

**РОЗПОДІЛ ПОТЕНЦІАЛУ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ
ДЛЯ “РОЗМАЗАНОЇ” НУЛЬ-СТРУНИ
СТАЛОГО РАДІУСА**

О.П. ЛЕЛЯКОВ

УДК 539.391+517.764.2
© 2011

Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського
(Просп. Вернадського, 4, Сімферополь 95007; e-mail: lelyakov@tnu.crimea.ua)

У роботі запропоновано загальний вигляд розподілу потенціалу скалярного поля для “розмазаної” нуль-струни сталого радіуса, яка прямує уздовж осі z і в кожен момент часу цілком знаходиться у площині, ортогональній цій осі. Знайдено умови, за яких компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля, при стисканні поля в одновимірний об’єкт (коло радіуса R), асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни того ж радіуса.

де індекси m, n, l набувають значень $0, 1, 2, 3$, функції $x^m = x^m(\tau, \sigma)$ визначають траєкторію руху нуль-струни, τ і σ параметри на світовій поверхні нуль-струни, $x^m_{,\tau} = \partial x^m / \partial \tau$, $g = |g_{mn}|$, g_{mn} – метричний тензор зовнішнього простору, $\gamma = \text{const}$.

У циліндричній системі координат

$$x^0 = t, \quad x^1 = \rho, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z,$$

функції $x^m(\tau, \sigma)$, які визначають траєкторію руху замкненої нуль-струни сталого (незмінного з часом) радіуса R , що прямує уздовж осі z і в кожен момент часу цілком знаходиться у площині, ортогональній цій осі, мають такий вигляд:

$$t = \tau, \quad \rho = R = \text{const}, \quad \theta = \sigma, \quad z = \pm \tau, \quad (2)$$

де знак \pm відповідає вибору напрямку руху. Надалі для визначеності виберемо в (2) знак мінус. Можна зазначити, що траєкторія (2) досить часто реалізується при русі замкненої нуль-струни у фонових гравітаційних полях, наприклад, у просторі-часі плоскої гравітаційної хвилі [9] і в лоренцевих просторах з нетривіальною конформною групою, що описують поширення ударних гравітаційних хвиль [10].

Для (2) відмінними від нуля будуть такі компоненти тензора енергії-імпульсу (1):

$$T^{00} = T^{33} = -T^{03} = \frac{\gamma}{\sqrt{-g}} \delta(q) \delta(\rho - R), \quad (3)$$

де $q = t + z$.

Оскільки для траєкторії руху (2) усі напрямки на гіперповерхнях $z = \text{const}$ еквівалентні, то метричні функції $g_{mn} = g_{mn}(t, \rho, z)$, тоді, використовуючи інваріантність квадратичної форми щодо інверсії θ на

1. Вступ

Струнні теорії вже не одне десятиліття знаходяться в стані неухильного поступового розвитку. Незважаючи на проблеми, неминучі для будь-якої теорії, що розвивається, вони захоплюють як вже відомими результатами, так і великими можливостями в перспективі. Інтерес до космічних струн та інших топологічних розв’язків, ініційований, з одного боку, тією роллю, яку топологічні дефекти, можливо, відіграють у процесі еволюції Всесвіту, наприклад, струнні механізми утворення первинних неоднорідностей густини речовини в ранньому Всесвіті, ідеї про топологічну інфляцію, а з іншого боку, тим, що за своїми фізичними властивостями ці об’єкти суттєво відрізняються від звичайної матерії [1–7]. Нуль-струни реалізують границю нульового натягу в теорії струн [5, 8]. Компоненти тензора енергії-імпульсу для нуль-струни мають такий вигляд [8]:

$$T^{mn} \sqrt{-g} = \gamma \int d\tau d\sigma x^m_{,\tau} x^n_{,\tau} \delta^4(x^l - x^l(\tau, \sigma)), \quad (1)$$

– θ , одержуємо

$$g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0. \quad (4)$$

Так само можна помітити, що квадратична форма простору-часу повинна бути інваріантна щодо одночасної інверсії $t \rightarrow -t, z \rightarrow -z$, тоді

$$g_{mn}(t, \rho, z) = g_{mn}(-t, \rho, -z). \quad (5)$$

Наслідком (5) є

$$g_{01} = g_{31} = 0. \quad (6)$$

Остаточно, використовуючи свободу вибору систем координат у ЗТВ, частково зафіксуємо її вимогою

$$g_{03} = 0. \quad (7)$$

Таким чином, квадратична форма для задачі, що розв'язується, може бути подана так

$$dS^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \quad (8)$$

де ν, μ, A, B функції змінних t, ρ, z .

