

В.О. НЕСТЕРОВ, О.І. ДАВИДОВСЬКА, В.Ю. ДЕНИСОВ

Інститут ядерних досліджень НАН України  
(Просп. Науки, 47, Київ 03028; e-mail: v.nest.v@gmail.com)**ПЕРЕРІЗИ ПРУЖНОГО  
РОЗСІЯННЯ, ОДЕРЖАНІ НА ОСНОВІ  
ПОТЕНЦІАЛУ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ  
ТОМАСА–ФЕРМІ З УРАХУВАННЯМ КОРА**

УДК 539.1, 539.17

*Густина розподілу нуклонів та потенціали взаємодії між ядрами для реакцій  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  та  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$  було розраховано в рамках модифікованого методу Томаса–Фермі, з урахуванням усіх доданків до членів другого порядку по  $\hbar$  у квазикласичному розкладі кінетичної енергії. В якості нуклон-нуклонної взаємодії використовувалися сили Скірма, залежні від густини нуклонів. Знайдено параметризацію потенціалу взаємодії між ядрами, яка добре описує величину потенціалу, розрахованого у рамках модифікованого підходу Томаса–Фермі з залежними від густини силами Скірма. На основі одержаних потенціалів було обрковано перерізи пружного розсіяння, що добре узгоджуються з експериментальними даними.*

*Ключові слова:* потенціал взаємодії між ядрами, модифікований метод Томаса–Фермі, розподіл густини нуклонів, поперечний переріз, кор відштовхування, пружне розсіяння.

**1. Вступ**

Протягом усього часу існування теоретичної ядерної фізики одним з основних її завдань було вивчення особливостей взаємодії атомних ядер. Для розрахунку таких фундаментальних характеристик ядерних реакцій як перерізи різних процесів необхідно знати потенціальну енергію ядерної взаємодії [1–4]. З цієї точки зору особливий інтерес представляє інформація про величину та радіальну залежність потенціалу взаємодії на малих відстанях між ядрами.

На жаль, потенціал нуклон-нуклонного взаємодії, особливо її ядерної частини, нині не досить гарно визначено. Загалом можна сказати, що якісно його можна розділити на ядерну, кулонівську та відцентрову частини, де властивості двох останніх вже досить добре вивчені. Але ситуація з ядерною частиною набагато складніша. В даний час для її апроксимації використовується велика кількість різних моделей [1–25], а висоти бар'єра в потенціалі ядерно-ядерної взаємодії, що впливають на механізм ядерних реакцій, у межах цих моделей можуть істотно відрізнятись. З цієї причини інформація про потенціал ядерно-ядерної взаемо-

дії та висоти бар'єрів є принципово важливою для опису процесу реакції.

З усіх методів, які використовуються для побудови потенціалу ядерно-ядерної взаємодії [26–36], для нашої роботи ми обрали напівмікроскопічний підхід. У цьому підході розподіл нуклонної густини та густини енергії розраховується за модифікованим методом Томаса–Фермі із залежними від густини силами Скірма [4, 7, 8, 10, 11, 13–25]. На даний момент існує велика кількість успішних параметризацій взаємодії Скірма. У своїй роботі ми використовуємо параметризацію SkM\* [32]. У цьому випадку напівкласичний розклад кінетичної енергії за ступенями  $\hbar$  враховує всі можливі доданки до  $\hbar^2$ . Проведені раніше розрахунки для конкретних ядерних задач нами та іншими авторами свідчать, що це досить точне наближення, яке ми будемо використовувати в подальшому. За таких умов модифікований підхід Томаса–Фермі із силами Скірма добре описує розподіл густини нуклонів, енергії зв'язку, середньоквадратичні радіуси та багато інших характеристик основного та збудженого станів атомних ядер [26–32, 34].

У модифікованому наближенні Томаса–Фермі із силами Скірма ядерно-ядерний потенціал на великих відстанях наближається до кулонівського. При малих відстанях між поверхнями ядер, що

© В.О. НЕСТЕРОВ, О.І. ДАВИДОВСЬКА,  
В.Ю. ДЕНИСОВ, 2022

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2022. Т. 67, № 9

645

зіштовхуються, спостерігається бар'єр потенціалу, який пов'язаний з кулонівським відштовхуванням ядер та ядерним притяганням. При подальшому зменшенні відстані між ядрами потенціальна енергія плавно зменшується. Так само у модифікованому наближенні Томаса–Фермі із силами Скірма ядерно-ядерний потенціал на досить малих відстанях між ядрами, коли густини ядер, що зіштовхуються, суттєво перекриваються, має відштовхувальний кор [7, 10, 13, 14, 17?–22]. Цей відштовхувальний кор пов'язаний зі значною величиною нестисливості ядерної матерії [13, 14, 19, 22]. Відмітимо, що відштовхування потенціалу на малих відстанях між ядрами існує в потенціалі проксиміті [5] та у мікроскопічному підході [37, 38]. Пружне розсіяння легких ядер з урахуванням кору потенціалу досліджувалося у роботах [13, 14, 19, 22, 39–41]. Також вплив відштовхувального доданку потенціалу дозволив описати глибоко-підбар'єрне пригнічення злиття важких ядер [42–44]. Однак, ядерно-ядерні потенціали з відштовхувальним кором дуже рідко використовуються для опису характеристик розсіяння ядер. Тому дослідження пружного розсіяння важких ядер у модифікованому підході Томаса–Фермі із силами Скірма з урахуванням кора є важливою та актуальною задачею.

