

ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БОЗЕ-ГАЗУ З δ -ПОДІБНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ ВИЩЕ ТЕМПЕРАТУРИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДУ У ГРАНИЦІ СИЛЬНОГО ВІДШТОВХУВАННЯ МІЖ ЧАСТИНКАМИ

В.С. ПАСТУХОВ

УДК 538.94
©2011Львівський національний університет ім. Івана Франка
(Вул. Драгоманова, 12, Львів 79005; e-mail: volodyapastukhov@gmail.com)

За допомогою функціонального інтегрування побудовано точні рівняння для одночастинкової і незвідної частини двочастинкової функції Гріна тривимірного бозе-газу з точковою взаємодією. У найпростішому наближенні теорії, яке враховує всі прямі попарні процеси розсіяння частинок, детально проаналізовано двочастинковий спектр системи. Показано, що ведуча асимптотика одночастинкового спектра залишається квадратичною в довгохвильовій області. Знайдено величину критичної температури у границі сильного відштовхування між частинками.

узгодження отримано аж в шести- $c = 1,25 \pm 0,13$ та семипетлевого наближенні $c = 1,27 \pm 0,11$ відповідно [9]. Цікаво, що наступний член розкладу у формулі (1) неаналітичний за газовим параметром [10, 11].

Фактично, при скінченних температурах, теорія збурень будується не за газовим параметром, а за відношенням a/Λ , де $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mT}$ – довжина теплової хвилі де Бройля. Зрозуміло, що для слабо неідеального газу в околі критичної температури розклади за цими параметрами тотожні. У даній статті ми використовуємо інший знерозмірений параметр $g = 4\pi\hbar^2\rho a/mT$ – тобто відношення характерної потенціальної енергії частинки до температури системи, і, в основному, зосереджуємо увагу на аналізі границі великих значень цього параметра. Використання цього параметра є більш зручним, але результати переписані через газовий параметр. В околі критичної температури T_c великим значенням g відповідатимуть великі значення $\rho^{1/3}a$, а для слабонеідеального бозе-газу теорія збурень за параметром g повністю еквівалентна розкладу за параметром a/Λ .

1. Вступ

Хоча з часу першого вдалого опису слабо неідеального бозе-газу минуло майже 70 років, а деталі теорії взаємодіючих бозонів є розділом кожного підручника із квантової статистики і цій проблемі присвячено десятки оглядових статей (одна з останніх [1]), суперечки з приводу доволі простих, на перший погляд, властивостей цієї системи тривають ще досі. Так, відносно нещодавно було сформовано думку щодо поведінки критичної температури T_c при ввімкненні незначної взаємодії між частинками. Виявлено [2], що зсув відносно критичної температури ідеального бозе-газу лінійний за довжиною s -розсіяння a :

$$\frac{T_c - T_0}{T_0} = ca\rho^{1/3}, \quad (1)$$

де ρ – рівноважна густина, c – число. Довший час невідомим був навіть знак цієї константи, а залежність від довжини розсіяння вважалась кореневою (див. [3, 4] і обговорення там). Найпростіший розрахунок з використанням $1/N$ -розкладу [5] дає значення $c = 2,33$, що цілком непогано узгоджується з результатами симуляцій $c = 1,29 \pm 0,05$ [6] та $c = 1,32 \pm 0,02$ [7] для класичної φ^4 -моделі. Теоретичний розрахунок у вищих наближеннях [8] покращує результат $c = 1,71$. Тут вже різниця, порівняно з чисельними методами, не перевищує 30%. Зовсім добре

Структура статті така. У другому розділі сформульовано модель і вказано метод розрахунку, а також, для цілісності викладу, наведено загальні співвідношення, які пов'язують одночастинкову функцію Гріна з параметрами спектра квазічастинок. У третьому розділі вказано наближення, на основі якого побудовано статтю. Зокрема обговорюється вибір структури одночастинкової функції Гріна, а для її розрахунку в границі $\rho^{1/3}a \gg 1$ необхідно проаналізувати двочастинковий спектр системи взаємодіючих бозе-частинок. Четвертий розділ присвячено аналізу параметрів одночастинкового спектра системи і розрахунку критичної температури в границі $g \gg 1$. У третьому і четвертому розділах викладено основні результати цієї роботи.