Оскільки траєкторія (2) повинна бути одним із розв'язків рівнянь руху нуль-струни, то можна одержати додаткові умови (зв'язки) на метричні функції, при виконанні яких траєкторія руху нуль-струни, що задається (2), залишається незмінною.

Рух нуль-струни у псевдоримановому просторі визначається такою системою рівнянь [5]:

$$x_{,\tau\tau}^m + \Gamma_{pq}^m x_{,\tau}^p x_{,\tau}^q = 0, \quad (9)$$

$$g_{mn}x_{,\tau}^m x_{,\tau}^n = 0, \quad g_{mn}x_{,\tau}^m x_{,\sigma}^n = 0, \quad (10)$$

де Γ_{pq}^m – символи Кристофеля. Розписуючи перше з рівнянь (10) для (8), можна безпосередньо переконатися в тому, що для траєкторії (2) воно має такий вигляд $e^{2\nu} - e^{2\mu} = 0$, звідки

$$\nu \equiv \mu, \quad (11)$$

а рівняння системи (9), (10), що залишилися, для (2), (8), за умови (11), зводяться до єдиного рівняння $\nu_{,t} - \nu_{,z} = 0$, звідки

$$\nu = \nu(q, \rho). \quad (12)$$

Тоді згідно з (4) маємо

$$\nu(q, \rho) = \nu(-q, \rho), \quad (13)$$

тобто функція $\nu(q, \rho)$ є парною по q .

Аналізуючи систему рівнянь Ейнштейна, побудовану для (3), (8), та використовуючи знайдені умови (11)–(13), можна довідзнати залежність функцій квадратичної форми (8), а саме:

$$A = A(q, \rho), \quad B = B(q, \rho), \quad (14)$$

при цьому, сама система Ейнштейна зводиться до таких рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{,qq}}{A} + \frac{B_{,qq}}{B} - 2\nu_{,q} \left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{A_{,q}}{A} \right)^2 + \left(\frac{B_{,q}}{B} \right)^2 \right) = -2\chi T_{00}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & 2\nu_{,\rho\rho} + 2(\nu_{,\rho})^2 + \frac{B_{,\rho\rho}}{B} - \frac{1}{2} \left(\frac{B_{,\rho}}{B} \right)^2 + \\ & + \nu_{,\rho} \left(\frac{B_{,\rho}}{B} - \frac{A_{,\rho}}{A} \right) - \frac{1}{2} \frac{A_{,\rho}}{A} \frac{B_{,\rho}}{B} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{,q\rho}}{B} + 2\nu_{q,\rho} - \nu_{,\rho} \left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{B_{,\rho}}{B} \left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B} \right) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$2\nu_{,\rho\rho} + 3(\nu_{,\rho})^2 - \nu_{,\rho} \frac{A_{,\rho}}{A} = 0, \quad (18)$$

$$(\nu_{,\rho})^2 + \nu_{,\rho} \frac{B_{,\rho}}{B} = 0, \quad (19)$$

де $T_{00} = \gamma \frac{e^{2\nu}}{\sqrt{AB}} \delta(q) \delta(\rho - R)$.

Використовуючи знайдені умови (11), (12), (14) для (8), одержуємо

$$dS^2 = e^{2\nu} ((dt)^2 - (dz)^2) - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2, \quad (20)$$

де $\nu = \nu(q, \rho), B = B(q, \rho), A = A(q, \rho)$. Також можна відзначити, що в (20) згідно з (5) функції $A(q, \rho)$ і $B(q, \rho)$ є парними по q , тобто

$$A(q, \rho) = A(-q, \rho), \quad B(q, \rho) = B(-q, \rho). \quad (21)$$

Як випливає з (3), поза струною, тобто при $q \neq 0, \rho \neq R$, усі компоненти струнного тензора енергії-імпульсу тотожно дорівнюють нулю, а відмінні від нуля (прямують до нескінченності) безпосередньо на струні, що дає можливість досліджувати систему рівнянь Ейнштейна у двох напрямках:

1. Обмежитись аналізом “зовнішньої” задачі, тобто в області, для якої компоненти тензора енергії-імпульсу (праві частини рівнянь Ейнштейна) дорівнюють нулю.

2. Розглядати компоненти струнного тензора енергії-імпульсу як границю деякого “розмазаного” розподілу та провести аналіз рівнянь Ейнштейна для цього “розмазаного” розподілу.

