КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ЗАРЯДЖЕНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ЗОВНІШНЬОМУ НЕКОМУТАТИВНОМУ КАЛІБРОВНОМУ ПОЛІ З ГРУПОЮ $U(1)$

О. СОЛОВЙОВ

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143; e-mail: `avs2132@columbia.edu`*)*

УДК 541.183

Розглянуто заряджене скалярне поле в некомутативному просторі на тлі зовнішнього калібровного поля сталої напруженості з групою $U(1)$. Обчислено кореляційні функції двох калібровно інваріантних композитних операторів. Проілюстровано зв'язок між калібровними перетвореннями в некомутативній теорії поля та геометрією простору. Доведено відновлення калібровної інваріантності вищих кореляторів, незважаючи на те, що функція Гріна не є інваріантною. Результат як функція зовнішнього поля демонструє сингулярну поведінку саме тоді, коли відображення Зайберга–Віттена стає невизначеним. В цьому випадку не існує еквівалентної комутативної картини.

1. Вступ

Некомутативні калібровні теорії привернули до себе увагу в зв'язку з деякими досягненнями в теорії струн. У своїй роботі [2] Зайберг і Віттен довели, що теорія відкритих струн у сильному зовнішньому B-полі дає ефективну некомутативну теорію поля на світовому об'ємі D-бран. Це є однією з мотивуючих причин дослідження взаємодії комутативної і звичайної теорії поля, адже таке дослідження може поглибити розуміння взаємодії відкритих і замкнених струн.

У цій роботі ми досліджуємо теорію некомутативного скалярного поля, що взаємодіє з фоновим калібровним полем. Калібровне поле має сталу напруженість, і воно не є динамічним. Незважаючи на удавану простоту, ця система дозволяє проілюструвати деякі ефекти, пов'язані з калібровними перетвореннями в некомутативних теоріях та відображенням Зайберга–Віттена (відповідність між звичайним та некомутативним описами тої ж самої системи).

З операторів скалярних полів будуємо калібровно інваріантні оператори і обчислюємо їх кореляційні функції. Результат є радіально симетричним, хоча проміжні стадії обчислення містять довільні масштабування координат, що залежать від вибору калібровки зовнішнього поля. Таке "відновлення" симетрії відбувається завдяки переозначенню калібровно інваріантних операторів у відповідності з калібровними перетвореннями в некомутативній теорії. Варто зазначити, що ці кореляційні функції стають сингулярними саме тоді, коли розбігається відображення Зайберга–Віттена. Це відбувається за такого значення напруженості зовнішнього калібровного поля, коли не існує еквівалентної звичайної теорії (тобто теорії на звичайному просторі).

В наступному розділі ми робимо огляд понять некомутативного простору та деформаційного квантування. Зокрема розглядається їх застосування в контексті квантової механіки, звідки вони походять. Справді, некомутативність фазового простору в квантовій механіці найпростіше виявляє себе в контексті деформаційного квантування ($\star$-добуток Мойяла). У цій роботі вивчаємо некомутативність типу Мойяла в координатному просторі. В розділі 3 ми викладаємо виникнення просторової некомутативності з певної теорії струн, як це було зроблено в роботі [2]. В розділі 4 формулюємо класичну калібровну теорію з полями матерії на некомутативному просторі та вводимо відображення Зайберга–Віттена [2], що являє собою еквівалентність між некомутативними та звичайними калібровними теоріями. В розділі 5 ми конструюємо калібровно інваріантні оператори ("спостережувані") та обчислюємо їх кореляційні функції. При цьому зовнішнє поле в нашому обчисленні має сталу напруженість. Така вільна (квадратична по скалярному полю ϕ) теорія поля в певному розумінні є еквівалентною до ефективної звичайної теорії. Ця еквівалентність стає особливо прозорою з точки зору фізики, коли векторний потенціал зовнішнього калібровного поля являє собою лінійну функцію [4]. В цьому випадку побудова ефективної теорії на звичайному просторі вимагає певного масштабування координат, що залежить від калібровки. Саме тому означення калібровно інваріантних кореляційних функцій включає в себе заміну звичайного добутку на $\star$-добуток.

Ми очікуємо, що саме $\star$-добуток забезпечить відновлення симетрії в кореляційних функціях. Калібровна інваріантність переозначених кореляційних функцій перевіряється прямим обчисленням із використанням формального спектрального означення функцій Гріна. Двоточкова калібровно інваріантна функція обчислюється в вигляді ряду, де кожний доданок є явно калібровно інваріантним і радіально симетричним.

2. Некомутативні простори: швидкий огляд

В цьому розділі ми оглядаємо координатну некомутативність, здебільшого в зв'язку з квантовою механікою. Тим не менш, уявлення про те, що некомутативність координат виявляє себе як певна деформація алгебри функцій, є універсальним. Це уявлення сягає далеко поза межі квантово-механічних застосувань, котрим присвячено даний розділ. Історично ідеї деформаційного квантування були вперше сформульовані в контексті квантової механіки, і саме тому ми використовуємо його в цьому розділі.

Поля в некомутативній теорії набувають значень у деформованій алгебрі функцій, де звичайний поточковий добуток замінено на асоціативний некомутативний $\star$-добуток Мойяла. Існує відповідність Вейля–Мойяла ("ВМ-відповідність"), що являє собою зручний інструмент для виконання обчислень у некомутативних теоріях поля. ВМ-відповідність являє собою ізоморфізм між деформованою алгеброю функцій на некомутативному многовиді зі сталою матрицею некомутативності θ^{ij} (тобто алгеброю, у якій набувають значення поля в некомутативній теорії) та алгеброю операторів у допоміжному гільбертовому просторі. У цій роботі ми широко застосовуємо ВМ-відповідність, адже вивчаємо фізичні системи, що виникають у теорії струн після взяття границі Зайберга–Віттена – цим системам притаманна координатна некомутативність саме типу Мойяла.

Як було зазначено, в фізичному контексті некомутативні простори вперше зустрічаються в квантовій механіці. Канонічне квантування вимагає заміни координат $(x,\, p)$ у фазовому просторі на диференційні оператори $(\hat{x},\, \hat{p})$, що задовольняють комутаційне співвідношення

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = \mathrm{i}\mathbb{1}\,. \tag{1}$$

Виникає природне запитання: чи можна сформулювати квантову механіку таким чином, щоб перехід до квазікласичного режиму був найбільш прозорим. Відповідь на це запитання дає деформаційне квантування [1].