У розділі 2 та 3 наведено математичні методи, які необхідні для реалізації обраного підходу. Розділи 4 та 5 містять обговорення отриманих результатів та наші висновки, відповідно.

## 2. Розрахунок потенціалу в рамках модифікованого методу Томаса–Фермі

Як вже зазначалося, потенціал ядерно-ядерної взаємодії  $V(R)$  складається з ядерної  $V_N(R)$ , кулонівської  $V_{\text{COUL}}(R)$  та відцентрової  $V_l(R)$  компонент, що залежні від відстані  $R$  між центрами мас ядер:

$$V(R) = V_N(R) + V_{\text{COUL}}(R) + V_l(R). \quad (1)$$

Для кулонівської та відцентрової частин нами було використано загально відомі вирази, які можуть бути знайдені, зокрема, у роботах [20, 23, 24].

Розрахуємо ядерну частину  $V_N(R)$  потенціалу взаємодії в рамках модифікованого методу Томаса–Фермі з урахуванням усіх членів другого порядку за  $\hbar$  у напівкласичному розкладі кінетичної енергії [4, 7, 8, 10, 11, 13–25]. В якості нуклон-

нуклонної взаємодії будемо використовувати залежні від густини сили Скірма, а саме параметризація SkM\* [32]. У наших розрахунках ми маємо справу з наближенням “заморожених” густин, яке цілком застосовне для енергій, що лежать навколо бар'єра.

Потенціал ядерно-ядерної взаємодії визначається як різниця між енергіями системи двох ядер, коли вони розташовані на кінцевій  $E_{12}(R)$  та нескінченній  $E_{1(2)}$  відстані одне від одного [8, 10]:

$$V(R) = E_{12}(R) - (E_1 + E_2). \quad (2)$$

Зауважимо, що енергія системи на нескінченній відстані є сумою енергій зв'язку для окремих ядер:

$$E_{12} = \int \epsilon [\rho_{1p}(\mathbf{r}) + \rho_{2p}(\mathbf{r}, R), \rho_{1n}(\mathbf{r}) + \rho_{2n}(\mathbf{r}, R)] d\mathbf{r}, \quad (3)$$

$$E_{1(2)} = \int \epsilon [\rho_{1(2)p}(\mathbf{r}), \rho_{1(2)n}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Тут через  $\rho_{1(2)n}$  та  $\rho_{1(2)p}$  ми позначили нейтронну або протонну густину ядра 1(2) відповідно,  $\epsilon [\rho_{1(2)p}(\mathbf{r}), \rho_{1(2)n}(\mathbf{r})]$  являє собою густину енергії, через  $R$  позначено відстань між центрами мас ядер.

Густина енергії, що фігурує під знаком інтегрування, складається з кінетичної та потенціальної складових, за використання сил Скірма її вигляд добре відомий [24–28, 30, 32, 44]:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\hbar^2}{2m} \tau + \epsilon_{\text{Skyrme}} + \epsilon_C = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \tau + \frac{1}{2} t_0 \left[ \left(1 + \frac{1}{2} x_0\right) \rho^2 - \left(x_0 + \frac{1}{2}\right) (\rho_n^2 + \rho_p^2) \right] + \\ &+ \frac{1}{12} t_3 \rho^\alpha \left[ \left(1 + \frac{1}{2} x_3\right) \rho^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}\right) (\rho_n^2 + \rho_p^2) \right] + \\ &+ \frac{1}{4} \left[ t_1 \left(1 + \frac{1}{2} x_1\right) + t_2 \left(1 + \frac{1}{2} x_2\right) \right] \tau \rho + \\ &+ \frac{1}{4} \left[ t_2 \left(x_2 + \frac{1}{2}\right) - t_1 \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) \right] (\tau_n \rho_n + \tau_p \rho_p) + \\ &+ \frac{1}{16} \left[ 3t_1 \left(1 + \frac{1}{2} x_1\right) - t_2 \left(1 + \frac{1}{2} x_2\right) \right] (\nabla \rho)^2 - \\ &- \frac{1}{16} \left[ 3t_1 \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) + t_2 \left(x_2 + \frac{1}{2}\right) \right] ((\nabla \rho_p)^2 + (\nabla \rho_n)^2) + \\ &+ \frac{1}{2} W_0 [J \nabla \rho + J_n \nabla \rho_n + J_p \nabla \rho_p] + \epsilon_C. \quad (5) \end{aligned}$$

Через  $\tau$  у формулі ми позначили густину кінетичної енергії, вираз для якої буде наведено трохи нижче,  $m$  – маса нуклона. Величини  $t_0, t_1, t_2, t_3, x_0, x_1, x_2, x_3, \alpha, W_0$  являють собою параметри взаємодії Скірма,  $\epsilon_C$  є густина кулонівського поля з урахуванням прямого та обмінного доданків у наближенні Слейтера [4, 7, 10, 27]. Доданки, пропорційні  $t_0$  та  $t_3$ , відповідають силам нульового радіуса дії. Доданок, пропорційний  $t_0$ , пов'язаний з притяганням, тоді як доданок з  $t_3$  задає відштовхування і зростає по мірі збільшення густини ядерної речовини. Це запобігає колапсу ядерних систем. Доданки, пропорційні  $t_1$  та  $t_2$ , вносять поправку на скінченність радіусу дії ядерних сил. При збільшенні величини нуклонної густини внесок цих членів до загальної енергії зростає. Константи  $x_0, x_1, x_2$  та  $x_3$  описують обмінні ефекти і пов'язані зі спіновою та ізоспіновою асиметріями,  $W_0$  є константою спин-орбітальної взаємодії.