Як було показано в роботі [11], аналіз “зовнішньої” задачі приводить до великої кількості вакуумних розв’язків рівнянь Ейнштейна, які задовольняють симетрії задачі, однак неясними залишаються критерії, що дозволяють вибрати з цієї сукупності розв’язків те, що описує гравітаційне поле нуль-струни. При спробі розглядати компоненти струнного тензора енергії-імпульсу як границю деякого “розмазаного” розподілу, наприклад, проста заміна дельта функцій у тензорі енергії-імпульсу відповідними дельта-функційними послідовностями, можливі неточності, пов’язані з тим, що незрозуміло як враховувати можливу появу доданків (множників), які прямують до нуля (константи) при стягуванні цього “розмазаного” розподілу в одновимірний об’єкт. Тому простіше з самого початку розглядати деякий “добре визначений” “розмазаний” розподіл, наприклад, дійсне безмасове скалярне поле (оскільки ми розглядаємо скалярний нуль-об’єкт), а потім стягти його в струну необхідної конфігурації, вимагаючи при цьому, щоб компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля асимптотично збіглися з компонентами нуль-струнного тензора енергії-імпульсу.

2. Система рівнянь Ейнштейна для “розмазаної” задачі

Компоненти тензора енергії-імпульсу для дійсного безмасового скалярного поля мають такий вигляд [2]:

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L, \quad (22)$$

де $L = g^{\omega\lambda}\varphi_{,\omega}\varphi_{,\lambda}$, $\varphi_{,\alpha} = \partial\varphi/\partial x^\alpha$, φ – потенціал скалярного поля, індекси $\alpha, \beta, \omega, \lambda$ набувають значень 0, 1, 2, 3. Для того, щоб забезпечити самоузгодженість

рівнянь Ейнштейна і тензора (22), будемо вимагати

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(q, \rho) \rightarrow \varphi = \varphi(q, \rho). \quad (23)$$

Розписуючи (22) для квадратичної форми (20), одержуємо

$$T_{00} = (\varphi_{,q})^2 + \frac{e^{2\nu}}{2A}(\varphi_{,\rho}^2), \quad T_{01} = T_{13} = \varphi_{,q}\varphi_{,\rho},$$

$$T_{33} = (\varphi_{,q})^2 - \frac{e^{2\nu}}{2A}(\varphi_{,\rho}^2), \quad T_{03} = (\varphi_{,q})^2,$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}(\varphi_{,\rho})^2, \quad T_{22} = -\frac{B}{2A}(\varphi_{,\rho})^2. \quad (24)$$

Система рівнянь Ейнштейна для (20), (24) може бути представлена в такому вигляді:

$$2\nu_{,\rho\rho} + 3(\nu_{,\rho})^2 - \nu_{,\rho}\frac{A_{,\rho}}{A} = -\frac{\chi}{2}(\varphi_{,\rho})^2, \quad (25)$$

$$(\nu_{,\rho})^2 + \nu_{,\rho}\frac{B_{,\rho}}{B} = \frac{\chi}{2}(\varphi_{,\rho})^2, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{,qq}}{A} + \frac{B_{,qq}}{B} - 2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) - \\ & - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2 + \left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^2\right) = -2\chi(\varphi_{,q})^2, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & 2\nu_{,\rho\rho} + 2(\nu_{,\rho})^2 + \frac{B_{,\rho\rho}}{B} - \frac{1}{2}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)^2 + \\ & + \nu_{,\rho}\left(\frac{B_{,\rho}}{B} - \frac{A_{,\rho}}{A}\right) - \frac{1}{2}\frac{A_{,\rho}}{A}\frac{B_{,\rho}}{B} = -\frac{\chi}{2}(\varphi_{,\rho})^2, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{,q\rho}}{B} + 2\nu_{q,\rho} - \nu_{,\rho}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) - \\ & - \frac{1}{2}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) = -2\chi\varphi_{,q}\varphi_{,\rho}, \end{aligned} \quad (29)$$

Якщо розглядати систему рівнянь (25)–(29) для розподілу скалярного поля вже сконцентрованому усередині “тонкого” кільця, для якого змінні q і ρ набувають значень в інтервалі

$$q \in [-\Delta q, +\Delta q], \quad \rho \in [R - \Delta\rho, R + \Delta\rho], \quad (30)$$

де R – радіус замкненої нуль-струни, Δq і $\Delta \rho$ – малі позитивні константи, що визначають “товщину” кільця, тобто

$$\Delta q \ll 1, \quad \Delta \rho \ll 1, \quad (31)$$

і за подальшого стискання такого “тонкого” кільця в одновимірний об’єкт (нуль-струну):

$$\Delta q = 0, \quad \Delta \rho = 0, \quad (32)$$

то простір, в якому прямує така “розмазана” нуль-струна, і для якого змінні q та ρ набувають значень в інтервалі $q \in (-\infty, +\infty)$, $\rho \in [0, +\infty)$, умовно можна розбити на три області:

– область I, для якої

$$q \in (-\infty, -\Delta q) \cup (+\Delta q, +\infty), \rho \in [0, +\infty), \quad (33)$$

– область II, для якої

$$q \in (-\Delta q, +\Delta q), \rho \in [0, R - \Delta \rho) \cup (R + \Delta \rho, \infty), \quad (34)$$

– область III, для якої

$$q \in [-\Delta q, +\Delta q], \rho \in [R - \Delta \rho, R + \Delta \rho], \quad (35)$$

причому, оскільки скалярне поле сконцентроване усередині такого “тонкого” кільця, зумовленого (30)–(32), то в області I, II потенціал скалярного поля дорівнює нулю, а в області III (усередині “тонкого” кільця) $\varphi \neq 0$.