Для того, щоб побудувати $\star$-добуток, необхідно сформулювати "правило впорядкування", що дозволяє однозначно побудувати оператор $\hat{\mathcal{O}}_f(\hat{x},\hat{p})$ із функції на фазовому просторі $f(x,p)$. Ми використовуємо симетричне впорядкування ("впорядкування Вейля"), що відповідає

$$xp \to \frac{1}{2}\big(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\big)\,. \tag{2}$$

Для довільних функцій такий рецепт можна сформулювати таким чином. Нехай класична спостережувана $f(x,p)$ подана у вигляді перетворення Фур'є:

$$f(x,p) = \int \frac{d^2k}{2\pi}\tilde{f}(k_x,k_p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_p p)}\,, \tag{3}$$

тоді відповідний квантово-механічний оператор обчислюється за формулою

$$\hat{\mathcal{O}}_f = \int \frac{d^2k}{2\pi}\tilde{f}(k_x,k_p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x \hat{x} + k_p \hat{p})}\,. \tag{4}$$

Застосування іншого впорядкування приведе до зміни форми експоненти в правій частині цього рівняння. Наприклад, "xp"-впорядкування спричинить заміну $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_p p)} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x\hat{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_p\hat{p}}$. Ми обмежуємося розглядом симетричного впорядкування. Зафіксоване правило впорядкування встановлює взаємно однозначну відповідність між класичними спостережуваними (функціями на фазовому просторі) та квантово-механічними операторами.

Квантово-механічні оператори можуть бути представлені як певні псевдодиференціальні оператори, що діють у гільбертовому просторі хвильових функцій $\mathcal{H}$. В координатному представленні ядро такого оператора Гільберта–Шмідта є

$$K_f(x,y) \equiv \langle x|\hat{\mathcal{O}}_f|y\rangle = \int\!\!\int \frac{dz\,dp}{2\pi} f(z,p)\times$$

$$\times e^{\mathrm{i}p(x-y)}\delta\left(z - \frac{x+y}{2}\right)\,. \tag{5}$$

Існує також зворотна формула, що дозволяє відновити класичну спостережувану за ядром відповідного квантового оператора:

$$f(z,p) = \int\!\!\int dx\,dy\,K(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\delta\left(z - \frac{x+y}{2}\right)\,. \tag{6}$$

При цьому дійсні функції $f(x,p)$ відповідають ермітовим операторам $\hat{\mathcal{O}}_f$, і навпаки. Взагалі, комплексне спряження функції $f(x,p)$ спричиняє ермітове спряження відповідного квантово-механічного оператора:

$$\hat{\mathcal{O}}_{\bar{f}} = \hat{\mathcal{O}}_f^\dagger \,. \tag{7}$$

Ще однією важливою властивістю відповідності Вейля–Мойяла є можливість обчислювати сліди операторів у термінах інтегралів по фазовому простору:

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{O}}_f = \int\!\!\int \frac{dx\,dp}{2\pi}\, f(x,p)\,. \tag{8}$$

Після встановлення відповідності між класичними та квантовими спостережуваними можна сформулювати квантову механіку в термінах функцій на фазовому просторі. Справді, означимо $\star$-добуток двох функцій на фазовому просторі f і g таким чином:

$$\hat{\mathcal{O}}_{f\star g} = \hat{\mathcal{O}}_f \circ \hat{\mathcal{O}}_g\,. \tag{9}$$

Такий $\star$-добуток має вигляд (ми явно відновлюємо сталу Планка):

$$(f\star g)(x,p) = f \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hbar(\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_x)/2} g\,. \tag{10}$$

Стрілки над операторами похідних визначають, чи вони діють на функцію зліва чи справа (тобто f або g). $\star$-добуток (10) відомий як добуток Вейля–Мойяла, оскільки він відповідає симетричному рецепту впорядкування (4). До першого порядку по $\hbar$ такий $\star$-добуток можна подати в термінах звичайного добутку та дужки Пуасона $\{\cdot,\cdot\}$:

$$f\star g = fg + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\{f,g\} + O(\hbar^2)\,. \tag{11}$$

У квазікласичному режимі ($\hbar \ll 1$) $\star$-добуток стає звичайним добутком, а $\star$-комутатор зводиться до дужки Пуасона:

$$[f,g]_\star \equiv f\star g - g\star f = \mathrm{i}\hbar\{f,g\} + O(\hbar^3)\,. \tag{12}$$

Відповідність Вейля–Мойяла є частинним випадком задачі деформаційного квантування. Загальна задача деформаційного квантування полягає в тому, щоб знайти однопараметричну (з параметром $\hbar$) асоціативну деформацію алгебри функцій, яка в квазікласичному режимі ($\hbar \to 0$) відтворює дужку Пуасона [7]. Визначною властивістю випадку Мойяла є те, що дужка Пуасона координатних функцій є сталою.

Формулювання квантової механіки в термінах деформаційного квантування має бути доповнене правилом для обчислення спостережуваних. Хоча поняття хвильової функції не може бути переформульоване в термінах лише фазового простору і тому не існує в контексті деформаційного квантування, середні значення спостережуваних можна обчислювати за допомогою оператора матриці густини $\hat{\rho}$. Зворотний образ цього оператора в симетричному впорядкуванні широко відомий як функція Вігнера $W(x,p)$. Рівняння (6) дозволяє обчислити функцію Вігнера, коли відома матриця густини. Для чистого стану з (нормалізованою) хвильовою функцією $\psi(x)$ функція Вігнера є

$$W(x,p) = \int d\xi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\xi} \bar{\psi}\left(x+\frac{\xi}{2}\right)\,\psi\left(x+\frac{\xi}{2}\right)\,. \tag{13}$$

Середнє значення спостережуваної f можна обчислити таким чином:

$$\langle f\rangle \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{O}}_W \hat{\mathcal{O}}_f = \int\!\!\int \frac{dx\,dp}{2\pi}\, W(x,p) f(x,p)\,. \tag{14}$$

Взагалі має місце формула

$$\int\!\!\int \frac{dx\,dp}{2\pi}\, f\star g = \int\!\!\int \frac{dx\,dp}{2\pi}\, fg\,. \tag{15}$$

Саме ця властивість дозволяє замінити $\star$-добуток в правій частині (14) на звичайний добуток. Зауважимо, що інтерпретація функції Вігнера як густини ймовірності на фазовому просторі в контексті рівняння (14) не є можливою, оскільки вона може набувати від'ємних значень. Лише після інтегрування по x (або p) функція Вігнера стає невід'ємною. Взагалі, можливість обчислювати середні є ексклюзивною властивістю квантування Мойяла. Таке обчислення не може бути зроблене в загальному контексті деформаційного квантування [7].

