ЕФЕКТИВНА ТРИФОТОННА ВЕРШИНА У ГУСТОМУ ФЕРМІОННОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Є.В. РЕЗНІКОВ, В.В. СКАЛОЗУБ

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
(Просп. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ 49010; e-mail: reznikovevgenii@mail.ru, skalozubv@daad-alumni.de)

УДК 530.145.22

Обчислено тензор ефективної трифотонної вершини для випадку середовища з ненульовим хімічним потенціалом μ в однопетльовому наближенні. Проаналізовано властивості тензора залежно від довжини хвилі та частоти зовнішніх фотонів. Проведено детальне дослідження окремого випадку розсіяння вільних фотонів на магнітному полі. Обговорено можливі застосування отриманих результатів.

1. Вступ

Фізичний вакуум є об'єктом квантової природи. Багато ефектів, зумовлених саме цією природою, було теоретично розраховано та експериментально виміряно вже більше п'ятдесяти років тому.

Перш за все, це ефект Казиміра [1], який є макроскопічним проявом квантових процесів у вакуумі, та вже має не тільки практичні застосування, а є важливою поправкою у теоріях будови як всесвіту, так і елементарних частинок. Квантові ефекти в вакуумі відповідальні за процеси, в яких порушується принцип суперпозиції, такі як розсіяння світла на світлі, Дельбрюківске розсіяння та ін. [2, 3].

Взаємодія електромагнітного поля через вакуум описується за допомогою фейнманівських діаграм з парною кількістю фотонних ліній, так званих парних фотонних вершин. Існування непарних вершин у вакуумі заборонено теоремою Фаррі [4]. Навіть введення у вакуум малої кількості частинок вносить у процес міжфотонної взаємодії лише кількісні, але не якісні поправки. Так є доки хімічний потенціал у введеній сукупності менший за енергію спокою частинок, тобто утворене ними середовище можна вважати розрідженим. Однак опис поведінки фотонів та електромагнітних полів у густому ферміонному середовищі потребує обчислення фейнманівських діаграм також і з непарною кількістю зовнішніх фотонних ліній, оскільки, за наявності густого середовища, відбувається порушення c-парності, у зв'язку з чим не виконується теорема Фаррі. Саме невиконання цієї теореми приводить до можливості існування непарних фотонних вершин. За відсутності густого середовища явище поляризації вакууму забезпечує існування лише парних фотонних вершин, тому фізичні феномени, зумовлені вершинами зазначеного типу, вивчено набагато повніше за ті, що виникають у середовищах. Однак для правильного опису полів у густому середовищі використання, зокрема, тензора трифотонної вершини є принципово необхідним, оскільки він є домінуючим при $\mu \to \infty$ та робить можливим протікання нових, цілком особливих фізичних процесів. Явищами подібного типу, наприклад, є розпад статичних полів на вільні фотони, спонтанне утворення магнітного поля з електричного, а також взаємодія вільних фотонів безпосередньо з електричним та магнітним полями.

У роботах [5–7] досліджували тензор трифотонної вершинної функції у наближенні статичних полів. Головними результатами цих досліджень є, перш за все, обґрунтування принципового незбереження поперечності вершини при використанні параметризації Фейнмана. Також важливим є отримання вигляду особливостей поведінки електромагнітних полів за наявності густого середовища. Однак у такому наближенні всі ефекти, зумовлені існуванням ненульової трифотонної вершини, можна спостерігати тільки безпосередньо з середини самого середовища. Подібні процеси мають помітний вплив у ролі фактора еволюції великих утворень з густого ферміонного середовища (білі карлики та, особливо, нейтронні зірки). Однак спостереження проявів нелінійної поведінки електромагнітного поля за рахунок квантових ефектів у середовищі для статичного випадку в доступних експериментах є вельми складним завданням лише через слабкі опосередковані прояви. У даній роботі досліджується трифотонна вершина у густому середовищі. Під густим середовищем розуміємо сукупність ферміонів, для якої хімічний потенціал μ вище енергії спокою m. Це можуть бути як електрони для помірних густин, так і баріони та навіть кварки у фазі деконфайнменту. Дослідження ведеться не тільки для випадку статичних полів, але і полів, що повільно змінюються, тобто виконується нерівність $\frac{k_4}{\sqrt{\mu^2-m^2}} < 1$, де k_4 є частота фотона.

Це наближення є достатнім для багатьох застосувань, оскільки високочастотні поля не "відчувають" середовища, і тому відповідні вершини для випадку великих k_4 пригнічені. Привабливість подібного наближення як інструменту дослідження полягає в тому, що воно описує процеси, які заборонені за відсутності середовища. Результати даної роботи можуть знайти застосування у проектах NICA та FAIR (де досліджуються зіткнення важких ядер) як засіб для надійного безпосереднього детектування самого факту утворення густої ферміонної матерії, так і для дослідження її властивостей.

У роботі обчислюємо та вивчаємо властивості тензора, відповідного трифотонній вершині, та виконуємо зведення його до випадків нульових та малих значень частоти фотона k_4. Для окремих випадків статичного поля наведено точний вираз відповідних ненульових компонент тензора, а також спрощене лінійне наближення для випадків малих k_4. Крім цього, буде проаналізовано спеціальний випадок – взаємодію класичного магнітного поля та вільних фотонів. Таким чином, розроблено базу для широкого спектра можливих досліджень.