Оскільки при стягуванні скалярного поля у струну система рівнянь (25)–(29) для скалярного поля повинна асимптотично збігтися з системою для замкненої нуль-струни (15)–(19), то в області (33), (34) (область I і II)

$$\varphi = 0, \quad \varphi_{,\rho} = 0, \quad \varphi_{,q} = 0, \quad (36)$$

а в області (35) (усередині “тонкого” кільця) у загальному випадку

$$\varphi \neq 0, \quad \varphi_{,\rho} \neq 0, \quad \varphi_{,q} \neq 0. \quad (37)$$

Порівнюючи систему рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни (15)–(19) із системою (25)–(29), можна зробити висновок про те, що при стягуванні скалярного поля в струну необхідної конфігурації, тобто при $\Delta q = 0$, $\Delta \rho = 0$

$$\begin{aligned} (\varphi_{,\rho})^2|_{q=0,\rho=R} = 0, \quad (\varphi_{,q})^2|_{q=0,\rho=R} \rightarrow \infty, \\ (\varphi_{,\rho}\varphi_{,q})|_{q=0,\rho=R} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

В області I, згідно з (36), при будь-якому фіксованому значенні $q = q_0 \in (-\infty, -\Delta q) \cup (+\Delta q, +\infty)$ і для всіх значень $\rho \in [0, +\infty)$ потенціал скалярного поля

$$\varphi(q_0, \rho) = 0, \quad (39)$$

якщо ж розглядати розподіл потенціалу скалярного поля при будь-якому фіксованому значенні $q = q_0 \in (-\Delta q, +\Delta q)$ (область II і III), то у випадку, коли $\rho \in [0, R - \Delta \rho) \cup (R + \Delta \rho, +\infty)$ (область II), повинно бути виконано

$$\varphi(q_0, \rho) = 0, \quad (40)$$

а при $\rho \in (R - \Delta \rho, R + \Delta \rho)$ (область III)

$$\varphi(q_0, \rho) \neq 0. \quad (41)$$

3. Розподіл потенціалу скалярного поля для “розмазаної” нуль-струни

Для отриманих умов (39)–(41) розподіл потенціалу скалярного поля зручно подати у вигляді

$$\varphi(q, \rho) = \ln \left(\frac{1}{\alpha(q) + \lambda(q)f(\rho)} \right), \quad (42)$$

де функції $\alpha(q)$ і $\lambda(q)$ симетричні відносно інверсії q на $-q$, тобто

$$\alpha(q) = \alpha(-q), \quad \lambda(q) = \lambda(-q), \quad (43)$$

функція $\alpha(q) + \lambda(q)f(\rho)$ обмежена

$$0 < \alpha(q) + \lambda(q)f(\rho) \leq 1, \quad (44)$$

а потенціал скалярного поля (42), згідно з (44), може набувати значень від

$$\varphi = 0, \quad \text{при} \quad \alpha(q) + \lambda(q)f(\rho) = 1, \quad (45)$$

і до

$$\varphi \rightarrow \infty, \quad \text{при} \quad \alpha(q) + \lambda(q)f(\rho) \rightarrow 0, \quad (46)$$

причому в області I, відповідно до (39), (45)

$$\alpha(q) = 1, \quad \lambda(q) = 0. \quad (47)$$

Оскільки, згідно з (40) потенціал скалярного поля в області II дорівнює нулю, то при $q \in (-\Delta q, +\Delta q)$ і будь-якому фіксованому значенні $\rho \in [0, R - \Delta \rho) \cup (R + \Delta \rho, +\infty)$, повинно бути виконано

$$\alpha(q) + \lambda(q)f(\rho_0) = 1. \quad (48)$$

В області III $\varphi \neq 0$, тому для тих же значень $q \in (-\Delta q, +\Delta q)$ і при $\rho \in (R - \Delta\rho, R + \Delta\rho)$

$$0 < \alpha(q) + \lambda(q)f(\rho_0) < 1. \quad (49)$$

З (48) випливає, що для всіх $\rho \in [0, R - \Delta\rho) \cup (R + \Delta\rho, +\infty)$ значення функції $f(\rho)$ сталі

$$f(\rho)|_{\rho \in [0, R - \Delta\rho) \cup (R + \Delta\rho, +\infty)} = f_0 = \text{const}, \quad (50)$$