3. Виникнення некомутативного простору в теорії струн

В цьому розділі ми розглядаємо зв'язок між певними режимами теорії струн і виникненням некомутативного простору в теорії поля. Взагалі, виникнення некомутативних теорій поля в теорії струн детально розглядається в роботах [2, 9].

Найважливішою компонентою, що відповідає за виникнення некомутативності є два-форма Неве–Шварца B. При поширенні струна залишає двовимірний світовий лист Σ (на відміну від одновимірної світової лінії частинок). Взаємодія струни з фоновим B-полем походить із доданку

$$\int_\Sigma B\,. \tag{16}$$

Геометрично структура цієї взаємодії нагадує взаємодію калібровного поля з точковою частинкою. Єдиною відмінністю є те, що для частинки природною є взаємодія з 1-формою A (калібровним потенціалом електромагнітного поля), згідно з розмірністю її світової лінії.

У термінах координатних полів функціонал дії струни, що поширюється в плоскому просторі з метрикою g_{ij}, є

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma g_{ij}\partial_a x^i \partial^a x^j - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_\Sigma B_{ij}\epsilon^{ab}\partial_a x^i \partial_b x^j . \quad (17)$$

Другий доданок складає взаємодію між струною та B-полем. Так само, як і в роботі [2], розглядаємо випадок сталого поля B (тобто, воно не залежить від координат x^i). Ця умова вимагає точності форми B:

$$B = \frac{1}{2}B_{ij}\,dx^i \wedge dx^j = d\left(\frac{1}{2}B_{ij}x^i dx^j\right) \equiv dA . \quad (18)$$

Отже, для відкритої струни, кінці якої прикріплені до D-брани, взаємодія з B-полем зводиться до лінійного інтеграла вздовж (орієнтованої) границі світового листа. Справді, можна використати теорему Стокса:

$$\int_\Sigma B = \int_{\partial\Sigma} A . \quad (19)$$

Тоді кінці струни поводять себе як два заряди, що формують диполь.

Рівняння руху визначають граничні умови для координат з індексами i вздовж брани:

$$g_{ij}\partial_n x^j + 2\pi\mathrm{i}\alpha' B_{ij}\partial_t x^j|_{\partial\Sigma} = 0 . \quad (20)$$

В цьому рівнянні ∂_n – нормальна похідна, а ∂_t – похідна в напрямі, дотичному до границі $\partial\Sigma$. Зауважимо, що в режимі сильного B-поля змішані граничні умови стають граничними умовами типу Діріхле.

У роботі [2] вивчається світовий лист струни, що має топологію диска. Пропагатор, обчислений у двох точках на границі диска, є

$$\langle x^i(\tau)x^j(\tau')\rangle = -\alpha' G^{ij}\log(\tau-\tau')^2 +$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{ij}\,\mathrm{sign}(\tau-\tau') . \quad (21)$$

У нових позначеннях ефективна метрика

$$G^{ij} = -(2\pi\alpha')^2\left[\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}g\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right]^{ij} , \quad (22)$$

а матриця некомутативності

$$\theta^{ij} = -(2\pi\alpha')^2\left[\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}B\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right]^{ij} . \quad (23)$$

Із явної форми пропагатора можна бачити, що комутатор двох координатних полів ненульовий:

$$[x^i(\tau), x^j(\tau)] = \mathrm{i}\theta^{ij} . \quad (24)$$

Важливим є режим Зайберга–Віттена (ЗВ), коли α' є малою (або імпульси в просторі, де поширюється струна, є малими).[1] В цьому режимі операторний добуток стає

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}(\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}(\tau') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \star \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}(\tau') , \quad (25)$$

де $\star$-добуток – це $\star$-добуток Мойяла:

$$f_1 \star f_2(x) = f_1(x)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial}_\nu} f_2(x) , \quad (26)$$

з матрицею некомутативності

$$\theta^{ij} = (B^{-1})^{ij} . \quad (27)$$

Низькоенергетична динаміка відкритих струн у ЗВ-режимі відповідає некомутативній теорії поля.

Як було пояснено, стале B-поле в просторі, де поширюються струни, є еквівалентним до магнітного поля A на світовому об'ємі брани. З цієї точки зору координатна некомутативність не є рисою виключно теорії струн. Справді, розглянемо функціонал дії для зарядженої частинки в магнітному полі:

$$S = m\int \frac{\dot{x}^2}{2}\,dt - \int A_i dx^i . \quad (28)$$

В режимі сильного магнітного поля другий доданок домінує, так що функціонал дії спрощується:

$$S = -\int A_i \dot{x}^i dt . \quad (29)$$

Канонічні імпульси є

$$p_i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} = -A_i(x) . \quad (30)$$

Для сталого магнітного поля B можна вибрати калібровку

$$A_i = -\frac{1}{2}B_{ij}x^j , \quad (31)$$

[1] Точніше, в ЗВ-режимі необхідно зробити $\alpha' \sim \epsilon^{1/2} \to 0$ та $g_{ij} \sim \epsilon \to 0$ вздовж напрямків із ненульовим B-полем. Саме ці напрямки стають некомутативними. Усі інші поля є скінченними.

і тоді дужки Пуасона між двома координатами стають ненульовими:

$$\{x^i, x^j\} = \left(\frac{1}{B}\right)^{ij} . \tag{32}$$

Цей вираз точно відповідає матриці некомутативності (27).

У квантовій механіці хвильова функція частинки в магнітному полі може бути параметризована двома квантовими числами: дискретними рівнями енергії (рівні Ландау) та однією з координат центра орбіти. В режимі сильного магнітного поля радіус орбіти зменшується, і різниця між сусідніми рівнями енергії зростає. Відбувається проекція на нижній рівень Ландау, і тоді залишається єдине квантове число – одна з координат частинки. Неможливість одночасно визначити дві координати є прямим наслідком співвідношення невизначеності.