2. Загальні співвідношення

Розглянемо сукупність N безспінових частинок в об'ємі V з точковим потенціалом попарної взаємодії. Тобто потенціальну енергію взаємодії двох частинок вибираємо пропорційною до дельта-функції:

$$\Phi(r) = \tilde{\lambda}\delta(\mathbf{r}),$$

де r – відстань між частинками. Константа $\tilde{\lambda}$ характеризує величину міжчастинкової взаємодії. Як відомо, така модель стійка тільки в одновимірному випадку, а для вищих розмірностей простору цю константу в кінцевих виразах потрібно “регуляризувати”. Зокрема в нашому випадку

$$\tilde{\lambda}^{-1} = \lambda^{-1} - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}, \quad (2)$$

де $\lambda = 4\pi\hbar^2 a/m$ (a – довжина s -розсіяння), $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \hbar^2 p^2/2m$ – спектр ідеального газу. Альтернативний шлях – використовувати метод псевдопотенціалу [12]:

$$\Phi(r) = \lambda\delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r,$$

де оператор у правій частині рівності скоротить особливості типу $1/r$ на малих відстанях.

Запишемо статистичну суму моделі функціональним інтегралом [13]:

$$Z = \int D\psi^* D\psi \exp\{S\}, \quad (3)$$

де евклідова дія

$$S = \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}} \{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}\} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) - \frac{1}{2V\beta} \sum_{\omega'_n, \omega''_n, \omega_n} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}} \tilde{\lambda} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{q}}^*(\omega'_n) \times \psi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}(\omega'_n + \omega''_n) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}(\omega_n - \omega''_n). \quad (4)$$

Тут $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$, μ – хімічний потенціал і $\omega_n = 2\pi n\beta$, ($n = 0, \pm 1, \dots$) – матсубарівська частота, а також введено позначення для оберненої температури $\beta = 1/T$.

З доданком формули (4), що описує взаємодію, виконаємо перетворення Стратоновича-Хаббарда, ввівши додатково сукупність комплексних змінних

$\eta_{\mathbf{q}}(\omega_n)$, і запишемо ефективну дію, яка є основою подальшого розгляду:

$$S_{\text{eff}} = \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}} \{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}\} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) - (2\tilde{\lambda})^{-1} \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{q}} |\eta_{\mathbf{q}}(\omega_n)|^2 + \frac{i}{2\sqrt{\beta V}} \sum_{\omega_n, \omega'_n} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \{ \eta_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \times (\omega'_n + \omega_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) \psi_{\mathbf{q}}(\omega'_n) + \text{с.с.} \}. \quad (5)$$

Зрозуміло, що функціональний інтеграл беремо за сукупністю дійсних і уявних частин полів ψ та η :

$$Z = \int D\psi^* D\psi D\eta^* D\eta \exp\{S_{\text{eff}}\}. \quad (6)$$

Здійснивши перехід $S \rightarrow S_{\text{eff}}$, ми частково перебудуємо ряди теорії збурень, взявши за основу прямі процеси розсіяння частинки на частинці.

Означимо одночастинкову температурну функцію Гріна

$$G(\omega_n, p) = -\langle \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \rangle, \quad (7)$$

де ламані дужки позначають усереднення з дією (4) або (5). Введемо в розгляд парний корелятор $\langle \eta_{\mathbf{q}}(\omega_n) \eta_{\mathbf{q}}^*(\omega_n) \rangle$. Для наших розрахунків, оскільки в системі присутній фазовий перехід, буде зручно побудувати точні рівняння, які пов'яжуть між собою одночастинкову функцію Гріна і η -корелятор. Відповідні рівняння можна отримати, якщо врахувати, що основний внесок в статистичну суму повинні давати “класичні” траєкторії, які можна отримати розв'язуванням відповідних рівнянь $\delta(-S_{\text{eff}})/\delta\psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) = 0$, $\delta(-S_{\text{eff}})/\delta\eta_{\mathbf{q}}^*(\omega_n) = 0$. Статистично усереднюючи ці рівності і враховуючи стрибок відповідних функцій, отримуємо співвідношення