Робота складається зі вступу та чотирьох розділів. У розділі 2 наведено явний вигляд тензора трифотонної вершини у густому середовищі для випадку статичних полів. У розділі 3 розраховано тензор у довгохвильовому наближенні. Розділ 4 присвячено дослідженню окремого випадку взаємодії фотонів з магнітним полем. Розділ 5 містить обговорення отриманих результатів та висновки.

2. Трифотонна вершина для випадку статичних полів

Метою цього розділу є обчислити ненульові компоненти тензора трифотонної вершини в середовищі, які існують для випадку однопетльового наближення у стані спокою при нульовій температурі. Даний випадок для (3+1)-вимірного простору більш детально розглянуто у роботі [6] . Аналітичний вираз для трифотонної вершини визначається таким інтегралом:

$$\Pi_{\mu\nu\gamma}(k^{(1)},k^{(2)},k^{(3)}) = \delta(k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)})\frac{e^3}{(2\pi)^3}\times$$

$$\times\mathrm{Tr}\int d^4p(\gamma_\mu G(p+k^{(1)})\gamma_\nu G(p-k^2)\gamma_\gamma G(p)+$$

$$+\gamma_\mu G(p)\gamma_\nu G(p+k^2)\gamma_\gamma G(p-k^{(1)})), \qquad (1)$$

де μ,ν,γ – індекси, що пробігають значення від одного до чотирьох; γ_μ – матриці Дірака; $G(p)$ – функція Гріна ферміона, який утворює саму петлю вершини, і, зазвичай, виступає електроном:

$$G(p) = \frac{-i\hat{p}+m}{p^2+m^2}. \qquad (2)$$

Компоненти імпульсу p для функції Гріна подано у евклідовому просторі так, що

$$p = \begin{cases} p_\rho, \rho = 1,2,3, \\ p_0 + i\mu, \rho = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Єдиним внутрішнім параметром є μ – хімічний потенціал середовища, який, у випадку холодної ферміонної плазми, залежить лише від її густини.

При обчисленні інтеграла (1) одержано точні вирази для статичних полів, коли $k_4 = 0$. У цьому випадку вигляд вершинної функції значно спрощується, а ненульовими залишаються лише такі компоненти тензора [6]:

$$\Pi_{444} = \frac{ie^3}{2\pi^3}\left(4\sum_{i=1}^{3}J_2(k^{(i)}\right)+$$

$$+\sum_{n=1,n\neq l}^{3}\sum_{l=1}^{3}J_1(k^{(l)},k^{(n)})((k^{(l)})^2+(k^{(n)})^2+$$

$$+(k^{(l)},k^{(n)})-4m^2)-4J_3(k^{(l)},k^{(n)})), \qquad (4)$$

$$\Pi_{ij4} = \frac{ie^3}{2\pi^3}(\sum_{n=1,n\neq l}^{3} \sum_{l=1}^{3} J_1(k^{(l)}, k^{(n)})\times$$

$$\times(k_j^{(1)}k_i^{(3)} - (k^{(1)}k^{(3)})\delta_i j) - 4J_3(k^{(2)})\times$$

$$\times(\delta_{ij} + (k_j^{(1)}k_i^{(3)})\frac{(k^{(1)}k^{(3)}) - (k^{(1)})^2 - (k^{(3)})^2}{(k^{(1)}k^{(3)})^2})), \qquad (5)$$

де J_1, J_2, J_3 – функції зовнішніх імпульсів $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}$, хімічного потенціалу μ, та маси m, наведені в додатку. Аналітичне інтегрування до кінця вдається виконати для функцій J_1, J_2, J_3 лише тоді, коли усі імпульси колінеарні. У іншому випадку вдається отримати асимптотичне наближення для J_1, J_3. Симетричні компоненти Π_{i4j} та Π_{4ij} знаходимо відповідними замінами $k^{(1)} \to k^{(2)}, k^{(2)} \to k^{(3)}, k^{(3)} \to k^{(1)}$ для першого, та $k^{(1)} \to k^{(3)}, k^{(3)} \to k^{(2)}, k^{(2)} \to k^{(1)}$ для другого компонентів.

Переходячи у формулах (4), (5) до малих імпульсів $\frac{k^{(1)}}{a} \ll 1, \frac{k^{(2)}}{a} \ll 1$, де маємо $a = \sqrt{\mu^2 - m^2}$, у симетричному випадку $\frac{k^{(1)}}{k^{(2)}} \to 1$ одержуємо таку асимптотичну поведінку компонентів тензора:

$$\Pi_{444} = \frac{e^3}{\pi^3}\theta(\mu^2 - m^2)\sqrt{\mu^2 - m^2}(6+$$

$$+\sum_{n>1}^{3}\sum_{l=1}^{2}\frac{\beta_{in} - \pi q_{in}}{\sin\beta_{in}}((2(1 + \cos\beta_{12}))^{\frac{2-n}{2}} +$$

$$+(3 - n)(1 + \cos\beta_{12}) - \cos\beta_{in})) + O\left(\frac{k^{(1)}}{a}\right), \qquad (6)$$

$$\Pi_{ij4} = \frac{e^3}{\pi^3}\theta(\mu^2 - m^2)\sqrt{\mu^2 - m^2}(\delta_{ij}+$$

$$+\cos\alpha_{3j}\cos\alpha_{1i}\cos\beta_{13} - \cos\alpha_{1i}\cos\alpha_{1j}-$$

$$-\cos\alpha_{3i}\cos\alpha_{3j}) + O\left(\frac{k^{(1)}}{a}\right), \qquad (7)$$