Густина кінетичної енергії з точністю до членів другого порядку по  $\hbar$  має вигляд  $\tau = \tau_{TF} + \tau_2$  [7, 8, 10, 11, 23, 26, 27, 43], де в свою чергу,  $\tau = \tau_n + \tau_p$  – сума густин кінетичних енергій протонів і нейтронів. Тут [27, 28]

$$\tau_{TF,n(p)} = k \rho_{n(p)}^{5/3} \quad (6)$$

є густиною кінетичної енергії нейтронів (протонів) у наближенні Томаса–Фермі,  $k = \frac{5}{3}(3\pi^2)^{2/3}$ , а  $\tau_2$  – повний вираз для градієнтної поправки другого порядку по  $\hbar$  [27, 28]:

$$\begin{aligned} \tau_{2n(p)} = & b_1 \frac{(\nabla \rho_{n(p)})^2}{\rho_{n(p)}} + b_2 \nabla^2 \rho_{n(p)} + \\ & + b_3 \frac{\nabla f_{n(p)} \nabla \rho_{n(p)}}{f_{n(p)}} + b_4 \rho_{n(p)} \frac{\nabla^2 f_{n(p)}}{f_{n(p)}} + \\ & + b_5 \rho_{n(p)} \frac{(\nabla f_{n(p)})^2}{f_{n(p)}^2} + b_6 h_m^2 \rho_{n(p)} \left( \frac{\mathbf{W}_{n(p)}}{\rho_{n(p)}} \right)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

у якій  $b_1 = 1/36$ ,  $b_2 = 1/3$ ,  $b_3 = 1/6$ ,  $b_4 = 1/6$ ,  $b_5 = -1/12$  та  $b_6 = 1/2$  – числові коефіцієнти,  $h_m = \hbar^2/2m$ , останній доданок у формулі (7) пов'язаний з урахуванням спин-орбітальної взаємодії. Також введені позначення:

$$\mathbf{W}_{n(p)} = \frac{\delta \epsilon(r)}{\delta \mathbf{J}_{n(p)}(r)} = \frac{W_0}{2} \nabla(\rho + \rho_{n(p)}), \quad (8)$$

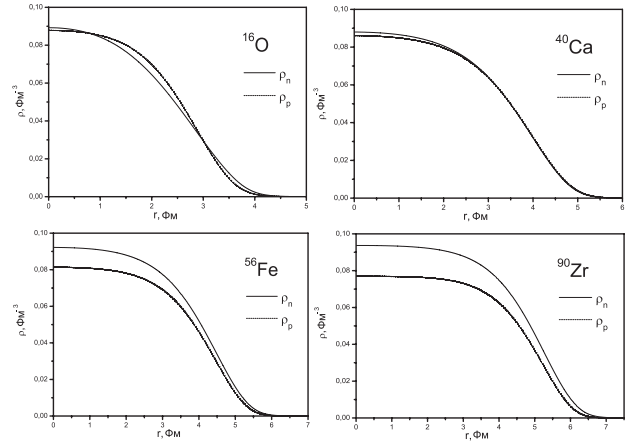


Рис. 1. Густина розподілу нуклонів для ядер  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{56}\text{Fe}$  та  $^{90}\text{Zr}$ , одержані в рамках модифікованого методу Томаса–Фермі

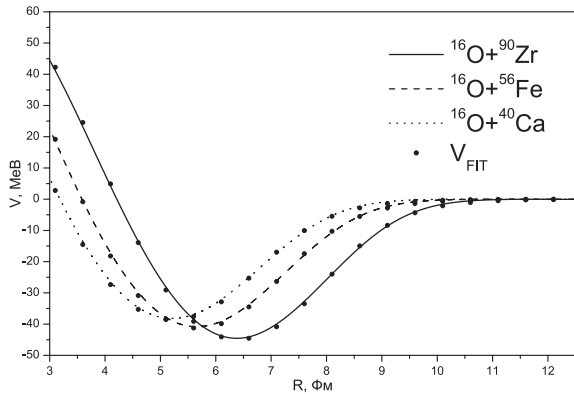
а величина  $f_{n(p)}$  виражається через параметри сил Скірма:

$$\begin{aligned} f_{n(p)} = & 1 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \frac{1}{4} \left[ t_1 \left( 1 + \frac{x_1}{2} \right) + t_2 \left( 1 + \frac{x_2}{2} \right) \right] \rho + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left[ t_2 \left( x_2 + \frac{1}{2} \right) - t_1 \left( x_1 + \frac{1}{2} \right) \right] \rho_{n(p)} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де  $x_1, x_2, t_1, t_2, W_0$  є константами сил Скірма і залежать від вибору параметризації. Внесок доданку Томаса–Фермі є домінуючим, особливо в об'ємі ядра, але на поверхні ядра градієнтні поправки починають відігравати суттєву роль.