$$G^{-1}(\omega_n, p) = i\omega_p - \xi_p + \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{q}} \Gamma(\omega_n, \mathbf{p} | \omega'_n, \mathbf{q}) \times \langle \eta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\omega_n + \omega'_n) \eta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^*(\omega_n + \omega'_n) \rangle G(\omega'_n, q), \quad (8)$$

$$\langle \eta_{\mathbf{q}}(\omega_n) \eta_{\mathbf{q}}^*(\omega_n) \rangle^{-1} = (2\tilde{\lambda})^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{2\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{p}} \Gamma(\omega'_n, \mathbf{p} | \omega_n - \omega'_n, \mathbf{q} - \mathbf{p}) \times$$

$$\times G(\omega'_n, p)G(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{q} - \mathbf{p}|), \quad (9)$$

де звичним чином введена вершинна функція [14]:

$$\langle \eta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^*(\omega_n + \omega'_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) \psi_{\mathbf{q}}(\omega'_n) \rangle = \frac{i}{\sqrt{\beta V}} \Gamma(\omega_n, \mathbf{p} | \omega'_n, \mathbf{q}) \times$$

$$\times G(\omega_n, p)G(\omega'_n, q) \langle \eta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\omega_n + \omega'_n) \eta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^*(\omega_n + \omega'_n) \rangle.$$

Це складна система нелінійних інтегральних рівнянь з двома невідомими функціями, а наближення будується для вершини. Пошук розв'язку слід почати з одночастинкової функції Гріна, для якої записуємо

$$G^{-1}(\omega_n, p) = i\omega_n - \xi_p - \Sigma(\omega_n, p), \quad (10)$$

де $\Sigma(\omega_n, p)$ – власноенергетична частина (масовий оператор). Виконаємо аналітичне продовження по частоті у верхню півплощину і позначимо

$$\text{Re } \Sigma(\omega_n, p) |_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} = \Sigma_R(\omega, p), \quad (11)$$

$$\text{Im } \Sigma(\omega_n, p) |_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} = \Sigma_I(\omega, p). \quad (12)$$

Корені рівняння [15]

$$\tilde{\xi}_p = \xi_p + \Sigma_R(\tilde{\xi}_p, p), \quad (13)$$

визначають новий одночастинковий спектр $\tilde{\xi}_p$, звісно за умови, що загасання

$$\gamma_p = Z(p) \Sigma_I(\tilde{\xi}_p, p), \quad (14)$$

$$Z^{-1}(p) = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma_R(\omega, p)}{\partial \omega} \right|_{\omega = \tilde{\xi}_p} \quad (15)$$

достатньо мале. Далі вибираємо, в певному наближенні, вершину $\Gamma(\omega_n, \mathbf{p} | \omega'_n, \mathbf{q})$ та записуємо рівняння (9). Зрозуміло, що описану програму розрахунку в загальному випадку важко виконати, тому використаємо певні спрощення. Замінюємо (10) її значенням в околі полюса при малих хвильових векторах:

$$G^{-1}(\omega_n, p) = Z^{-1} \{ i\omega_n - \tilde{\xi}_p \}, \quad (16)$$

де $\tilde{\xi}_p = \tilde{\varepsilon}_p - \tilde{\mu}$, $Z = Z(0)$. Одночастинковий спектр $\tilde{\varepsilon}_p = \hbar^2 p^2 / 2\tilde{m}$ вибираємо квадратичним за хвильовим вектором, що нагадує спектр ідеального бозе-газу, але з перенормованою масою, $\tilde{\mu}$ – перенормований хімічний потенціал. У критичній точці $G^{-1}(0, 0) = 0$ або $\tilde{\mu} = 0$. Після таких спрощень ми звели задачу до самоузгодженого знаходження ведучих асимптотик відповідних функцій при малих значеннях p . Зауважимо також, що структура одночастинкової функції Гріна повністю змінюється в точці бозе-конденсації, де форма (16) стає незастосовною. Тобто далі мова буде йти про температури як завгодно близькі, але все ж таки більші за критичну.