Ми будемо використовувати таку параметризацію $\star$-добутку:

$$f_1 \star f_2(x) = \int d^d x' \, d^d x'' \, K(x, x', x'') f_1(x') f_2(x'') \,, \tag{33}$$

з інтегральним ядром

$$K(x, x', x'') = \frac{1}{\pi^d \det(\theta^{\mu\nu})} \, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(x'-x)^\mu (\theta^{-1})_{\mu\nu}(x''-x)^\nu} . \tag{34}$$

У цій роботі розглядаємо простір з двома некомутуючими просторовими координатами:

$$\left[x^1, x^2\right] = \mathrm{i}\theta^{12} \equiv \mathrm{i}\theta. \tag{35}$$

В цьому випадку [5]

$$K(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2\theta^2} \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}}{\theta}\left(x^2(y^1-z^1)+y^2(z^1-x^1)+z^2(x^1-y^1)\right)}. \tag{36}$$

Ми будемо використовувати цей вираз в обчисленні різних $\star$-добутків. Якщо в наявності є додаткові комутуючі координати, то з точки зору $\star$-добутку вони є звичайними параметрами.

4. Класична калібровна теорія на некомутативному просторі

Функціонал дії класичної теорії поля на некомутативному просторі відрізняється від функціонала дії звичайної теорії заміною звичайного початкового добутку між полями в лагранжіані на $\star$-добуток. У випадку калібровної теорії така заміна супроводжується зміною правила калібровних перетворень:

$$A_i \to U \star A_i \star \bar{U} - \mathrm{i}\partial_i U \star \bar{U}. \tag{37}$$

В цьому виразі $\bar{U}(x)$ є функцією поточково комплексно спряженою до $U(x)$, як і в звичайній теорії. Зауважимо, однак, що умови унітарності на $U(x)$ відрізняються від умов унітарності в звичайній теорії. Це викликає зміну в означенні коваріантних похідних, що діють на заряджене скалярне поле:

$$D_i\phi = \partial_i\phi - \mathrm{i}A_i \star \phi \,. \tag{38}$$

Напруженість калібровного поля в некомутативній калібровній теорії, так само як і в звичайній калібровній теорії, визначається як комутатор двох коваріантних похідних:

$$F_{ij} = \mathrm{i}\,[D_i, D_j] = \partial_i A_j - \partial_j A_i - \mathrm{i}[A_i, A_j]_\star \,. \tag{39}$$

Зауважимо, що доданок із комутатором двох калібровних полів $[A_i, A_j]_\star$ не може бути відкинутий навіть тоді, коли калібровна група звичайної[2] калібровної теорії є $U(1)$. Напруженість калібровного поля перетворюється таким чином:

$$F_{ij} \to U \star F_{ij} \star \bar{U} \,. \tag{40}$$

В роботі [2] наголошується, що з точки зору теорії струн комутативний та некомутативний описи однієї системи є еквівалентними. Відповідно, існує відображення між полями звичайної та некомутативної калібровної теорії, відоме як відображення Зайберга–Віттена (ЗВ-відображення). Якщо два поля звичайної теорії A_{ord} та A'_{ord} пов'язані калібровним перетворенням із породжуючою функцією U_{ord}, то існує така породжуюча функція U в некомутативній теорії, що ототожнює образи полів під дією ЗВ-відображення $A(A_{\mathrm{ord}})$ та $A'(A'_{\mathrm{ord}})$. Таким чином, наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathrm{ord}} & \xrightarrow{U_{\mathrm{ord}}} & A'_{\mathrm{ord}} \\ \big\downarrow \mathrm{SW} & & \big\downarrow \mathrm{SW} \\ A & \xrightarrow{U(U_{\mathrm{ord}},A)} & A'. \end{array}$$

Важливим фактом є залежність U від U_{ord} та A. За відсутності залежності від A така конструкція ЗВ-відображення забезпечувала б ізоморфізм

[2] Як і автори роботи [2], ми вживаємо термін "звичайна" замість "комутативна" для теорії на просторі з комутуючими координатами.

між звичайною та некомутативною калібровною групою. Природно, це неможливо. Таким чином, ЗВ-відображення ототожнює лише класи калібровної еквівалентності, а не самі калібровні перетворення.

Польова система, на якій ми фокусуємо увагу, складається з комплексного скалярного поля на тлі некомутативного $U(1)$-калібровного поля. Функціонал дії будується звичайним чином:

$$S = -\int \bar{\phi}(-D_i D^i + m^2)\phi. \tag{41}$$

Метричний тензор має Евклідову (++) сигнатуру. Коваріантні похідні діють згідно з правилом (38), калібровні перетворення породжуються $\star$-унітарними U:

$$\phi \to U \star \phi\,, \tag{42}$$

$$\bar{\phi} \to \bar{\phi} \star \bar{U}\,, \tag{43}$$

з такою умовою "$\star$-унітарності":

$$\bar{U} \star U = 1 = U \star \bar{U}. \tag{44}$$

Обидві зазначені умови є необхідними внаслідок нескінченної розмірності простору функцій: можуть існувати такі U, що $\bar{U}\star U = 1$ та $U\star\bar{U} \neq 1$. Добре відомим прикладом [6] є векторний простір із базисними векторами $\{|1\rangle, |2\rangle, \ldots\}$ і оператор U:

$$U|n\rangle = |n+1\rangle\,. \tag{45}$$

У цьому випадку $U^\dagger U = \mathbb{1}$, але $UU^\dagger = \mathbb{1} - |1\rangle\langle 1|$.

Зауважимо, що інваріантність дії (41) зберігається навіть тоді,[3] коли

$$\bar{U} \star U = 1, \quad U \star \bar{U} = 1 - P\,, \tag{46}$$

де P – деякий проектор, тобто, $P \star P = P$. Така породжуюча функція є "топологічно нетривіальною", тобто, $U \neq \mathrm{e}_\star^{\mathrm{i}f}$ для жодного дійсного f. Під дією такого перетворення напруженість поля перетворюється таким чином:

$$F_{ij} \to U \star F_{ij} \star \bar{U} + U \star (A_j \star \partial_i \bar{U} - A_i \star \partial_j \bar{U}) \star P +$$

$$+\mathrm{i}(\partial_i U \star \partial_j \bar{U} - \partial_j U \star \partial_i \bar{U}) \star P\,. \tag{47}$$

[3] Автор висловлює подяку О. Морозову за привернення уваги до цього факту.

