонове формулювання запропонованої фізично вмотивованої напівдискретної нелінійної інтеґровної системи за явно заданого параметричного урухомлювання.

Перш за все, на основі наведених раніше формул (7.5), (8.1), (8.2) та (8.27) повна функція Гамільтона $\mathcal{H}$ має вигляд

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = &\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{21}(m)(u_{11}-v_{11})g_{12}(m) - \\
-&\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{21}(m+1)(u_{11}+v_{11})g_{12}(m) + \\
+&\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{21}(m)(u_{13}-v_{13})g_{32}(m) - \\
-&\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{21}(m+1)(u_{13}+v_{13})g_{32}(m) + \\
+&\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{23}(m)(u_{33}-v_{33})g_{32}(m) - \\
-&\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{23}(m+1)(u_{33}+v_{33})g_{32}(m) + \\
+&\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{23}(m)(u_{31}-v_{31})g_{12}(m) - \\
-&\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{23}(m+1)(u_{31}+v_{31})g_{12}(m) + \\
+&\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[g_{21}(m)g_{12}(m)+g_{23}(m)g_{32}(m)]^2}{2\sqrt{u^2+\omega^2/16-(c^2+s^2)\,\mathrm{sech}^2(r)}}.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Тут часонезалежні фонові параметри u_{jk} (8.19)–(8.22), визначені рівністю $q = 0$, задаються формулами

$$u_{11} = u + \frac{\omega}{4}\sinh(r), \tag{9.2}$$

$$u_{13} = +\frac{\omega}{4}\cosh(r), \tag{9.3}$$

$$u_{33} = u - \frac{\omega}{4}\sinh(r), \tag{9.4}$$

$$u_{31} = -\frac{\omega}{4}\cosh(r). \tag{9.5}$$

Своєю чергою, залежні від часу урухомлювальні функції v_{jk} (8.10), (8.11), (8.13), (8.15), (8.17), (8.23)–(8.26), визначені рівністю $q = 0$, задаються формулами

$$v_{11} = +c\cos(\omega\tau + \varphi) + s\sin(\omega\tau + \varphi), \tag{9.6}$$

$$v_{13} = +\left[c\tanh(r) + s\,\mathrm{sech}(r)\right]\cos(\omega\tau + \varphi) +$$
$$+\left[s\tanh(r) - c\,\mathrm{sech}(r)\right]\sin(\omega\tau + \varphi), \tag{9.7}$$

$$v_{33} = -c\cos(\omega\tau + \varphi) - s\sin(\omega\tau + \varphi), \tag{9.8}$$

$$v_{31} = -\left[c\tanh(r) - s\,\mathrm{sech}(r)\right]\cos(\omega\tau + \varphi) +$$
$$-\left[s\tanh(r) + c\,\mathrm{sech}(r)\right]\sin(\omega\tau + \varphi). \tag{9.9}$$

Безперечно, стислий запис гамільтонових динамічних рівнянь, пов'язаних із детальною функцією Гамільтона (9.1), зберігає свою стандартну канонічну форму

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{21}(n) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g_{12}(n)}, \tag{9.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{12}(n) = +\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g_{21}(n)}, \tag{9.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{23}(n) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g_{32}(n)}, \tag{9.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{32}(n) = +\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g_{23}(n)}. \tag{9.13}$$

Завдяки явному параметричному урухомлюванню, що забезпечується часозалежними частинами v_{jk} параметрів зв'язку, ця специфікована динамічна Гамільтонова система (9.1)–(9.13) не зберігає свою повну енергію у цілковитій відповідности до подібної властивості його загального параметрично урухомлюваного попередника (7.1)–(7.5).

Навпаки, повний заряд системи

$$Q = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[g_{21}(m)g_{12}(m) + g_{23}(m)g_{32}(m)\right] \tag{9.14}$$

зберігається за умови, що локальний струм з одного боку нескінченної ґратки співпадає з локальним струмом з іншого боку нескінченної ґратки

$$J_{22}(-\infty) = J_{22}(+\infty). \tag{9.15}$$

Це твердження ґрунтується на елементарному розгляді відповідного локального закону збереження (6.31), доповненого виразом (6.30) для локальної збережної густини $\rho_{22}(n)$.