В даній роботі будемо розглядати реакції пружного розсіяння  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  та  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$ . Для цих систем розрахуємо потенціал ядерно-ядерної взаємодії в рамках модифікованого підходу Томаса–Фермі. Для цього необхідно знати густини розподілу нуклонів у взаємодіючих ядрах. Ми будемо використовувати нуклонні густини, одержані в рамках цього ж модифікованого підходу Томаса–Фермі з силами Скірма. Для сил Скірма будемо використовувати параметризацію SkM\* [32]. Густина розподілу нуклонів для ядер  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  та  $^{56}\text{Fe}$ , одержані в рамках даного методу, показано на рис. 1.

Знаючи нуклонні густини, отримуємо вираз для густини енергії та розрахуємо потенціал ядерно-ядерної взаємодії в рамках модифікованого підходу Томаса–Фермі із силами Скірма (1)–(9). На рис. 2 наведено ядерну частину отриманих нами потенціалів взаємодії для реакцій  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,



**Рис. 2.** Потенціали взаємодії для реакцій  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$  та  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$ , одержані в рамках модифікованого методу Томаса–Фермі, а також представлення відповідного потенціалу в аналітичній формі ( $V_{\text{FIT}}$ ) (13)

$^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  та  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$ . Одержані потенціали мають цілком реалістичну форму, демонструючи на малих відстанях наявність суттєвого кору відштовхування.

### 3. Аналітичне представлення потенціалу взаємодії

Заради зручності проведення подальших розрахунків, ми представляємо отриманий нами потенціал таким чином, аби мати змогу працювати з ним в аналітичній формі. При цьому для адекватного опису перерізів пружного розсіяння важливим є врахування кору відштовхування, що накладає певні вимоги на форму параметризації потенціалу. З огляду на це, традиційна форма параметризації Вудса–Саксона нас не може влаштувати. Для того, аби надати нашому аналітичному потенціалу більш реалістичного вигляду, приєднаємо до нього ще один доданок, за формою аналогічний виразу для кінетичної енергії у методі Томаса–Фермі, який повинен забезпечити необхідне відштовхування на малих відстанях. Це ми робимо за певною аналогією з тим, що робили в [20], де працювали з потенціалами подвійної згортки, значно покращивши в такий спосіб отримані результати. Тобто, загальний вираз для потенціалу набуває вигляду

$$V_{\text{FIT}}(R) = V_{\text{WS}}(R) + V_{\text{kin}}(R). \tag{10}$$

Тут  $V_{\text{WS}}(R)$  є загально відомою формою потенціалу Вудса–Саксона

$$V_{\text{WS}}(R) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{(R-R_0)}{d_0}}}, \tag{11}$$

а  $V_{\text{kin}}(R)$  являє собою кінетичний доданок у формі методу Томаса–Фермі. У методі Томаса–Фермі кінетична енергія пропорційна  $\rho^{5/3}$  (6), тому кінетичний доданок у потенціал апроксимуємо, використовуючи для густини загальновідомий розподіл Фермі:

$$V_{\text{kin}}(R) = \left( \frac{V_c}{1 + e^{\frac{(R-C)}{a}}} \right)^{5/3}. \tag{12}$$

В результаті наш аналітичний потенціал набуває остаточного вигляду:

$$V_{\text{FIT}}(R) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{(R-R_0)}{d_0}}} + \left( \frac{V_c}{1 + e^{\frac{(R-C)}{a}}} \right)^{5/3}. \tag{13}$$

**Таблиця 1.** Параметри аналітичного представлення потенціалу для розглядуваних реакцій

Реакція	$V_0$ , MeB	$R_0$ , фм	$d_0$ , фм	$V_c$ , MeB <sup>3/5</sup>	$C$ , фм	$a$ , фм
$^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$	49,094	6,683	0,686	20,603	3,175	1,081
$^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$	54,2604	7,960	0,673	19,339	4,491	0,995
$^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$	51,9102	7,155	0,685	20,460	3,662	1,066

**Таблиця 2.** Параметри уявної частини потенціалу (14) для реакцій  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$  та  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$

$E_{\text{lab}}$ , MeB	$W_W$ , MeB	$r_W$ , фм	$d_W$ , фм	$W_S$ , MeB	$r_S$ , фм	$d_S$ , фм
$^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$						
40	20,331	1,195	0,449	10,998	1,267	0,500
47	20,876	1,199	0,434	11,999	1,229	0,500
60	21,901	1,123	0,300	12,000	1,269	0,632
$^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$						
50	20,149	1,100	0,303	6,858	1,298	0,521
80	20,170	1,109	0,300	11,938	1,299	0,646
138,2	21,471	1,100	0,319	13,601	1,299	0,770
$^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$						
38	19,460	1,123	0,300	5,006	1,229	0,778
40	20,756	1,162	0,304	5,184	1,187	0,799
42	21,179	1,199	0,302	5,578	1,299	0,573
44	22,373	1,100	0,313	6,615	1,299	0,566
50	24,532	1,267	0,300	8,295	1,153	0,899
54	25,647	1,211	0,300	8,500	1,271	0,551
58	25,786	1,147	0,300	8,520	1,284	0,576

В формулі (13) містяться шість параметрів підгонки  $V_0$ ,  $R_0$ ,  $d_0$ ,  $V_c$ ,  $C$ ,  $a$ . Значення цих параметрів знаходимо шляхом мінімізації для максимально точного опису реалістичного потенціалу, знайденого в рамках модифікованого підходу Томаса-Фермі із силами Скірма (таблиця 1).