причому $f_0 \neq 0$, а функції $\alpha(q)$ і $\lambda(q)$ зв'язані між собою:

$$\lambda(q) = \frac{1}{f_0} (1 - \alpha(q)). \quad (51)$$

Підставляючи (51) у (49), одержуємо, що в області III ($\varphi \neq 0$):

$$0 < \alpha(q) + (1 - \alpha(q))\frac{f(\rho_0)}{f_0} < 1, \quad (52)$$

тоді з (46), (52), випливає, що при $\varphi \rightarrow \infty$

$$\alpha(q) \rightarrow 0, \quad f(\rho) \rightarrow 0. \quad (53)$$

Таким чином, у виразі для потенціалу скалярного поля (42) функції $\alpha(q)$ й $f(\rho)$ обмежені та для всіх $q \in (-\infty, +\infty)$ і $\rho \in [0, +\infty)$ набувають значень

$$0 \leq \alpha(q) \leq 1, \quad 0 \leq f(\rho) \leq f_0, \quad (54)$$

причому в області I, згідно з (47), функція $\alpha(q)$

$$\alpha(q)|_{q \in (-\infty, -\Delta q) \cup (+\Delta q, +\infty)} = 1, \quad (55)$$

а з (53), з урахуванням симетричності функції $\alpha(q)$ (рівності (43)), випливає

$$\lim_{q \rightarrow 0} \alpha(q) \rightarrow 0. \quad (56)$$

Розподіл для функції $f(\rho)$ при $\rho \in [0, R - \Delta\rho) \cup (R + \Delta\rho, +\infty)$ визначається рівністю (50), а при $\rho \rightarrow R$ згідно з (53):

$$f(\rho)|_{\rho \rightarrow R} \rightarrow 0. \quad (57)$$

Диференціюючи (43), з урахуванням (51), одержуємо

$$\varphi_{,q} = -\frac{\alpha_{,q}(1 - f(\rho)/f_0)}{\alpha(q) + (1 - \alpha(q))f(\rho)/f_0},$$

$$\varphi_{,\rho} = -\frac{(1 - \alpha(q))f_{,\rho}/f_0}{\alpha(q) + (1 - \alpha(q))f(\rho)/f_0}. \quad (58)$$

Використовуючи (47), (48), (50) для (58), одержуємо, що в області I і II $\varphi_{,\rho} = 0$, $\varphi_{,q} = 0$, що збігається з (36). В області III при $\rho \rightarrow R$, з урахуванням (57), перше з рівностей (58) можна подати у вигляді

$$\varphi_{,q} = -\alpha_{,q}/\alpha(q), \quad (59)$$

звідки, згідно з (38), при $\Delta q = 0, \Delta\rho = 0$

$$|\alpha_{,q}/\alpha(q)|_{q=0} \rightarrow \infty. \quad (60)$$

Другу з рівностей (58), при $q \rightarrow 0$, з урахуванням (56), можна подати у вигляді

$$\varphi_{,\rho} = -f_{,\rho}/f(\rho), \quad (61)$$

звідки при $\Delta q = 0, \Delta\rho = 0$, згідно з (38):

$$f_{,\rho}/f(\rho)|_{\rho=R} = 0. \quad (62)$$

З іншого боку, розглядаючи рівності (58) у деякому малому околі кола, $q = 0, \rho = R$, тобто всередині області, де сконцентроване скалярне поле, і для якої, відповідно до (56), (57) $f(\rho)/f_0 \ll 1, \alpha(q) \ll 1$ можна записати

$$\varphi_{,q}\varphi_{,\rho} = \frac{(\alpha_{,q}/\alpha(q))}{\left(1 + \frac{1}{f_0} \frac{f(\rho)}{\alpha(q)}\right)} \times \frac{(f_{,\rho}/f(\rho))}{\left(1 + f_0 \frac{\alpha(q)}{f(\rho)}\right)}, \quad (63)$$

тоді, згідно з (38), при $\Delta q = 0, \Delta\rho = 0$, повинно бути виконано

$$\left(\frac{\alpha_{,q}}{\alpha(q)}\right) \times \left(\frac{f_{,\rho}}{f(\rho)}\right)\Big|_{q=0, \rho=R} = 0. \quad (64)$$