де β_{in} – кут між векторами k^l та k^n; $\cos\alpha_{1i}$ – напрямний косинус вектора k^1; q_{in} – довільні цілі числа, що задовольняють рівності $q_{12} + q_{13} + q_{23} = 2$; $\theta(\mu^2 - m^2)$ – функція Хевісайда.

Для випадку великих імпульсів $\frac{k^{(1)}}{a}, \frac{k^{(2)}}{a} \gg 1$ у симетричній границі формул (4), (5) вони дають такий результат для компонентів тензора:

$$\Pi_{444} = O\left(\frac{k^{(1)}}{a}\right), \qquad (8)$$

$$\Pi_{ij4} = O\left(\frac{k^{(1)}}{a}\right). \qquad (9)$$

Даний результат показує, що у наближенні великих імпульсів, і, відповідно, малих відстаней, середовище стає асимптотично прозорим, а його вплив на властивості полів – несуттєвим. Це відбувається тому, що величина вершинної функції лінійно пропорційна хімічному потенціалу, який у випадку великих імпульсів є малим параметром.

Однак для лінійних масштабів $r \geq (\mu^2 - m^2)^{-\frac{1}{2}}$ заміна $\Pi_{\mu\nu\gamma}$ його асимптотичним значенням не порушує адекватності передачі властивостей електромагнітного поля з довільним розподілом напруженості. За цих умов $\sqrt{\mu^2 - m^2}/k$ є великим параметром, тому не має необхідності використовувати "адіабатичний розклад".

3. Трифотонна вершина у випадку фотонів малих частот

Вирази компонентів тензора трифотонної вершини у статичному випадку дозволяють розглянути якісно вплив, який здійснює середовище на електромагнітне поле, отримати кілька асимптотичних наближень. Зокрема одним з них є явище асимптотичної прозорості середовища для короткохвильових фотонів і навпаки – існування "згладжування" впливу великих градієнтів на опис дії середовища на статичне поле. Однак для більш детального опису явищ впливу середовища на взаємодію вільних фотонів потрібно враховувати також і динамічні компоненти тензора.

Вершинна функція після виконання операції взяття сліду набуває вигляду

$$\Pi_{\mu\nu\gamma} = \frac{ie^3}{(2\pi)^3\beta}\int d^3p dp_4\times$$

$$\times\left(\frac{f_{\mu\nu\gamma}}{[(p + k^{(1)})^2 + m^2][(p - k^{(2)})^2 + m^2][p^2 + m^2]}+\right.$$

$$\left.+\frac{\widetilde{f}_{\mu\nu\gamma}}{[(p - k^{(1)})^2 + m^2][(p + k^{(2)})^2 + m^2][p^2 + m^2]}\right), \qquad (10)$$

де функція $f_{\mu\nu\gamma}$ залежить від змінних $(k^{(1)}, k^{(2)}, p, m)$. Запишемо її у такому вигляді:

$$f_{\mu\nu\gamma}(k^{(1)}, k^{(2)}, p, m) =$$

$$= \Big\{[p_\nu + k_\nu^{(1)}][(p_\gamma - k_\gamma^{(2)})p_\mu - (p_\mu - k_\mu^{(2)})p_\gamma] +$$

$$+[p_\gamma + k_\gamma^{(1)}][(p_\nu - k_\nu^{(2)})p_\mu - (p_\mu - k_\mu^{(2)})p_\nu]+$$

$$+[p_\mu + k_\mu^{(1)}][(p_\gamma - k_\gamma^{(2)})p_\nu - (p_\nu - k_\nu^{(2)})p_\gamma]+$$

$$+[(\mathbf{p} + \mathbf{k}^{(1)})(\mathbf{p} - \mathbf{k}^{(2)}) + m^2]\times$$

$$\times[p_\gamma\delta_{\mu\nu} - p_\mu\delta_{\nu\gamma} + p_\nu\delta_{\mu\gamma}]-$$

$$-[(\mathbf{p} + \mathbf{k}^{(1)})\mathbf{p} + m^2][(p_\gamma - k_\gamma^{(2)})\delta_{\mu\nu}-$$

$$-(p_\mu - k_\mu^{(2)})\delta_{\nu\gamma} + (p_\nu - k_\nu^{(2)})\delta_{\mu\gamma}]-$$

$$-[\mathbf{p}(\mathbf{p} - \mathbf{k}^{(2)}) + m^2][(p_\gamma - k_\gamma^{(1)})\delta_{\mu\nu}-$$

$$-\,(p_\mu - k_\mu^{(1)})\delta_{\nu\gamma} + (p_\nu - k_\nu^{(1)})\delta_{\mu\gamma}]\Big\}, \qquad (11)$$