На рис. 2 можна побачити апроксимацію виразом (13) ядерної частини потенціалів взаємодії, яка розраховано в рамках модифікованого підходу Томаса-Фермі із силами Скірма, для взаємодіючих важких ядер  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  та  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$ . Апроксимацію вдалося провести настільки точно, що в масштабах графіка відхилення практично непомітні. Таким чином, запропонована форма потенціалу підгонки дуже добре описує реалістичний потенціал ядерно-ядерної взаємодії, який отримано у чисельних розрахунках.

#### 4. Розрахунки перерізів пружного розсіяння

Використовуючи в якості дійсної частини знайдені нами потенціали ядерно-ядерної взаємодії (13) з відповідними параметрами (див. таблицю 1) розрахуємо перерізи пружного розсіяння в рамках оптичної моделі. Уявну частину потенціалу беремо в наступному вигляді [2, 4]

$$W(R) = - \frac{W_W}{1 + \exp[R - r_W(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})/d_W]} - \frac{W_S \exp[R - r_S(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})/d_S]}{d_S (1 + \exp[R - r_W(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})/d_W])^2}, \quad (14)$$

де  $W_W$ ,  $r_W$ ,  $d_W$ ,  $W_S$ ,  $r_S$ ,  $d_S$  – сила, радіус та дифузність об'ємної ( $W$ ) та поверхневої ( $S$ ) частин уявного ядерного потенціалу. Такий вид уявної частини потенціалу широко використовується при описі різноманітних ядерних реакцій. Ми розглядаємо реакції пружного розсіяння для систем  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$  за енергії пучка  $E_{\text{lab}} = 40, 47, 60$  MeV,  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$  за енергії пучка  $E_{\text{lab}} = 50, 80, 138,2$  MeV та  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  за енергії пучка  $E_{\text{lab}} = 38, 40, 42, 44, 46, 50, 54, 58$  MeV. Перерізи пружного розсіяння було розраховано за допомогою потенціалу (13) з параметрами з таблиці 1, що апроксимує ядерно-ядерний потенціал, одержаний в рамках модифікованого методу Томаса-Фермі. Параметри уявної частини  $W_W$ ,  $r_W$ ,  $d_W$ ,  $W_S$ ,  $r_S$ ,  $d_S$  було знайдено шляхом підгонки експериментальних перерізів пружного розсіяння (таблиця 2).

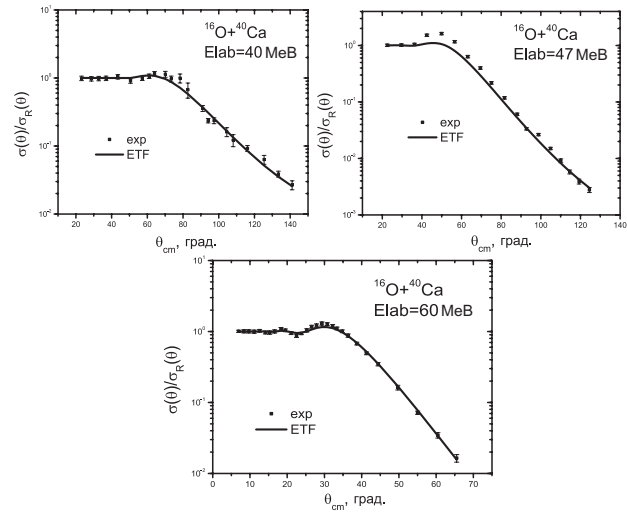


Рис. 3. Поперечний переріз пружного розсіяння для системи  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$  за енергії пучка  $E_{\text{lab}} = 40, 47, 60$  MeV, розрахований в рамках модифікованого наближення Томаса-Фермі з силами Скірма (ETF), залежними від густини. Експериментальні дані (exp) взято з робіт [45, 46]