Як приклад, можна навести такий вибір функцій $\alpha(q)$ і $f(\rho)$, які задовольняють знайдені умови

$$\alpha(q) = \exp\left(\frac{-1}{\eta + (\xi q)^2}\right), \quad (65)$$

$$f(\rho) = f_0 \exp\left(-\gamma \left(1 - \exp\left(\frac{-1}{(\zeta(\rho - R))^2}\right)\right)\right), \quad (66)$$

де константи ξ і ζ визначають розмір ("товщину") кільця, усередині якого сконцентроване скалярне поле, за змінними q і ρ відповідно, а саме, як випливає з (65), (66), при $\Delta q \rightarrow 0, \Delta\rho \rightarrow 0$:

$$\xi \rightarrow \infty, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (67)$$

а позитивні константи η і γ забезпечують виконання умов (56), (57), (60), (62), при $\Delta q = 0, \Delta\rho = 0, q = 0, \rho = R$, а саме: при $\Delta q \ll 1, \Delta\rho \ll 1$:

$$\eta \ll 1, \quad \gamma \gg 1, \quad (68)$$

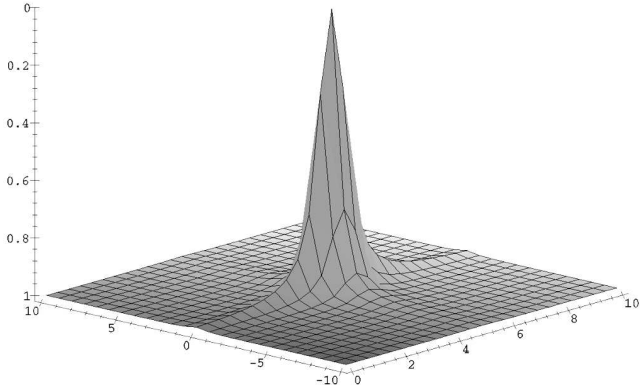


Рис. 1. Розподіли функції $\alpha(q) + (1 - \alpha(q))f(\rho)/f_0$ для (65), (66) при $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\xi = 2$, $\zeta = \gamma = 4$, тут $q \in [-10, 10]$, $\rho \in [0, 10]$

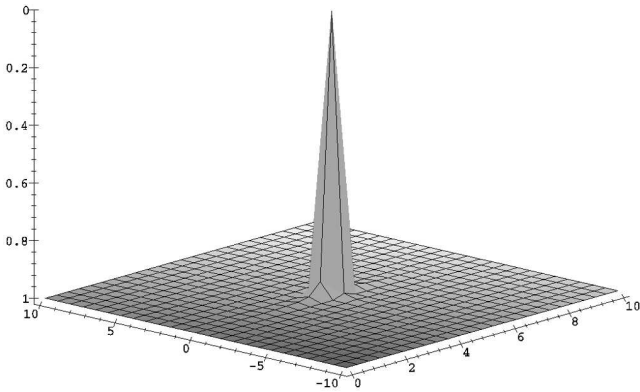


Рис. 2. Розподіли функції $\alpha(q) + (1 - \alpha(q))f(\rho)/f_0$ для (65), (66) при $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$, $\xi = 10$, $\zeta = 20$, тут $q \in [-10, 10]$, $\rho \in [0, 10]$

а за подальшого стискання в одновимірний об'єкт (нуль-струну), тобто при $\Delta q = 0$ $\Delta \rho = 0$

$$\eta = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (69)$$

Використовуючи (51), (65), (66) для (42), одержуємо вираз для одного з можливих розподілів потенціалу безмасового скалярного поля компоненти тензора енергії-імпульсу, для якого при стисканні в одновимірний об'єкт (коло радіуса R) асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни того ж радіуса.

На рис. 1, 2 подано розподіл функції $\alpha(q) + (1 - \alpha(q))f(\rho)/f_0$ в області $q \in [-10, 10]$, $\rho \in [0, 10]$, для функцій $\alpha(q)$, $f(\rho)$ заданих рівностями (65), (66), при $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$, що відповідають вибору значень констант: рис. 1 – $\xi = 2$, $\zeta = 4$; рис. 2 – $\xi = 10$, $\zeta = 20$. Із даних рисунків видно, що зі