де $\mathbf{pk}^{(n)}$ – скалярний добуток тільки просторових частин даних векторів. Інша функція, $\widetilde{f}_{\mu\nu\gamma}$ – комплексно спряжена до $f_{\mu\nu\gamma}$. Для першого та другого доданків полюси розрізняються лише знаком при хімічному потенціалі μ, тобто для першого – це $z_1^{\pm} = \pm i\varepsilon_0 - i\mu$, $z_2^{\pm} = \pm i\varepsilon_1 - i\mu - k_4^{(1)}$, $z_3^{\pm} = \pm i\varepsilon_2 - i\mu + k_4^{(2)}$; для другого, відповідно, $z_1^{\pm} = \pm i\varepsilon_0 + i\mu$, $z_2^{\pm} = \pm i\varepsilon_1 + i\mu - k_4^{(1)}$, $z_3^{\pm} = \pm i\varepsilon_2 + i\mu + k_4^{(2)}$, ε – енергія ферміона відносно кожного з фотонів вершини, відповідно $\varepsilon_0 = (p^2 + m^2)^{1/2}$, $\varepsilon_1 = ((p + k^{(1)})^2 + m^2)^{1/2}$, $\varepsilon_2 = ((p - k^{(2)})^2 + m^2)^{1/2}$.

Проводимо інтегрування у формулі (10) за dp_4 методом лишків та отримуємо вираз, котрий складається з трьох доданків. Кожен доданок відповідає окремому полюсу у підінтегральної функції з виразу (10) та складається зі скалярного коефіцієнтного множника H_n, де n – номер полюса, і деякої векторної структури. Знаходження множників H_n для випадку фотонів малих частот, а, отже, і малих значень k_4 потребує використання лінійного наближення та розкладу отриманних виразів у ряд за степенями k_4. Після проведення відповідних розрахунків ці множники можуть бути подані такими виразами:

$$H_1 \approx \frac{n_e(\varepsilon_0) - n_p(\varepsilon_0)}{2i\varepsilon_0[2\mathbf{pk}^{(1)} + (\mathbf{k}^{(1)})^2][-2\mathbf{pk}^{(2)} + (\mathbf{k}^{(2)})^2]};$$

$$H_2 \approx (n_e(\varepsilon_1) - n_p(\varepsilon_1))(2i\varepsilon_1[2\mathbf{pk}^{(1)} - (\mathbf{k}^{(1)})^2]\times$$

$$\times[-2\mathbf{p}(\mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(1)}) + (\mathbf{k}^{(2)})^2 - (\mathbf{k}^{(1)})^2])^{-1};$$

$$H_3 \approx (n_e(\varepsilon_2) - n_p(\varepsilon_2))(2i\varepsilon_2[2\mathbf{pk}^{(2)} - (\mathbf{k}^{(2)})^2]\times$$

$$\times(-2\mathbf{p}(\mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(1)}) + (\mathbf{k}^{(1)})^2 - (\mathbf{k}^{(2)})^2))^{-1}, \qquad (12)$$

де $n_e(\varepsilon_n), n_p(\varepsilon_n)$ є функціями електронної й позитронної густин відповідно, та записуються у вигляді $n_e(\varepsilon_n) = [1 + \exp(\beta(\varepsilon_n - \mu)]^{-1}, n_p(\varepsilon_n) = [1 + \exp(\beta(\varepsilon_n + \mu)]^{-1}$.

Наведені множники утворюють по три групи доданків для кожного компонента вершинної функції, кожен з яких має в собі k_4 у деякому степені – від 0 до 4. Оскільки ми приймаємо "часову" складову імпульсу малим параметром, доданками з нею у степені 2 та вище нехтуємо. Доданки ж, що не містять у собі k_4, утворюють статичну частину компонентів, яку було розраховано у [6]. Таким чином, можемо врахувати внесок виразу для статичних полів, і тоді нам залишається обчислити лише ті доданки, що містять k_4 у першому степені:

$$F_{444} \approx F_{444}^{\rm stat} + Re\{H_1[\mathbf{pk}^{(2)}k_4^{(1)} + (\mathbf{pk}^{(1)} - \varepsilon_0^2)k_4^{(2)}]+$$

$$+H_2[(\varepsilon_0^2 + \mathbf{pk}^{(1)} + \varepsilon_1^2)k_4^{(2)}+$$

$$+(2\varepsilon_0^2 + \mathbf{pk}^{(2)} - \mathbf{k}^{(1)}\mathbf{k}^{(2)} + 2\varepsilon_1^2)k_4^{(1)}]-$$

$$-H_3[(\varepsilon_0^2 - \mathbf{pk}^{(2)} + \varepsilon_2^2)k_4^{(1)}+$$

$$+(2\varepsilon_0^2 - \mathbf{pk}^{(1)} - \mathbf{k}^{(1)}\mathbf{k}^{(2)} + 2\varepsilon_2^2)k_4^{(2)}]\}. \qquad (13)$$

Функція F пов'язана з Π співвідношенням $\Pi_{\mu\nu\gamma} = \frac{ie^3}{(2\pi)^3\beta}\int d^3pF_{\mu\nu\gamma}$.