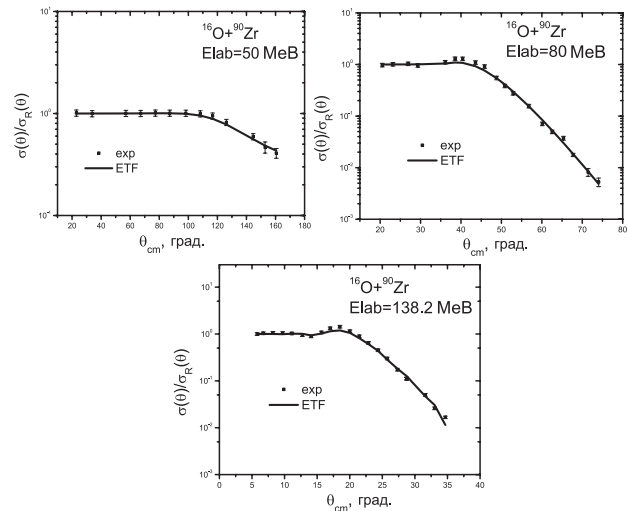
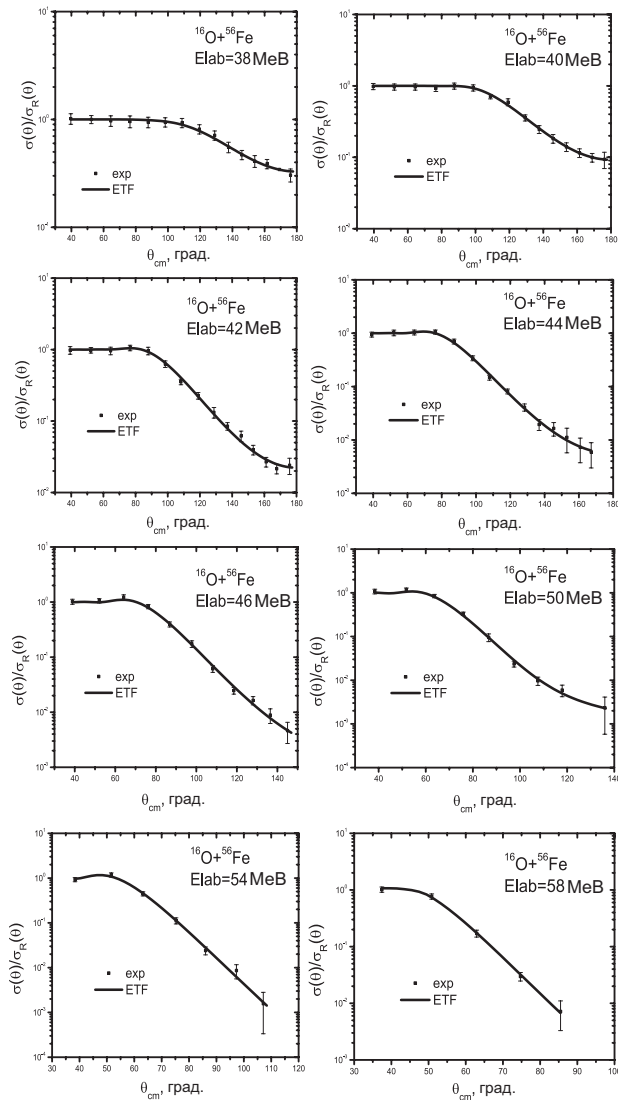


Рис. 4. Поперечний переріз пружного розсіяння для системи  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$  за енергії пучка  $E_{\text{lab}} = 50, 80, 138,2$  MeV, розрахований в рамках модифікованого наближення Томаса-Фермі з силами Скірма (ETF), залежними від густини. Експериментальні дані (exp) взято з роботи [47]

Результати розрахунків перерізів пружного розсіяння представлено на рис. 3, 4 та 5, де розрахований нами поперечний переріз пружного розсіяння представлено у вигляді, нормованому до поперечного перерізу Резерфорда. Експерименталь-



**Рис. 5.** Поперечний переріз пружного розсіяння для системи  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  за енергії пучка  $E_{\text{lab}} = 38, 40, 42, 44, 46, 50, 54, 58$  MeV, розрахований в рамках модифікованого наближення Томаса–Фермі з силами Скірма (ETF), залежними від густини. Експериментальні дані (exp) взято з роботи [48]

ні дані взято з робіт [45–48]. Як видно з рисунків, отримані нами перерізи пружного розсіяння добре узгоджуються з наявними експериментальними даними.

## 5. Висновки

В роботі було розраховано потенціали ядерно-ядерної взаємодії в рамках модифікованого під-

ходу Томаса–Фермі з залежними від густини силами Скірма для систем  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  та  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$ , при цьому густини нуклонів було отримано в тому ж самому підході. Для сил Скірма було використано параметризацію SkM\* [32]. У знайдених потенціалах наявний кор відштовхування, що є важливим при розрахунках поперечного перерізу пружного розсіяння. Знайдено вдалу параметризацію потенціалу ядерно-ядерної взаємодії, яка добре описує величину потенціалу, розрахованого у рамках модифікованого підходу Томаса–Фермі з залежними від густини силами Скірма.

На основі отриманих потенціалів ядерно-ядерної взаємодії розглянуто реакції пружного розсіяння для систем  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$  та  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$  при різних енергіях та розраховано перерізи пружного розсіяння. Зауважимо, що для кожної реакції для різних енергій при розрахунках використовувався однаковий вираз для дійсної частини потенціалу, а підганялася лише уявна частина. Показано, що знайдені нами перерізи добре узгоджуються з експериментальними даними.