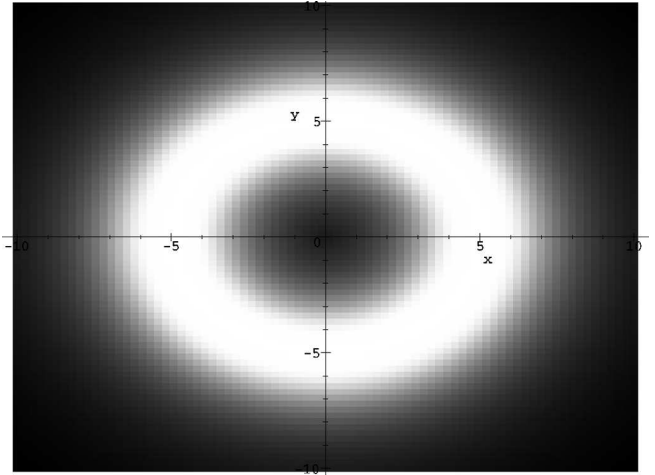


Рис. 3. Розподіл потенціалу скалярного поля для $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$, $\xi = 0,5$, $\zeta = 0,5$, що задається (42), (51), (65), (66) за змінною ρ ($\rho \in [0, 10]$) при фіксованому значенні $q = 0,01$

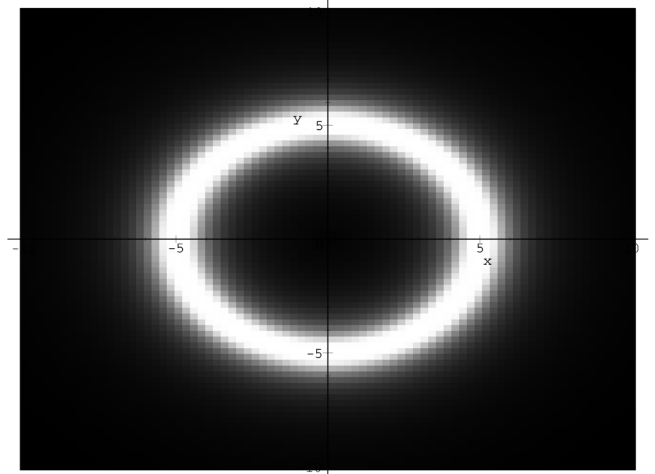


Рис. 4. Розподіл потенціалу скалярного поля для $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$, $\xi = 1,3$, $\zeta = 1,3$, що задається (42), (51), (65), (66), за змінною ρ ($\rho \in [0, 10]$) при фіксованому значенні $q = 0,01$

збільшенням значень констант ξ , ζ область, у якій функція $\alpha(q) + (1 - \alpha(q))f(\rho)/f_0$ відмінна від одиниці (тобто область, в якій сконцентроване скалярне поле і потенціал скалярного поля відмінний від нуля), стискається, чому відповідає зменшення “товщини” кільця, в якому сконцентроване скалярне поле.

На рис. 3, 4 для $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$ наведено змінну розподілу потенціалу скалярного поля, яке задано (42), (51), (65), (66) за змінною ρ ($\rho \in [0, 10]$) при фіксованому значенні $q = 0,01$, що відповідають вибору значень констант: рис. 3 – $\xi = 0,5$, $\zeta = 0,5$;

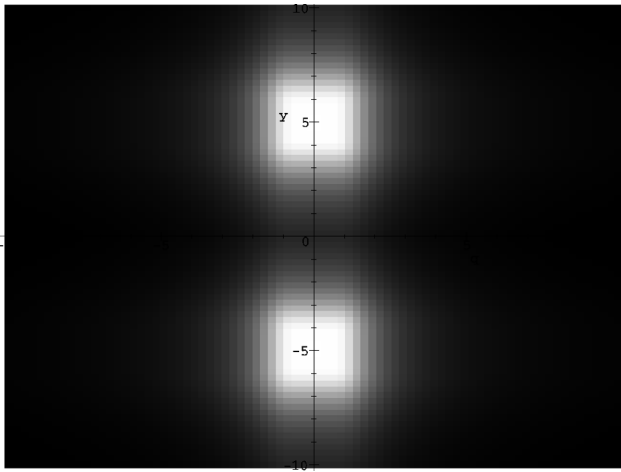


Рис. 5. Розподіл потенціалу скалярного поля для $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$, яке задано (42), (51), (65), (66), на поверхні $\theta = \text{const}$, що відповідає вибору значень констант $\xi = 0,5$, $\zeta = 0,5$, тут $q \in [-10, 10]$, $\rho \in [0, 10]$

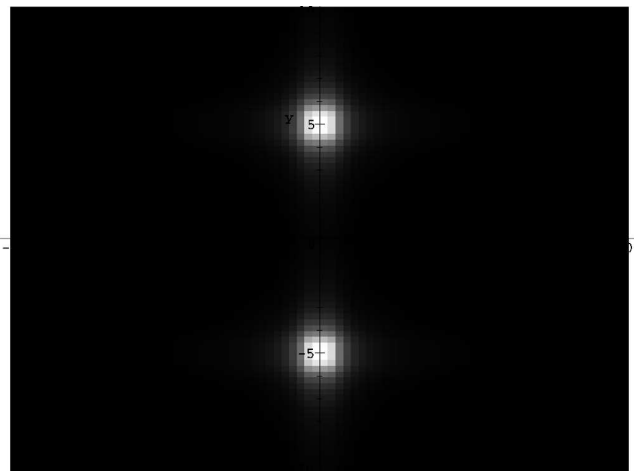


Рис. 6. Розподіл потенціалу скалярного поля для $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$, яке задано (42), (51), (65), (66), на поверхні $\theta = \text{const}$, що відповідає вибору значень констант $\xi = 1,3$, $\zeta = 1,3$, тут $q \in [-10, 10]$, $\rho \in [0, 10]$