У випадку F_{ij4} приймемо до уваги, що $i \neq 4$, $j \neq 4$, тобто $\delta_{i4} = \delta_{j4} = 0$, а також використане наближення, для якого $k_4^{(a)} k_4^{(b)} = 0$. Тому знаходимо

$$F_{ij4} \approx F_{ij4}^{\text{stat}} + \mathrm{Re}\{\varepsilon_0 \delta_{ij} (H_2 \varepsilon_1 k_4^{(1)} + H_3 \varepsilon_2 k_4^{(2)}) +$$

$$+H_1[(\mathbf{p}\mathbf{k}^{(2)} \delta_{ij} + 2p_i p_j - p_i k_j^{(2)} - p_j k_i^{(2)}) k_4^{(1)} +$$

$$+(\mathbf{p}\mathbf{k}^{(1)} \delta_{ij} + 2p_i p_j - p_i k_j^{(1)} - p_j k_i^{(1)}) k_4^{(2)}] +$$

$$+H_2[((\mathbf{p}(2\mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)}) + (k^{(1)}))^2 \delta_{ij} +$$

$$+2p_i p_j + p_i k_j^{(2)} + p_j k_i^{(2)}) k_4^{(1)} - ((\mathbf{p}\ \mathbf{k}^{(1)} +$$

$$+(\mathbf{k}^{(1)})^2 \delta_{ij} + 2p_i p_j + p_i k_j^{(1)} + p_j k_i^{(1)}) k_4^{(2)}] -$$

$$-H_3[((\mathbf{p}(2\mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(1)}) - (\mathbf{k}^{(2)}))^2 \delta_{ij} -$$

$$-2p_i p_j + p_i k_j^{(1)} + p_j k_i^{(1)}) k_4^{(2)} + ((-\mathbf{p}\ \mathbf{k}^{(2)} +$$

$$+(\mathbf{k}^{(2)})^2 \delta_{ij} + 2p_i p_j - p_i k_j^{(2)} - p_j k_i^{(2)}) k_4^{(1)}]\}. \tag{14}$$

Аналогічно виконуємо перетворення для інших елементів тензора. Беручи до уваги те, що у статичному випадку $F_{i44}^{\text{stat}} = F_{ijl}^{\text{stat}} = 0$, знаходимо

$$F_{ijl} \approx$$

$$\approx \mathrm{Im}\left[H_1 \varepsilon_0 \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} (k_l^{(2)} \delta_{ij} + k_j^{(2)} \delta_{il} - \\ -k_i^{(2)} \delta_{jl} - 2p_j \delta_{il}) \end{array} \right\} k_4^{(1)} + \\ + \left\{ \begin{array}{c} (k_l^{(1)} \delta_{ij} - k_j^{(1)} \delta_{il} + \\ +k_i^{(1)} \delta_{jl} + 2p_i \delta_{jl}) \end{array} \right\} k_4^{(2)} \end{array} \right\} + \right.$$

$$+H_2 \varepsilon_1 \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} (k_i^{(2)} \delta_{jl} - k_l^{(2)} \delta_{ij} - k_j^{(2)} \delta_{il} + (k_i^{(1)} + 2p_i) \times \\ \times \delta_{jl} + (k_l^{(1)} + 2p_l) \delta_{ij} - (k_j^{(1)} + 2p_j) \delta_{il}) \end{array} \right\} \times \\ \times k_4^{(1)} + \left\{ \begin{array}{c} (k_l^{(1)} \delta_{ij} - k_j^{(1)} \delta_{il} + \\ +k_i^{(1)} \delta_{jl} + 2p_i \delta_{jl}) \end{array} \right\} k_4^{(2)} \end{array} \right\} +$$

$$\left. +H_3 \varepsilon_2 \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} (k_j^{(1)} \delta_{il} - k_l^{(1)} \delta_{ij} - k_i^{(1)} \delta_{jl} + (k_j^{(1)} - 2p_j) \times \\ \times \delta_{il} + (k_l^{(1)} - 2p_l) \delta_{ij} - (k_i^{(1)} - 2p_i) \delta_{jl}) \end{array} \right\} \times \\ \times k_4^{(2)} + \left\{ \begin{array}{c} (k_l^{(2)} \delta_{ij} + k_j^{(2)} \delta_{il} - \\ k_i^{(2)} \delta_{jl} - 2p_i \delta_{jl}) \end{array} \right\} k_4^{(1)} \end{array} \right\} \right], \tag{15}$$

$$F_{i44} \approx$$

$$\approx \mathrm{Im}[H_2 \varepsilon_1 [((k_i^{(1)} + 2p_i) - k_i^{(2)}) k_4^{(1)} +$$

$$+(k_i^{(1)} + 2p_i) k_4^{(2)}] +$$

$$+H_3 \varepsilon_2 [((k_i^{(2)} - 2p_i) - k_i^{(1)}) k_4^{(2)} +$$

$$+(k_i^{(2)} - 2p_i) k_4^{(1)}] - \varepsilon_0 (H_2 + H_3)$$

$$[(k_i^{(2)} - 2p_i) k_4^{(1)} + (k_i^{(1)} + 2p_i) k_4^{(2)}]]. \tag{16}$$

Отримані вирази для всіх елементів тензора в довгохвильовому наближенні утворюють систему, яка описує такі фотон-фотонні процеси, як розпад фотона на два, розпад електричного поля на вільні фотони, утворення магнітного поля за наявності електричного та взаємодію вільного фотона з магнітним полем.