1. R. Bass. *Nuclear Reactions with Heavy Ion* (Springer-Verlag, 1980) [ISBN: 978-3-642-05718-2].
2. G.R. Satchler. *Direct Nuclear Reactions* (Clarendon Press, 1983) [ISBN-13: 978-0198512691, ISBN-10: 0198512694].
3. P. Frobrich, R. Lipperheide. *Theory of Nuclear Reactions* (Clarendon Press, 1996) [ISBN: 9780198537830].
4. В.Ю. Денисов, В.А. Плойко. *Проблеми фізики атомного ядра і ядерних реакцій* (Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2013).
5. J. Blocki, J. Randrup, W.J. Swiatecki, C.F. Tsang. Proximity forces. *Ann. Phys.* **105**, 427 (1977).
6. W.D. Myers and W.J. Swiatecki. Nucleus-nucleus proximity potential and superheavy nuclei. *Phys. Rev. C* **62**, 044610 (2000).
7. V.Yu. Denisov, V.A. Nesterov. Potential of interaction between nuclei and nucleon-density distribution in nuclei. *Phys. Atom. Nucl.* **69**, 1472 (2006).
8. V.Yu. Denisov. Interaction potential between heavy ions. *Phys. Lett. B* **526**, 315 (2002).
9. H.J. Krappe, J.R. Nix, A.J. Sierk. Unified nuclear potential for heavy-ion elastic scattering, fusion, fission, and ground-state masses and deformations. *Phys. Rev. C* **20**, 992 (1979).
10. V.Yu. Denisov, W. Norenberg. Entrance channel potential in the synthesis of the heaviest nuclei. *Eur. Phys. J. A* **15**, 375 (2002).
11. V.Yu. Denisov. Nucleus-nucleus potential with shell-correction contribution. *Phys. Rev. C* **91**, 024603 (2015).

12. A. Winther. Dissipation, polarization and fluctuation in grazing heavy-ion collisions and the boundary to the chaotic regime. *Nucl. Phys. A* **594**, 203 (1995).
13. V.Yu. Denisov, O.I. Davidovskaya. Repulsive core potential and elastic heavy-ion collisions. *Yad. Fiz.* **73**, 429 (2010).
14. V.Yu. Denisov, O.I. Davidovskaya. Repulsive core potential and elastic heavy-ion collisions. *Ukr. J. Phys.* **54**, 669 (2009).
15. K.A. Brueckner, J.R. Buchler, M.M. Kelly. New theoretical approach to nuclear heavy-ion scattering. *Phys. Rev. C* **173**, 944 (1968).
16. J. Fleckner, U. Mosel. Antisymmetrization effects in heavy ion potentials. *Nucl. Phys. A* **277**, 170 (1977).
17. O.I. Davidovskaya, V.Yu. Denisov, V.A. Nesterov. Nucleus-nucleus potential with repulsive core and elastic scattering. Part 1. Nucleus-nucleus interaction potential. *Яд. Фіз. та Енер.* **11** (1), 25 (2010).
18. O.I. Davidovskaya, V.Yu. Denisov, V.A. Nesterov. Nucleus-nucleus potential with repulsive core and elastic scattering. Part 2. The elastic scattering cross sections with and without core. *Яд. Фіз. та Енер.* **11** (1), 33 (2010).
19. V.Yu. Denisov and O.I. Davidovskaya. Elastic scattering of heavy ions and nucleus-nucleus potential with a repulsive core. *Bull. Rus. Ac. of Sci. Phys.* **74**, (4), 611 (2010).
20. O.I. Davidovskaya, V.Yu. Denisov, V.A. Nesterov. Effective nucleus-nucleus potential with the contribution of the kinetic energy of nucleons, and the cross-sections of elastic scattering and subbarrier fusion. *Ukr. J. Phys.* **62**, 473 (2017).
21. V.A. Nesterov. Effect of the Pauli exclusion principle and the polarization of nuclei on the potential of their interaction for the example of the  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$  system. *Phys. At. Nucl.* **76**, 577 (2013).
22. V.Yu. Denisov, O.I. Davidovskaya. Elastic  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$  scattering and nucleus-nucleus potential with a repulsive core. *Ukr. J. Phys.* **55**, 861 (2010).
23. О.І. Давидовська, В.Ю. Денисов, В.О. Нестеров. Ядерно-ядерний потенціал, перерізи пружного розсіяння та підбар'єрного злиття для системи  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ . *Яд. Фіз. та Енер.* **19**, 203 (2018).
24. O.I. Davydovska, V.Yu. Denisov, V.A. Nesterov. Comparison of the nucleus-nucleus potential evaluated in the double-folding and energy density approximations and the cross-sections of elastic scattering and fusion of heavy ions. *Nucl. Phys. A* **989**, 214 (2019).
25. В.О. Нестеров, О.І. Давидовська, В.Ю. Денисов. Розрахунки перерізів підбар'єрного злиття та пружного розсіяння важких іонів за допомогою модифікованого Томаса-Фермі із силами Скірма. *Яд. Фіз. та Енер.* **20** (4), 349 (2019).
26. P. Ring, P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem*. (Springer-Verlag, 1980).
27. M. Brack, C. Guet, H.B. Hakanson. Self-consistent semiclassical description of average nuclear properties -- a link between microscopic and macroscopic models. *Phys. Rep.* **123**, 275 (1985).
28. M. Brack and R.K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Addison-Wesley Publ. Co, 1997) [ISBN-10: 0813340845; ISBN-13: 978-0813340845].
29. V.M. Strutinsky, A.G. Magner, V.Yu. Denisov. Density distributions in nuclei. *Z. Phys. A* **322**, 149 (1985).
30. J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, P.G. Reinhard. Pairing interaction and self-consistent densities in neutron-rich nuclei. *Nucl. Phys. A* **693**, 361 (2001).
31. D. Vautherin, D.M. Brink. Hartree-Fock calculations with skyrme's interaction. I. Spherical nuclei. *Phys. Rev. C* **5**, 626 (1972).
32. J. Bartel, P. Quentin, M. Brack, C. Guet, H.B. Hakansson. Towards a better parametrisation of Skyrme-like effective forces: A critical study of the SkM force. *Nucl. Phys. A* **386**, 79 (1982).
33. S.A. Fayans, S.V. Tolokonnikov, E.L. Trykov, D. Zawischac. Nuclear isotope shifts within the local energy-density functional approach. *Nucl. Phys. A* **676**, 49 (2000).
34. J.W. Negele. The mean-field theory of nuclear structure and dynamics. *Rev. Mod. Phys.* **54**, 913 (1982).
35. T.H.R. Skyrme. The effective nuclear potential. *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1959).
36. H. Feshbach. The optical model and its justification. *Annu. Rev. Nucl. Sci.* **8**, 49 (1958).
37. H. Friedrich, L.F. Canto. Effective nucleus-nucleus potentials derived from the generator coordinate method. *Nucl. Phys. A* **291**, 249 (1977).
38. S. Hossain, M.N.A. Abdullah, Md. Zulfiker Rahman, A.K. Basak, F.B. Malik. Non-monotonic potentials for  $^6\text{Li}$  elastic scattering at 88 MeV. *Phys. Scr.* **87**, 015201 (2013).
39. S. Hossain, Md. Masum Billah, M.M.B. Azad, F. Parvin. Non-monotonic potential description of alpha-Zr refractive elastic scattering. *Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **40**, 105109 (2013).
40. S. Hossain, A.S.B. Tariq, Athoy Nilima, M. Sujan Islam, R. Majumder, M.A. Sayed, M.M. Billah, M.M.B. Azad, M.A. Uddin, I. Reichstein, F.B. Malik, A.K. Basak. Dependence of the  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$  nuclear potential on nuclear incompressibility. *Phys. Rev. C* **91**, 064613 (2015).
41. S. Misiu, H. Esbensen. Hindrance of heavy-ion fusion due to nuclear incompressibility. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 112701 (2006).
42. S. Misiu, H. Esbensen. Signature of shallow potentials in deep sub-barrier fusion reactions. *Phys. Rev. C* **75**, 034606 (2007).
43. S. Misiu and F. Carstoiu. Absence of a maximum in the S factor at deep sub-barrier energies in the fusion reaction  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ . *Phys. Rev. C* **84**, 051601(R) (2011).
44. O.I. Davydovska, V.A. Nesterov, V.Yu. Denisov. The nucleus-nucleus potential within the extended Thomas-Fermi method and the cross-sections of subbarrier fusion and elastic scattering for the systems  $^{16}\text{O} + ^{58,60,62,64}\text{Ni}$ . *Nuclear Physics A* **1002**, 121994 (2020).
45. J. Orloff, W.W. Daehnick. Elastic scattering of  $^{16}\text{O}$  by  $^{48}\text{Ti}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{27}\text{Al}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^7\text{Li}$ , and  $^6\text{Li}$ . *Phys. Rev. C* **3**, 430 (1971).
46. K.E. Rehm, W. Henning, J.R. Erskine, D.G. Kovar, M.H. Macfarlane, S.C. Pieper, M. Rhoades-Brown. Inelas-