рис. 4 – $\xi = 1,3$, $\zeta = 1,3$. Тут чорним кольором виділена область, в якій $\varphi = 0$. Як видно з рисунків, зі збільшенням значення констант ξ , і ζ область, в якій потенціал скалярного поля відмінний від нуля, стискається, чому відповідає зменшення за ρ “товщини” кільця, в якому сконцентроване скалярне поле.

На рис. 5, 6 для $R = 5$, $\eta = 0,01$, $\gamma = 4$ подано розподіли потенціалу скалярного поля, яке задано (42), (51), (65), (66), на поверхні $\theta = \text{const}$, що відповідають вибору значень констант: рис. 5 – $\xi = 0,5$, $\zeta = 0,5$; рис. 6 – $\xi = 1,3$, $\zeta = 1,3$, тут $q \in [-10, 10]$, $\rho \in [0, 10]$. З рисунків видно, що зі збільшенням значень констант ξ , і ζ область, в якій потенціал скалярного поля відмінний від нуля, стискається, тобто зменшується “товщина” кільця, в якому сконцентроване скалярне поле.

4. Висновки

У наведеній роботі, порівнюючи системи рівнянь Ейнштейна для розподілу дійсного, безмасового скалярного поля, яке сконцентровано усередині тонкого кільця із системою рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни радіуса R , що прямує уздовж осі z і в кожен момент часу цілком знаходиться в площині, ортогональній цій осі, ми одержали умови на потенціал скалярного поля, за яких, при стисканні скалярного поля в одновимірний об’єкт (коло радіуса R), компоненти тензора енергії-

імпульсу скалярного поля асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни того ж радіуса. Так само запропоновано загальний вигляд розподілу потенціалу, що описує рух скалярного поля сконцентрованого усередині тонкого кільця незмінного радіуса, уздовж осі z .

Наведено приклад розподілу потенціалу скалярного поля, який задовольняє знайдені умови.

1. P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1994).
2. А.Д. Линде, *Физика элементарных частиц и космология* (Наука, Москва, 1990).
3. T. Vachaspti and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30**, 2036 (1984).
4. A. Vilenkin, *Phys. Reports*, **121**, 263 (1985).
5. T.W.B. Kibble and M.B. Hindmarsh, e-print hep-th/9411342.
6. D.P. Bennet, *Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Cambridge University Press, 1990).
7. A. Schild, *Phys. Rev. D* **16**, 1722 (1977).
8. S.N. Roshchupkin, A.A. Zheltukhin, *Class. Quantum. Grav.* **12**, 2519 (1995).
9. Л.Я. Аріфов, О.П. Лемяков, С.М. Рошупкін, *УФЖ* **43**, 890 (1998).
10. Л.Я. Аріфов, О.П. Лемяков, С.М. Рошупкін, *УФЖ* **44**, 801 (1999).
11. А.П. Лемяков, *Ученые записки ТНУ, Серия “Физика”* **20**, 14 (2007).

Одержано 26.10.10

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ
ДЛЯ “РАЗМАЗАННОЙ” НУЛЬ-СТРУНЫ
ПОСТОЯННОГО РАДИУСА*А.П. Леляков*

Резюме

В работе предложен общий вид распределения потенциала скалярного поля для “размазанной” нуль-струны постоянного радиуса, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси. Найдены условия, при которых в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект (окружность радиуса R), компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой нуль-струны того же радиуса.

SCALAR FIELD POTENTIAL DISTRIBUTION
FOR A “THICK” NULL STRING OF CONSTANT RADIUS*O.P. Lelyakov*V.I. Vernadskyi Taurida National University
(4, Vernadskyi Ave., Simferopol 95007, Ukraine)

Summary

The general form of the scalar field potential distribution for a “thick” null string of constant radius moving along the axis z and completely lying in a plane orthogonal to this axis at every time moment is proposed. The conditions, under which a contraction of the field to a one-dimensional object (circle of radius R) results in the asymptotic coincidence of components of the energy-momentum tensor of a scalar field with those of a closed null string of the same radius, are found.