Знайдені вирази компонентів тензора вказують на те, що процеси народження реальних фотонів відбуваються лише у змінних полях, оскільки відповідні компоненти тензора мають тільки динамічні частини. На відміну від статичного випадку, динамічні процеси можна спостерігати «ззовні» середовища. Тому вони придатні для дослідження мікроскопічних об'ємів густого середовища.

4. Взаємодія фотонів з магнітним полем у середовищі

На основі отриманих результатів розглянемо випадок взаємодії фотонів з класичним магнітним полем у присутності ферміонної плазми. У цьому випадку маємо стан зовнішнього поля, без переносу енергії, з певним фіксованим просторовим імпульсом, який можна позначити як $(k_l^{(1)} + k_l^{(2)})$, де $l \in 1, 3$. Тоді елемент перерізу розсіювання буде мати вигляд

$$S = F_{ijl} k_i^{(1)} k_j^{(2)} (k_l^{(1)} + k_l^{(2)}) + F_{44l} k_4^{(1)} k_4^{(2)} (k_l^{(1)} + k_l^{(2)}) +$$

$$+F_{i4l} k_i^{(1)} k_4^{(2)} (k_l^{(1)} + k_l^{(2)}) F_{4jl} k_4^{(1)} k_j^{(2)} (k_l^{(1)} + k_l^{(2)}). \tag{17}$$

Згідно з припущенням малості k_4 доданок $F_{44l} k_4^{(1)} k_4^{(2)} (k_l^{(1)} + k_l^{(2)})$ наближено дорівнює нулю, а в доданках $F_{i4l} k_i^{(1)} k_4^{(2)} (k_l^{(1)} + k_l^{(2)})$ та $F_{4jl} k_4^{(1)} k_j^{(2)} (k_l^{(1)} + k_l^{(2)})$ складові з k_4 а це всі динамічні внески також скорочуються. До того ж, оскільки фотони поля не мають енергетичної складової, але записуються як $(k_l^{(1)} + k_l^{(2)})$, то повинна виконуватись рівність $(k_4^{(1)} = -k_4^{(2)})$. Тобто це є процес розсіювання вільного фотона на магнітному полі. Ненульові елементи тензора тоді матимуть вигляд

$$F_{i4l} = F_{i4l}^{\rm stat}, \quad F_{4jl} = F_{4jl}^{\rm stat}, \tag{18}$$

$$F_{ijl} \approx {\rm Im} k_4^{(1)} \times$$

$$\times \left\{ H_1 \varepsilon_0 \left\{ \begin{matrix} (k_l^{(2)} - k_l^{(1)})\delta_{ij} + (k_j^{(2)} + k_j^{(1)})\delta_{il} - \\ (k_i^{(2)} + k_i^{(1)})\delta_{jl} - 2p_i\delta_{jl} - 2p_j\delta_{il} \end{matrix} \right\} + \right.$$

$$+ H_2\varepsilon_1[k_i^{(2)}\delta_{jl} - k_l^{(2)}\delta_{ij} - k_j^{(2)}\delta_{il} + p_l\delta_{ij} - p_j\delta_{il}] +$$

$$\left. + H_3\varepsilon_2[k_j^{(1)}\delta_{il} - k_l^{(1)}\delta_{ij} - k_i^{(1)}\delta_{jl} - p_l\delta_{ij} + p_i\delta_{jl}] \right\}. \tag{19}$$

Як бачимо, вся динаміка процесу зосереджена в елементі F_{ijl}, а інші ненульові компоненти тензора описують лише статику. До того ж, оскільки ми розглядаємо процес розсіювання вільного фотона на магнітному полі, то мають виконуватись дисперсійні співвідношення, тому для нього $\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(2)} = k$, оскільки $|k_4^{(1)}| = |k_4^{(2)}|$.

Використати цю властивість можна, якщо домножити тензор на відповідні вектори k. Тоді отримаємо безпосередньо вираз для перерізу розсіювання, у якому будуть присутні лише скалярні добутки $(\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)})$, які можуть бути прирівняні один до одного. Остаточний вираз для ефективного перерізу розсіювання матиме вигляд

$$k_i^{(1)} k_j^{(2)} F_{ijl}(k_l^{(2)} + k_l^{(1)}) \approx -{\rm Im} k_4^{(1)} (\mathbf{k})^2 \times$$

$$\times \left\{ 2(1 + \cos\gamma)(\cos\alpha + \cos\beta) \times \right.$$

$$\times \frac{n_e(\varepsilon_0) - n_p(\varepsilon_0)}{2i[2\mathbf{p}\cos\alpha + \mathbf{k}][-2\mathbf{p}\cos\beta + \mathbf{k}]}\mathbf{p} +$$

$$+ \left(\mathbf{k}(1 + \cos\gamma) + \mathbf{p}(\cos\alpha + \cos\beta) \times \right.$$

$$\times \Big(\frac{n_e(\varepsilon_1) - n_p(\varepsilon_1)}{2i[2\mathbf{p}\cos\alpha - \mathbf{k}][-2\mathbf{p}(\cos\beta + \cos\alpha)]} +$$

$$\left. \left. + \frac{n_e(\varepsilon_2) - n_p(\varepsilon_2)}{2i[2\mathbf{p}\cos\beta - \mathbf{k}][-2\mathbf{p}(\cos\beta + \cos\alpha)]} \right) \right\}, \tag{20}$$