10. Висновок

Одним із завдань нашого дослідження було доповнити базові принципи розробляння напівдискретних нелінійних інтеґровних систем, сформульованими в нашій попередній статті [22], деякими тонкими відтінками, які є важливими для фактичної реалізації нових параметрично урухомлюваних інтеґровних динамічних систем.

Почавши з побудованих належним чином анзатців для допоміжних спектральних та еволюційних операторів, заданих квадратовими 3×3-матрицями, нам вдалося розробити новий прототип напівдискретної нелінійної інтеґровної системи з нефіксованими функціями вибору. Одержана прототипна напівдискретна нелінійна інтеґровна система була зведена до нової напівдискретної нелінійної інтеґровної системи параметрично урухомлюваних псевдозбуджень на двоніжковій драбинчатій ґратці як у її проміжному, так і фізично змістовному втіленні.

Ми відновили декілька локальних законів збереження, пов'язаних із загальною (прототипною) напівдискретною нелінійною інтеґровною системою, і виявили, що жодну з одержаних збережних густин не можна взяти за густину Гамільтонової функції ні для проміжної нелінійної системи, ні для фізично вмотивованої.

Тим не менше, фізично вмотивована система постає гамільтоновою динамічною системою, що характеризується двома парами канонічно спряжених амплітуд поля. Незважаючи на свою нетривіальну складність, двоетапна процедура переходу від прототипної системи до фізично вмотивованої була винагороджена специфічним розщепленням на істинну фізично вмотивовану динамічну систему та координатонезалежний параметричний урухомлювач, формалізований системою чотирьох однорідних звичайних лінійних диференційних рівнянь з часозалежними коефіцієнтами.

Ми всесторонньо продемонстрували одну специфічну реалізацію суто коливального параметричного урухомлення та сформулювали критерії його чинности в термінах часонезалежних фонових значень параметрів міжвузлового зв'язку.

З огляду на свою інтеґровніть за Лаксом запропонована напівдискретна нелінійна система допускає точні аналітичні розв'язки, одержувані в рамках сучасних математичних методів, таких як перетворення оберненого розсіяння [9, 12–15, 29] та метод перетворення Дарбу–Беклунда [16, 28, 31, 34]. Проте ми очікуємо, що фактична процедура явного аналітичного інтеґрування системи буде суттєво ускладнена некомутативністю просторонезалежних засівних операторів (спектрального і еволюційного), спричиненою нетривіальним впливом притаманного параметричного урухомлювання.

Олексій О. Вахненко висловлює подяку за підтримку Національній академії наук України (проєкт 0120U100855 "Властивості низькорозмірних функціональних матеріалів на наномасштабах") та Фонду Сімонса (США, премія 1290587). В'ячеслав О. Вахненко висловлює подяку за підтримку Національній академії наук України (проєкт 0123U100182).