Таке перетворення порушує калібровну інваріантність повної дії калібровної теорії, що містить доданок із $F_{ij}F^{ij}$ (цей доданок відсутній у нашому випадку, коли калібровне поле не є динамічним). Після виконання перетворення з U типу (46) калібровне поле A_i перестає бути дійсним.

Надалі ми працюємо з полем сталої напруженості $F_{12} = F$, для якого ми вибираємо лінійний потенціал:

$$A_1 = -\alpha_1 x^2, \quad A_2 = \alpha_2 x^1\,. \tag{48}$$

В термінах параметрів $\alpha_{1,2}$ напруженість поля є

$$F = \alpha_1 + \alpha_2 + \theta\alpha_1\alpha_2\,. \tag{49}$$

Взагалі-то, напруженість поля F не є калібровно інваріантною, але у нашому випадку напруженість стала, і вона не змінюється під дією калібровних перетворень (стала F $\star$-комутує з усіма породжуючими функціями і не змінюється при спряженні). Не втрачаючи загальності, ми вважаємо, що $F > 0$.

Детальний аналіз різних калібровок зроблено в роботі [4]. Не повторюючи цей аналіз, ми конструюємо однопараметричну родину породжуючих функцій U_t. Генеровані за допомогою цих породжуючих функцій калібровні перетворення залишають потенціал типу (48) в цьому ж класі:

$$U_t = \frac{1}{\cosh t}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{\theta}x^1x^2\tanh t}\,, \tag{50}$$

$$U_0 = 1, \quad \bar{U}_t = U_{-t}, \quad U_{t_1} \star U_{t_2} = U_{t_1+t_2}. \tag{51}$$

У результаті перетворення, породженого U_t, параметр α_i змінюється таким чином:

$$\alpha_1 \to \mathrm{e}^{-2t}\alpha_1 - \frac{2}{\theta}\mathrm{e}^{-t}\sinh t\,, \tag{52}$$

$$\alpha_2 \to \mathrm{e}^{2t}\alpha_2 + \frac{2}{\theta}\mathrm{e}^{t}\sinh t\,. \tag{53}$$

Ще однією властивістю поля сталої напруженості є можливість в явному вигляді обчислити відображення Зайберга–Віттена [2]:

$$F = \left(\mathbb{1} + F_{\mathrm{ord}}\theta\right)^{-1} F_{\mathrm{ord}}\,, \tag{54}$$

$$F_{\mathrm{ord}} = F\left(\mathbb{1} - \theta F\right)^{-1}. \tag{55}$$

Це співвідношення буде важливим для фізичної інтерпретації нашого результату.

5. Квантова теорія

Як вже було наголошено, частина дії некомутативної теорії, що містить добуток щонайбільше двох полів, збігається зі звичайною теорією (як наслідок (15)). В нашому випадку теорія містить лише квадратичні доданки по ϕ, $\bar{\phi}$, і тому може бути проаналізована за допомогою стандартних методів. Справді, якщо знайти власні функції оператора $(-D_i D^i + m^2)$ f_n та власні значення λ_n, то можна обчислити функцію Гріна (двоточкову функцію) використовуючи формальне спектральне означення:[4]

$$G(x_{(1)}, x_{(2)}) = -\sum_n \frac{1}{\lambda_n} f_n(x_{(1)}) \bar{f_n}(x_{(2)})\,. \tag{56}$$

Індекс (квантове число) n може бути дискретним або неперервним. Так само, як і в звичайному випадку, двоточкова функція

$$\left\langle \phi(x_{(1)})\bar{\phi}(x_{(2)})\right\rangle = \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\bar{\phi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi,\bar{\phi}]}\phi(x_{(1)})\bar{\phi}(x_{(2)}) =$$

$$= \mathrm{i}G(x_{(1)}, x_{(2)})\,. \tag{57}$$

Такий "вільний" пропагатор не є калібровно інваріантним, і він перетворюється за формулою

$$G(x_{(1)}, x_{(2)}) \to U(x_{(1)}) \star G(x_{(1)}, x_{(2)}) \star \bar{U}(x_{(2)}). \tag{58}$$

Для перевірки цього факту необхідно впевнитися в тому, що міра інтегрування $\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{\phi}$ є інваріантною відносно калібровних перетворень. В цьому місці знову виявляється, що в рівнянні (44) необхідні обидві умови. Під час цієї перевірки зручно використати відповідність Вейля-Мойяла. Позначимо оператор у допоміжному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, що відповідає полю ϕ, як $\hat{\mathcal{O}}_\phi$. Тоді міра інтегрування набуває вигляду

$$\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{\phi} = N \prod_{m,n\geq 0} d\phi_{mn} d\bar{\phi}_{mn},. \tag{59}$$

Матричні елементи обчислюються за такою формулою:

$$\phi_{mn} = \langle m|\hat{\mathcal{O}}_\phi|n\rangle\,, \tag{60}$$

$$\bar{\phi}_{mn} = \langle m|\hat{\mathcal{O}}_\phi^\dagger|n\rangle\,, \tag{61}$$

[4] Верхні індекси координат x^i – координатні індекси, нижні індекси в дужках – номери позицій у двоточковій та вищих функціях.

де $\{|m\rangle\}$ – деякий зручний вибір базисних векторів у гільбертовому просторі. Для породжуючої функції U типу (45) має місце співвідношення

$$\langle m|\hat{\mathcal{O}}_U \hat{\mathcal{O}}_\phi|n\rangle = \begin{cases} \phi_{m-1,n}\,, & m \geq 1\,, \\ 0\,, & m = 0\,. \end{cases} \tag{62}$$