де $\cos\gamma$ – кут між векторами $k^{(1)}$ та $k^{(2)}$; $\cos\alpha, \cos\beta$ – між вектором p та відповідним k. Із загального вигляду виразу (20) випливає, що переріз розсіювання фотона на магнітному полі пропорційний модулю хвильового вектора фотона у другому ступені. Характер цієї залежності можна використати при досліджені даного процесу розсіювання в експерименті. Зазначимо, що, наприклад, у випадку зовнішнього магнітного поля без середовища переріз розсіяння $\sim k^4$ [9, 10]

5. Обговорення результатів

У роботі отримано в явному вигляді вирази для компонентів тензора трифотонної вершини у двох наближеннях, статичних полів та низьких частот, а також розглянуто окремий випадок взаємодії вільних фотонів з магнітним полем. Наближення статичного випадку демонструє принциповий вигляд прояву нелінійної поведінки полів у густому середовищі, а також є необхідною основою для опису різноманітних розглянутих процесів. Наближення низьких частот описує велику сукупність нелінійних міжфотонних взаємодій, дозволяючи проводити дослідження динамічних процесів. Найбільш цікавим ми вважаємо розсіювання фотона на магнітному полі. Тому цей випадок було розглянуто більш детально. У результаті дослідження обчислено точний вираз для перерізу розсіяння. Отримана залежність перерізу від модуля фотонного імпульсу є прямою квадратичною пропорційністю. Така залежність може бути застосована для експериментальної перевірки на наявність (утворення) густого середовища.

Явища, що виникають у середовищах з порушеною c-парністю, становлять великий інтерес, перш за все, як експериментальне підтвердження теоретичних засад квантової електродинаміки. Однак вже сьогодні фізичні феномени такої природи можуть знайти практичне застосування, головним чином як детектор наявності та інструмент дослідження густої ферміонної речовини. За допомогою асимптотичних співвідношень, що описують процеси в середовищі, можна вимірювати внутрішні характеристики таких середовищ, насамперед хімічний потенціал.

Описані в роботах [5, 6] процеси в статичних полях, можуть бути вагомим фактором еволюції утворень з надгустої матерії, таких як білі карлики та нейтронні зірки. Статичний випадок – це, перш за все, явище розпаду електростатичного поля на два квазістатичні фотони магнітного. Як наслідок, це приводить до спонтанного утворення у ферміонній плазмі, поміщеній у електричне поле, магнітних полів, а також до оберненого явища – утворення з магнітного поля соленоїдального електричного. Така подія у випадку пульсарів, з їх надпотужним магнітним полем, є доволі ймовірною.

Однак метою названих робіт не був опис процесів, які дозволяють проводити дослідження властивостей ферміонного середовища ззовні. Використане в даній роботі наближення полів малих частот відкриває більше можливих шляхів врахування впливу середовища на взаємодію полів. Цей випадок можна звести до декількох можливих процесів. Найбільш цікавим, на наш погляд, є процес розсіяння вільних фотонів на магнітному полі. Параметри розсіювання залежать лише від характеристик поля та хімічного потенціалу μ середовища. Теоретично цей процес дозволяє вимірювати μ, детектуючи розсіяні фотони. Явище такого типу може знайти застосування у проектах NICA та FAIR (де досліджуються зіткнення важких ядер) як інструмент для надійного детектування самого факту утворення густої ферміонної матерії, так і для дослідження її властивостей.

У даній роботі розглянуто процес розсіяння фотонів для випадку статичного зовнішнього магнітного поля, але з високою точністю отримані вирази можна застосовувати і для реальних детекторних систем. Справа в тому, що потужні поля утворюються механізмами, на зразок вибухово-магнітного генератора, або високострумових котушок. Такі пристрої при роботі створюють поля з частотами у діапазоні 10–200 кГц. Ці частоти, порівняно з частотами навіть інфрачервоних фотонів, є нехтовно малими. Тому у цьому випадку можна прийняти зовнішнє поле наближено статичним.