- tic scattering of  $^{16}\text{O}$  from  $^{40,42,44,48}\text{Ca}$ . *Phys. Rev. C* **25**, 1915 (1982).
47. K.E. Rehm, J. Gehring, B. Glagola, W.C. Ma, W. Phillips, F.L.H. Wolfs. Energy dependence of one- and two-particle transfer reactions in the system  $^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$ . *Z. Phys. A* **A340**, 281 (1991).
48. A.W. Obst, D.L. McShan, R.H. Davis. Elastic Scattering of  $^{16}\text{O}$  by  $^{56}\text{Fe}$ ,  $^{70,74}\text{Ge}$ , and  $^{90}\text{Zr}$ . *Phys. Rev. C* **6**, 1814 (1972).

Одержано 14.11.22

*V.A. Nesterov, O.I. Davydovska, V.Yu. Denisov*

ELASTIC SCATTERING CROSS-SECTIONS  
OBTAINED ON THE BASIS OF THE POTENTIAL  
OF THE MODIFIED THOMAS-FERMI METHOD  
AND TAKING THE CORE INTO ACCOUNT

Nucleon density distributions and nucleus-nucleus interaction potentials for the reactions  $^{16}\text{O} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{56}\text{Fe}$ , and

$^{16}\text{O} + ^{90}\text{Zr}$  have been calculated in the framework of the modified Thomas-Fermi method and considering all terms up to the second order in  $\hbar$  in the quasi-classical expansion of the kinetic energy. Skyrme forces dependent on the nucleon density are used as the nucleon-nucleon interaction. A parametrization of the nucleus-nucleus interaction potential, which well describes the potential value calculated within the modified Thomas-Fermi approach with density-dependent Skyrme forces, is found. On the basis of the obtained potentials, the cross-sections of elastic scattering are calculated in a good agreement with experimental data.

*Keywords:* nucleus-nucleus interaction potential, modified Thomas-Fermi method, nucleon density distribution, cross-section, repulsive core, elastic scattering.