1. L.D. Landau, S.I. Pekar. Effective mass of a polyaron. *Ukr. J. Phys.* **53** (Special Issue), 71 (2008).
2. N.N. Bogolyubov. On a new form of adiabatic perturbation theory in the problem of particle interaction with a quantum field. *Ukr. Mat. Zh.* **2** (2), 3 (1950).
3. T. Holstein. Studies of polaron motion: Part I. The molecular-crystal model. *Ann. Phys.* **8** (3), 325 (1959).
4. A.S. Davydov, N.I. Kislukha. Solitary excitons in one-dimensional molecular chains. *Phys. Status Solidi B* **59** (2), 465 (1973).
5. A.S. Davydov, N.I. Kislukha. Solitons in one-dimensional molecular chains. *Phys. Status Solidi B* **75** (2), 735 (1976).
6. E.G. Wilson. A new theory of acoustic solitary-wave polaron motion. *J. Phys. C* **16** (35), 6739 (1983).
7. V.E. Zakharov, A.B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. – JETP* **34** (1), 62 (1972).
8. S.V. Manakov. Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Sov. Phys. – JETP* **40** (2), 269 (1975).
9. O.O. Vakhnenko. Nonlinear beating excitations on ladder lattice. *J. Phys. A* **32** (30), 5735 (1999).
10. M.J. Ablowitz, J.F. Ladik. Nonlinear differential-difference equations. *J. Math. Phys.* **16** (3), 598 (1975).
11. M.J. Ablowitz, J.F. Ladik. A nonlinear difference scheme and inverse scattering. *Stud. Appl. Math.* **55** (3), 213 (1976).
12. M.J. Ablowitz. Lectures on the inverse scattering transform. *Stud. Appl. Math.* **58** (1), 17 (1978).
13. T. Tsuchida, H. Ujino, M. Wadati. Integrable semi-discretization of the coupled nonlinear Schrödinger equations. *J. Phys. A* **32** (11), 2239 (1999).
14. O.O. Vakhnenko, M.J. Velgakis. Transverse and longitudinal dynamics of nonlinear intramolecular excitations on multileg ladder lattices. *Phys. Rev. E* **61** (6), 7110 (2000).
15. O.O. Vakhnenko. Inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger system on a zigzag-runged ladder lattice. *J. Math. Phys.* **51** (10), 103518 (2010).
16. O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a lattice with three structural elements in the unit cell. *J. Math. Phys.* **59** (5), 053504 (2018).
17. Y.N. Joglekar, C. Thompson, D.D. Scott, G. Vemuria. Optical waveguide arrays: Quantum effects and PT symmetry breaking. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **63** (3), 30001 (2013).
18. Z. Chen, A. Narita, K. Müllen. Graphene nanoribbons: On-surface synthesis and integration into electronic devices. *Adv. Mater.* **32** (45), 2001893 (2020).
19. A. Dwivedi, A. Banerjee, B. Bhattacharya. Simultaneous energy harvesting and vibration attenuation in piezo-embedded negative stiffness metamaterial. *J. Intell. Mater. Syst. Struc.* **31** (8), 1 (2020).
20. M. Rothe, Y. Zhao, J. Müller, G. Kewes, C.T. Koch, Y. Lu, O. Benson. Self-assembly of plasmonic nanoantenna-waveguide structures for subdiffractional chiral sensing. *ACS Nano* **15** (1), 351 (2021).
21. J.-C. Deinert, D.A. Iranzo, R. Pérez, X. Jia, H.A. Hafez, I. Ilyakov, N. Awari, M. Chen, M. Bawatna, A.N. Ponomaryov, S. Germanskiy, M. Bonn, F.H.L. Koppens, D. Turchinovich, M. Gensch, S. Kovalev, K.-J. Tielrooij. Grating-graphe ne metamaterial as a platform for terahertz nonlinear photonics. *ACS Nano* **15** (1), 1145 (2021).
22. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko. Development and analysis of novel integrable nonlinear dynamical systems on quasi-one-dimensional lattices. Two-component nonlinear system with the on-site and spatially distributed inertial mass parameters. *Ukr. J. Phys.* **69** (3), 168 (2024).
23. O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Local conservation laws. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18** (3), 401 (2011).