ДОДАТОК

У даному додатку наведено в явному вигляді функції зовнішніх фотонних імпульсів для випадку статичних полів [6]:

$$J_1(k^{(1)},k^{(2)}) = \frac{i\pi^2\theta(\mu^2-m^2)}{k^{(1)}k^{(2)}}\left[\int\limits_0^{\varepsilon} T dp \ln\left|\frac{M(p,k^{(1)},k^{(2)})}{M(-p,k^{(1)},k^{(2)})}\right| -\right.$$

$$-\theta\left(\sqrt{\mu^2-m^2}-\frac{k^{(3)}}{2\sin\beta}\right)\int\limits_{\frac{k^{(3)}}{2\sin\beta}}^{\sqrt{\mu^2-m^2}} -iTdp\Big(\arcsin N(p,k^{(1)},k^{(2)}) -$$

$$\left.-\arcsin N(-p,k^{(1)},k^{(2)})\Big)\right], \tag{21}$$

$$J_2(k^{(1)},k^{(2)}) = \frac{i\pi^2\theta(\mu^2-m^2)}{k^{(1)}k^{(2)}}\sqrt{\mu^2-m^2}\times$$

$$\times\left[\ln\left|\frac{k^{(1)}-2\sqrt{\mu^2-m^2}}{k^{(1)}+2\sqrt{\mu^2-m^2}}\right|\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\sqrt{\mu^2-m^2}}{k^{(1)}}-\frac{k^{(1)}}{4\sqrt{\mu^2-m^2}}\right)-1\right], \tag{22}$$

$$J_3(k^{(1)},k^{(2)}) = \frac{i\pi^2\theta(\mu^2-m^2)}{k^{(1)}k^{(2)}}\left[\int\limits_0^{\varepsilon} Tp^2 dp \ln\left|\frac{M(p,k^{(1)},k^{(2)})}{M(-p,k^{(1)},k^{(2)})}\right| -\right.$$

$$-\theta\left(\sqrt{\mu^2-m^2}-\frac{k^{(3)}}{2\sin\beta}\right)\int\limits_{\frac{k^{(3)}}{2\sin\beta}}^{\sqrt{\mu^2-m^2}} -iTp^2dp\Big(\arcsin N(p,k^{(1)},k^{(2)}) -$$

$$\left.-\arcsin N(-p,k^{(1)},k^{(2)})\Big)\right]. \tag{23}$$

Внутрішні функції M, N, T мають вигляд

$$M(p,k^{(1)},k^{(2)}) = (k^{(2)})^2 + k^{(1)}k^{(2)}\cos\beta -$$

$$-4p^2\sin^2\beta + 2pk^{(2)}\cos\beta + 2pk^{(1)} + |2p\cos\beta + k^{(2)}|T, \tag{24}$$

$$N(p,k^{(1)},k^{(2)}) = ((k^{(2)})^2 + k^{(1)}k^{(2)}\cos\beta -$$

$$-4p^2\sin^2\beta + 2k^{(2)}\cos\beta + 2pk^{(1)})\times$$

$$\times((k(1)-2p)\sin\beta\sqrt{4p^2-(k^{(2)})^2})^{-1}, \tag{25}$$

$$T = \frac{p}{\sqrt{(k^{(1)}+k^{(2)})^2 - 4p^2\sin^2\beta}}. \tag{26}$$

1. M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect* (Oxford: Oxford University Press, 2009).
2. R.L. Jaffe, Phys. Rev. D **72**, 021301 (2005).
3. А.А. Гриб, С.Г. Мамаев, В.М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях* (Энергоатомиздат, Москва, 1988).
4. W. Furry, Phys. Rew. **51**, 125 (1937).
5. V.V. Skalozub and A.Yu. Tishchenko, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **104**, 3921 (1993).
6. А.И. Пасько, В.В. Скалозуб, УФЖ **41**, 1013 (1996).
7. В. Де ля Инсера, Э. Феррер, А.Е. Шабад, *Тр. ФИАН СССР* (Наука, Москва, 1986).
8. В.О. Папанян, В.И. Ритус, ЖЭТФ **65**, 1756 (1973).
9. S.L. Adler, J.N. Bahcall, C.G. Callan, and M.N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. **25**, 1061 (1970).
10. А.В. Кузнецов, Н.В. Михеев, *Электрослабые процессы во внешней активной среде* (ЯрГУ, Ярославль, 2010).

Одержано 25.01.11

ЭФФЕКТИВНАЯ ТРЕХФОТОННАЯ ВЕРШИНА В ПЛОТНОЙ ФЕРМИОННОЙ СРЕДЕ

Е.В. Резников, В.В. Скалозуб

Р е з ю м е

Вычислен тензор эффективной трехфотонной вершины для случая среды с ненулевым химическим потенциалом μ в однопетлевом приближении. Проанализированы свойства тензора в зависимости от длины волны и частоты внешних фотонов. Проведено детальное исследование отдельного случая рассеяния свободных фотонов на магнитном поле. Обсуждено возможное применение полученных результатов.

EFFECTIVE THREE-PHOTON VERTEX IN A DENSE FERMIONIC MEDIUM

E.V. Reznikov, V.V. Skalozub

Oles' Gonchar Dnipropetrovsk National University
(*72, Gagarin Ave., Dnipropetrovsk 49010, Ukraine;*
e-mail: reznikovevgenii@mail.ru, skalozubv@daad-alumni.de)

S u m m a r y

The tensor of an effective three-photon vertex has been calculated in the one-loop approximation for a medium with non-zero chemical potential. The tensor properties at various photon wavelengths and frequencies have been analyzed. The case of photon scattering by a magnetic field has been studied in detail. Possible applications of the results obtained have been discussed.