Подібна формула має місце для $\bar{\phi} \leftrightarrow \hat{\mathcal{O}}_\phi^\dagger$, так що в цьому випадку навіть область інтегрування не є інваріантною. Зауважимо, що закон перетворення (58) можна також отримати з розкладу (56). У випадку, коли перетворення, породжене U, має зворотне (тобто, U має ліву зворотну функцію, яка також породжує калібровне перетворення – у випадку (46) $\bar{U}$ не задовольняє цієї умови), всі власні функції до і після перетворення є у взаємно однозначній відповідності; таким чином, правило перетворення (58) справджується. Некомутативні теорії поля є нелокальними, оскільки $\star$-добуток містить нескінченне число похідних. Однак, коли один із множників є поліномом, ряд у формулі (26) містить скінченне число доданків. Саме це відбувається при взаємодії скалярного поля з лінійним потенціалом (48). Якщо вибрати $A_1 = -Fx^2$, $A_2 = 0$, то $D_1 = (1 + \frac{F\theta}{2})\partial_1 + \mathrm{i}Fx^2$, $D_2 = \partial_2$. Отже, в даному випадку ефект некомутативності – це простий розтяг координати x^1? З іншого боку, в калібровці $A_1 = 0$, $A_2 = Fx^1$ відбувається розтяг іншої координати. Якщо застосувати симетричну калібровку, обидві координати розтягуються однаково. З цього прикладу стає зрозуміло, що калібровно інваріантні кореляційні функції змінюються відносно теорії на комутативному просторі. Справді, наївний корелятор $\langle :\bar{\phi}\phi(x_{(1)}) :: \bar{\phi}\phi(x_{(2)}) :\rangle$ не є інваріантним відносно калібровної групи некомутативної теорії. Його треба замінити на[5]

$$\left\langle :\bar{\phi}\star\phi(x_{(1)})::\bar{\phi}\star\phi(x_{(2)}):\right\rangle. \tag{63}$$

Позначимо $\beta_i = 1 + \frac{\alpha_i\theta}{2}$, тоді коваріантні похідні набувають вигляду

$$D_1 = \beta_1\partial_1 + \mathrm{i}\alpha_1 x^2\,, \tag{64}$$

$$D_2 = \beta_2\partial_2 - \mathrm{i}\alpha_2 x^1\,. \tag{65}$$

Проблема знаходження власних функцій f_n може бути розв'язана з використанням анзацу

$$f_n(x) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha_2}{\beta_2}x^1 x^2\right) g_n(x)\,, \tag{66}$$

[5] Ми будемо називати такий корелятор двоточковим.

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2011. Т. 56, №5

тоді вона зводиться до такого рівняння:

$$\left\{-\beta_1^2\partial_1^2-\beta_2^2\partial_2^2-2\left(\frac{\beta_1^2\alpha_2}{\beta_2}+\alpha_1\beta_1\right)x^2\partial_1\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\beta_1^2\alpha_2}{\beta_2}+\alpha_1\beta_1\right)^2(x^2)^2+m^2\right\}g_n=\lambda_n g_n\,. \qquad (67)$$

З цього рівняння можна знайти шукані власні функції і власні значення:

$$f_{n,k}=\frac{\sqrt[4]{F}}{\sqrt{2\pi|\beta_2|}}\exp\left\{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}x^1x^2+kx^1\right)\right\}\times$$

$$\times\psi_n\left(\frac{x^2\sqrt{F}}{\beta_2}+\frac{\beta_1 k}{\sqrt{F}}\right), \qquad (68)$$

$$\lambda_n=(2n+1)F+m^2. \qquad (69)$$

У наших позначеннях ψ_n – n-та нормалізована хвильова функція одновимірного гармонічного осцилятора з одиничною частотою (добуток полінома Ерміта та $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$). Корелятор (63) може бути обчислений із використанням теореми Віка, так само як і в звичайній теорії:

$$\left\langle :\bar{\phi}\star\phi(x_{(1)})::\bar{\phi}\star\phi(x_{(2)}):\right\rangle=-G(x_{(1)},x_{(2)})\times$$

$$\times\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{ij}(\overrightarrow{\partial}_{(1)i}\overleftarrow{\partial}_{(1)j}+\overleftarrow{\partial}_{(2)i}\overrightarrow{\partial}_{(2)j})}G(x_{(2)},x_{(1)}). \qquad (70)$$

Він може бути поданий у термінах власних функцій f_n:

$$\left\langle :\bar{\phi}\star\phi(x_{(1)})::\bar{\phi}\star\phi(x_{(2)}):\right\rangle=-\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_1\,dk_2\left(\bar{f}_{n_1,k_1}\star f_{n_2,k_2}(x_{(1)})\right)\times$$

$$\times\left(\bar{f}_{n_2,k_2}\star f_{n_1,k_1}(x_{(2)})\right). \qquad (71)$$

Права частина (71) може бути обчислена з використанням інтегрального представлення $\star$-добутку за допомогою ядра (36):

$$\bar{f}_{n_1,k_1}\star f_{n_2,k_2}(x)=-\frac{|2+\alpha_2\theta|\sqrt{F}}{4\pi|1+\alpha_2\theta|}\times$$

$$\times\psi_{n_1}\Big(\frac{(2+\alpha_2\theta)(2+F\theta)}{4(1+\alpha_2\theta)\sqrt{F}}k_1+\frac{(2+\alpha_2\theta)F\theta}{4(1+\alpha_2\theta)\sqrt{F})}k_2+$$

$$+x^2\sqrt{F}\Big)\,\psi_{n_2}\Big(\frac{(2+\alpha_2\theta)F\theta}{4(1+\alpha_2\theta)\sqrt{F})}k_1+$$

$$+\frac{(2+\alpha_2\theta)(2+F\theta)}{4(1+\alpha_2\theta)\sqrt{F}}k_2+x^2\sqrt{F}\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^1\frac{(k_2-k_1)(2+\alpha_2\theta)}{2(1+\alpha_2\theta)}}. \qquad (72)$$

У процесі обчислення корисно використати таку заміну змінних:

$$k_1=\frac{\sqrt{F}}{2+F\theta+\alpha_1\theta}\big((2+F\theta)\xi_1-F\theta\xi_2\big)\,, \qquad (73)$$

$$k_2=\frac{\sqrt{F}}{2+F\theta+\alpha_1\theta}\big(-F\theta\xi_1+(2+F\theta)\xi_2\big)\,, \qquad (74)$$

$$\Big|\det\Big(\frac{\partial(k_1,k_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}\Big)\Big|=\frac{4F(1+\alpha_2\theta)}{(1+\alpha_1\theta)(2+\alpha_2\theta)^2}\times$$

$$\times\,\mathrm{sign}(1+F\theta)\,; \qquad (75)$$

тоді

$$\bar{f}_{n_1,k_1}\star f_{n_2,k_2}(x)=-\frac{|2+\alpha_2\theta|\sqrt{F}}{4\pi|1+\alpha_2\theta|}\times$$

$$\times\psi_{n_1}\left(x^2\sqrt{F}+\xi_1\right)\psi_{n_2}\left(x^2\sqrt{F}+\xi_2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^1\sqrt{F}(\xi_2-\xi_1)}. \qquad (76)$$