24. O.O. Vakhnenko. Four-wave semidiscrete nonlinear integrable system with $\mathcal{PT}$-symmetry. *J. Nonlin. Math. Phys.* **20** (4), 606 (2013).
25. O.O. Vakhnenko. Four-component integrable systems inspired by the Toda and the Davydov–Kyslukha models, *Wave Motion* **88**, 1 (2019).
26. W.-X. Ma. A generating scheme for conservation laws of discrete zero curvature equations and its application. *Comput. Math. Appl.* **78** (10), 3422 (2019).
27. O.O. Vakhnenko. Symmetry-broken canonizations of the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite coupling. *J. Math. Phys.* **57** (11), 113504 (2016).
28. O.O. Vakhnenko. Semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling. *J. Nonlin. Math. Phys.* **24** (2), 250 (2017).
29. L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer-Verlag, 1987).
30. G.-Z. Tu. A trace identity and its applications to the theory of discrete integrable systems. *J. Phys. A* **23** (17), 3903 (1990).
31. O.O. Vakhnenko, A.P. Verchenko. Nonlinear system of $\mathcal{PT}$-symmetric excitations and Toda vibrations integrable by the Darboux–Bäcklund dressing method. *Proc. R. Soc. A* **477** (2256), 20210562 (2021).
32. O.O. Vakhnenko. Coupling-managed criticality in nonlinear dynamics of an integrable exciton-phonon system on a one-dimensional lattice. *Low Temp. Phys.* **47** (12), 1084 (2021).
33. O.O. Vakhnenko. Nonlinear dynamics of an integrable gauge-coupled exciton-phonon system on a regular one-dimensional lattice. *Low Temp. Phys.* **48** (3), 239 (2022).
34. O.O. Vakhnenko, A.P. Verchenko. Dipole–monopole alternative in nonlinear dynamics of an integrable gauge-coupled exciton-phonon system on a one-dimensional lattice. *Eur. Phys. J. Plus* **137** (10), 1176 (2022).
35. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, A.P. Verchenko. Dipole–monopole alternative as the precursor of pseudo-excitonic chargeless half-mode in an integrable nonlinear exciton–phonon system on a regular one-dimensional lattice. *Chaos Solit. Fract.* **170**, 113306 (2023).
36. O.O. Vakhnenko. Dipole–monopole crossover and chargeless half-mode in an integrable exciton–phonon nonlinear dynamical system on a regular one-dimensional lattice. *Ukr. J. Phys.* **68** (02), 108 (2023).
37. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko. Dipole–monopole criticality and chargeless half mode in an integrable gauge-coupled pseudoexciton–phonon system on a regular one-dimensional lattice. *Phys. Rev. E* **108** (02), 024223 (2023).
38. A.S. Davydov. *Theory of Molecular Excitons* (Plenum Press, 1971).
39. O.O. Vakhnenko, M.J. Velgakis. Multimode soliton dynamics in pertrubed ladder lattices. *Phys. Rev. E* **63** (1), 016612 (2001).
40. O.O. Vakhnenko. Enigma of probability amplitudes in Hamiltonian formulation of integrable semidiscrete nonlinear Schrödinger systems. *Phys. Rev. E* **77** (2), 026604 (2008).
41. A. Dewisme, S. Bouquet. First integrals and symmetries of time-dependent Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.* **34** (3), 997 (1993).
42. Jü. Struckmeier, C. Riedel. Invariants for time-dependent Hamiltonian systems. *Phys. Rev. E* **64** (2), 026503 (2001).

Одержано 09.09.24.
Переклад на українську мову О. Войтенка

O.O. Vakhnenko, O.V. Vakhnenko

DEVELOPMENT AND ANALYSIS OF NOVEL INTEGRABLE NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS ON QUASI-ONE-DIMENSIONAL LATTICES. PARAMETRICALLY DRIVEN NONLINEAR SYSTEM OF PSEUDO-EXCITATIONS ON A TWO-LEG LADDER LATTICE

Following the main principles of developing the evolutionary nonlinear integrable systems on quasi-one-dimensional lattices, we suggest a novel nonlinear integrable system of parametrically driven pseudo-excitations on a regular two-leg ladder lattice. The initial (prototype) form of the system is derivable in the framework of semi-discrete zero-curvature equation with the spectral and evolution operators specified by the properly organized 3×3 square matrices. Although the lowest conserved local densities found via the direct recursive method do not prompt us the algebraic structure of system's Hamiltonian function, but the heuristically substantiated search for the suitable two-stage transformation of prototype field functions to the physically motivated ones has allowed to disclose the physically meaningful nonlinear integrable system with time-dependent longitudinal and transverse inter-site coupling parameters. The time dependencies of inter-site coupling parameters in the transformed system are consistently defined in terms of the accompanying parametric driver formalized by the set of four homogeneous ordinary linear differential equations with the time-dependent coefficients. The physically meaningful parametrically driven nonlinear system permits its concise Hamiltonian formulation with the two pairs of field functions serving as the two pairs of canonically conjugated field amplitudes. The explicit example of oscillatory parametric drive is described in full mathematical details.

K e y w o r d s: nonlinear dynamics, integrable system, two-leg ladder lattice, parametric drive, Hamiltonian dynamics.