Оскільки власні значення λ_n не залежать від k, інтегрування по k_1,k_2 (або ξ_1,ξ_2) в сумі (71) можна виконати явно. Після зсуву змінної інтегрування $\xi_i\to\xi_i-\frac{(x^2_{(1)}+x^2_{(2)})\sqrt{F}}{2}$ інтеграл в правій частині (71) набуває вигляду

$$\int d\xi_1\,d\xi_2\,\psi_{n_1}\left(\frac{x^2\sqrt{F}}{2}+\xi_1\right)\psi_{n_1}\left(-\frac{x^2\sqrt{F}}{2}+\xi_1\right)\times$$

$$\times\psi_{n_2}\left(\frac{x^2\sqrt{F}}{2}+\xi_2\right)\psi_{n_2}\left(-\frac{x^2\sqrt{F}}{2}+\xi_2\right)\times$$

$$\times\exp\left\{2\mathrm{i}\frac{x^1\sqrt{F}}{2}(\xi_1-\xi_2)\right\};$$

$$x \equiv x_1 - x_2 . \tag{77}$$

Важливою властивістю є визначена парність функцій ϕ_n. З її допомогою останній вираз спрощується:

$$\int d\xi\, \psi_n \left(-\frac{x^2\sqrt{F}}{2} + \xi\right) \psi_n \left(\frac{x^2\sqrt{F}}{2} + \xi\right) \times$$

$$\times \exp\left\{2\mathrm{i}\frac{x^1\sqrt{F}}{2}\xi\right\} = (-1)^n \int d\xi\, \psi_n \left(\frac{x^2\sqrt{F}}{2} - \xi\right) \times$$

$$\times \psi_n \left(\frac{x^2\sqrt{F}}{2} + \xi\right) \exp\left\{2\mathrm{i}\frac{x^1\sqrt{F}}{2}\xi\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}\phi_n \left(\frac{x^2\sqrt{F}}{2}, \frac{x^1\sqrt{F}}{2}\right). \tag{78}$$

ϕ_n позначає функцію Вігнера на фазовому просторі (x^1, x^2), що відповідає чистому квантово-механічному стану $|\psi_n\rangle$. Ця функція є образом оператора $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ відносно ВМ-відповідності ($\hbar = 1$). В нашому випадку

$$\phi_n(x) = 2(-1)^n \mathrm{e}^{-|x|^2} L_n(2|x|^2), \tag{79}$$

де L_n – n-й поліном Лагерра. Ці функції складають повний набір одновимірних радіально симетричних $\star$-проекторів, що задовольняють рівняння $\phi \star \phi = \phi$ [3]. Остаточний результат має вигляд

$$\langle :\bar{\phi} \star \phi(x_{(1)}) : : \bar{\phi} \star \phi(x_{(2)}) : \rangle = -\frac{1}{|1 + F\theta|\pi^2} \times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n F \phi_n(\frac{x\sqrt{F}}{2})}{4((2n+1)F + m^2)}\right)^2 ; x \equiv x_{(1)} - x_{(2)} . \tag{80}$$

В цьому обчисленні двоточкова кореляційна функція факторизується так само, як і в звичайній теорії:

$$\langle :\bar{\phi}\phi(x_{(1)}) : : \bar{\phi}\phi(x_{(2)}) : \rangle = -|\langle \bar{\phi}(x_{(1)})\phi(x_{(2)})\rangle|^2 . \tag{81}$$

Отже, в некомутативній теорії (80) – також повний квадрат (не лише $\star$-квадрат) певної калібровно інваріантної функції. У граничному випадку $F \to 0$ маємо

$$\sum_n \frac{(-1)^n F \phi_n(\frac{x\sqrt{F}}{2})}{4((2n+1)F + m^2)} \sim \sum_n \frac{(-1)^n F \phi_n(\frac{x\sqrt{F}}{2})}{4m^2} =$$

$$= \frac{\delta^{(2)}(x)}{m^2} , \tag{82}$$

в цьому режимі корелятор стає сингулярним. Також варто зауважити, що множник $1/(1 + F\theta)$ в формулі (80) стає сингулярним, коли $F\theta = -1$. Тоді кореляційна функція стає сингулярною незалежно від просторової відстані між двома точками. Ця сингулярність має фізичне значення. Згадаємо, що в режимі Зайберга–Віттена матриця некомутативності $\theta = 1/B$. Із цим ототожненням ЗВ-відображення (55) набуває вигляду

$$F_{\mathrm{ord}} = F \frac{1}{B - F} B . \tag{83}$$

Отже, коли $B = F$, або $\theta F = \mathbb{1}$ (саме це має місце в нашому випадку: $F_{12}\theta^{21} \equiv -\theta F = 1$), теорія не має еквівалентного комутативного опису. Це явище спричиняє сингулярність при $F = -1/\theta$.

Вищі корелятори обчислюються так само, як і в звичайній теорії. Єдиною відмінністю є множення функцій Гріна за допомогою $\star$-добутку, як в рівнянні (70). Саме $\star$-добуток забезпечує калібровну інваріантність обчислюваних кореляторів. У процесі числення n-точкової функції можна зробити таку заміну змінних інтегрування:

$$\frac{2 + \alpha_2\theta}{1 + \alpha_2\theta} k_i \to k_i . \tag{84}$$

Тоді Якобіан знищує неінваріантний фактор у правій частині (72), і кожний доданок у сумі є явно калібровно інваріантним (тобто залежить лише від F). Корелятори з $n > 2$ точками більше не зводяться до проекторних солітонів [3]. Наприклад, для $n = 3$ з'являються доданки типу

$$\int dk_1\, dk_2\, dk_3\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(x^1_{(1)}(k_3 - k_1) + x^1_{(2)}(k_1 - k_2) + x^1_{(3)}(k_2 - k_3)\right)} \times$$

$$\times \psi_{n_1} \left(x^2_{(1)}\sqrt{F} + \frac{(2 + F\theta)k_1 + F\theta k_3}{4\sqrt{F}}\right) \times$$

$$\times \psi_{n_3} \left(x^2_{(1)}\sqrt{F} + \frac{(2 + F\theta)k_3 + F\theta k_1}{4\sqrt{F}}\right) \times$$

$$\times \psi_{n_2} \left(x^2_{(2)}\sqrt{F} + \frac{(2 + F\theta)k_2 + F\theta k_1}{4\sqrt{F}}\right) \times$$

$$\times\psi_{n_1}\left(x^2_{(2)}\sqrt{F}+\frac{(2+F\theta)k_1+F\theta k_2}{4\sqrt{F}}\right)\times$$

$$\times\psi_{n_3}\left(x^2_{(3)}\sqrt{F}+\frac{(2+F\theta)k_3+F\theta k_2}{4\sqrt{F}}\right)\times$$

$$\times\psi_{n_2}\left(x^2_{(3)}\sqrt{F}+\frac{(2+F\theta)k_2+F\theta k_3}{4\sqrt{F}}\right), \qquad (85)$$

тоді не спрацює заміна, подібна (75). Легко бачити, що вираз (85) не змінюється при однаковому зсуві $x_{(i)}$', отже, результат є функцією лише відносної позиції точок.

Цікаво також побудувати породжуючий функціонал. Для цього треба додати до дії струм, що відповідає складеному оператору $\bar{\phi}\star\phi$:

$$S\to S+\int J(x)\,\bar{\phi}\star\phi(x)=S+$$

$$+\int A(x',x'')\bar{\phi}(x')\phi(x''); \qquad (86)$$

$$A(x',x'')=\int dx\,J(x)\,K(x,x',x''). \qquad (87)$$

Тоді

$$Z[J]=N\det(\mathrm{i}G^{-1}+\mathrm{i}A)=\det(1+GA). \qquad (88)$$

Породжуючий функціонал для зв'язних діаграм

$$W[J]=\log Z[J]\ =\ \mathrm{tr}\log(1+GA)=$$

$$=\mathrm{tr}(GA)-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(GA)^2+\dots. \qquad (89)$$

Нормальне впорядкування $:\bar{\phi}\star\phi:$ зводиться до видалення першого доданка в правій частині. Зрозуміло, що в цьому підході відтворюються попередні результати: варіація $\frac{\delta A(x',x'')}{\delta J(x)}$ породжує ядро $K(x,x',x'')$, і після інтегрування по x', x'' відтворюється $\star$-добуток.

6. Заключні коментарі

Попередні результати можна узагальнити на випадок 2+1-вимірної теорії поля в сталому магнітному полі. Тоді функції Гріна мають вигляд

$$G(x_{(1)},x_{(2)})=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_n\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_n}|x^0_{(1)}-x^0_{(2)}|}}{\sqrt{\lambda_n}}\times$$

$$\times f_n(\mathbf{x}_{(1)})\bar{f}_n(\mathbf{x}_{(2)}), \qquad (90)$$

причому власні функції f_n не змінюються. Отже, найбільш цікаві властивості теорії зберігаються. Двоточкова калібровно інваріантна функція може бути обчислена в термінах функцій Вігнера (некомутативних проекторних солітонів). Цей результат має місце для широкого класу потенціалів.

Заміна звичайного добутку функцій Гріна на $\star$-добуток відновлює калібровну інваріантність. В результаті залежне від калібровки довільне масштабування координат зникає з кореляційних функцій, і удаваний парадокс зникає. Метою даної роботи є явна перевірка зазначених тверджень щодо калібровної інваріантності в некомутативній теорії поля.

Роботу було виконано за підтримки гранту INTAS-99-590 та гранту NSF No. PHY-0756966. Автор висловлює подяку Ю.О. Ситенку за внесені корисні зауваження. Автор висловлює подяку теоретичній групі ІТЕФ, під час візиту до якої було зроблено частину цієї роботи.

1. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, Ann. Phys. (NY) **111**, 61 (1978); **111**, 111 (1978).
2. N. Seiberg and E. Witten, J. High Energy Phys. **9909**, 032 (1999) [arXiv: hep-th/9908142].
3. R. Gopakumar, S. Minwalla, and A. Strominger, J. High Energy Phys. **0005**, 020 (2000) [arXiv: hep-th/0003160].
4. L. Alvarez-Gaume and J.L. Barbon, arXiv: hep-th/0006209.
5. C. Zachos, arXiv: hep-th/0008010.
6. J.A. Harvey, P. Kraus, and F. Larsen, J. High Energy Phys. **0012**, 024 (2000) [arXiv: hep-th/0010060].
7. M. Kontsevich, Lett. Math. Phys. **66**, 157 (2003) [arXiv: q-alg/9709040].
8. A.S. Cattaneo and G. Felder, Commun. Math. Phys. **212**, 591 (2000) [arXiv: math/9902090].
9. A. Connes, M.R. Douglas, and A.S. Schwarz, J. High Energy Phys. **9802**, 003 (1998) [arXiv: hep-th/9711162].
10. B.D. Bigatti and L. Susskind, Phys. Rev. D **62**, 066004 (2000) [arXiv: hep-th/9908056].

Одержано 15.12.10

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗАРЯЖЕННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ВО ВНЕШНЕМ НЕКОММУТАТИВНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ГРУППОЙ $U(1)$

А. Соловъёв

Р е з ю м е

Рассмотрено заряженное скалярное поле в некоммутативном пространстве на фоне внешнего калибровочного поля постоянной напряженности с группой $U(1)$. Вычислены корреляционные функции двух калибровочно инвариантных композитных операторов. Проиллюстрирована связь между калибровочными преобразованиями в некоммутативной теории и геометрией пространства. Показано восстановление калибровочной инвариантности высших корреляционных функций, несмотря на то, что функция Грина не инвариантна. Корреляционные функции демонстрируют сингулярное поведение тогда, когда расходится отображение Зайберга–Виттена. В этом случае не существует эквивалентной коммутативной картины.

CORRELATION FUNCTIONS OF A CHARGED SCALAR FIELD IN THE BACKGROUND OF NONCOMMUTATIVE $U(1)$ GAUGE FIELD

A. Solovyov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics,
Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(*14b, Metrolohichna Str., Kyiv 03680, Ukraine;*
e-mail: avs2132@columbia.edu)

S u m m a r y

We consider a complex charged scalar field coupled to a constant background non-commutative $U(1)$ gauge field and calculate the correlation function of two gauge-invariant composite operators. This calculation illustrates an interplay between the gauge transformations in gauge theories on noncommutative spaces and a space-time geometry. We show that the noncommutative gauge invariance is restored for higher-order correlators, though the Green's function itself is not invariant. The correlation functions reveal a singular behavior in the case where the Seiberg–Witten map becomes singular; i.e., there is no equivalent commutative description.