3. Врахування прямих попарних процесів розсіяння частинок. Двочастинковий спектр

Найпростіше наближення нашої теорії $\Gamma(\omega_n, \mathbf{p} | \omega'_n, \mathbf{q}) = 1$, яке враховує всі прямі попарні процеси розсіяння частинки на частинці. Відразу вкажемо, що область застосовності цього спрощення обмежена малими густинами, оскільки ми нехтуємо потрійними і вищими процесами розсіяння. В такому наближенні система нелінійних інтегральних рівнянь (8, 9) стає замкненою тільки на одночастинкову функцію Гріна.

Спочатку проаналізуємо результат теорії збурень, а потім узагальнимо на наш випадок (16) тривіальним перепозначенням констант. Для цього у праву частину рівняння (9) потрібно підставити функції Гріна ідеального газу $G_0(\omega_n, p) = \{i\omega_n - \xi_p\}^{-1}$. Нескладно розрахувати відповідну суму за частотами ($n(x) = \{e^x - 1\}^{-1}$):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta} \sum_{\omega'_n} G_0(\omega'_n, p) G_0(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{p} - \mathbf{q}|) = \\ & = \frac{1 + n(\beta\xi_{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}) + n(\beta\xi_p)}{\xi_{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} + \xi_p - i\omega_n}. \end{aligned} \quad (17)$$

Після підстановки у суму за хвильовим вектором і перенормуванням константи взаємодії при нульових значеннях зовнішніх частоти та хвильового вектора, приходимо до такої рівності:

$$\langle \eta_{\mathbf{q}}(\omega_n) \eta_{\mathbf{q}}^*(\omega_n) \rangle = 2\lambda / \{1 + \lambda t(\omega_n, q)\}, \quad (18)$$

де

$$t(\omega_n, q) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{n(\beta\xi_{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}) + n(\beta\xi_p)}{\xi_{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} + \xi_p - i\omega_n}. \quad (19)$$

Важливо, що перенормування (2) повністю скорочує незалежні від густини доданки функції $t(\omega_n, q)$. Дослідимо її властивості, але перед тим вкажемо, що такий же результат (з певними технічними особливостями) можна отримати за допомогою методу псевдопотенціалу [12]. З цією метою виконаємо аналітичне продовження у верхню півплощину і позначимо

$$\text{Re } t(\omega_n, q) |_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} = t_R(\omega, q), \quad (20)$$

$$\text{Im } t(\omega_n, q) |_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} = t_I(\omega, q). \quad (21)$$

За рахунок наявності δ -функції під інтегралом за хвильовим вектором одразу ж можна порахувати уявну частину:

$$t_I(\omega, q) = \frac{1}{8\pi} \beta q_0^3 \frac{q_0}{q} \ln \left| \frac{1 - \exp\{\beta\mu - \varepsilon_+^2\}}{1 - \exp\{\beta\mu - \varepsilon_-^2\}} \right| \times \\ \times \theta(\omega - \varepsilon_q/2 + 2\mu), \quad (22)$$

де для спрощення записів введено позначення $\varepsilon_{\pm} = q/2q_0 \pm \sqrt{\beta\omega/2 - q^2/4q_0^2 + \beta\mu}$, $q_0 = \sqrt{2mT/\hbar}$. Інтегрування дійсної (20) частини не вдається здійснити до кінця

$$t_R(\omega, q) = \beta\rho \frac{q_0}{q} \{f(\varepsilon_+, \beta\mu) + f(\varepsilon_-, \beta\mu)\}, \quad (23)$$

де під функцією $f(\varepsilon, y)$ розуміємо такий інтеграл:

$$f(\varepsilon, y) = \varepsilon \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} g_{1/2}(e^{y-x\varepsilon^2}) / g_{3/2}(e^y), \quad (24)$$

$$g_l(e^y) = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{yn}}{n^l},$$

і для рівноважної густини вводимо позначення $\rho = N/V$, яку надалі вважаємо функцією хімічного потенціалу.

Для наступного кроку нагадаємо, що η -корелятор (9), згідно з нашим розщепленням (5), з точністю до знака є незвідною частиною двочастинкової функції Гріна, тому можливі корені рівняння

$$1 + \lambda t_R(\omega(q), q) = 0 \quad (25)$$

будуть визначати спектр пар частинок. Зрозуміло, що такі збудження будуть стійкими тільки за умови, що загасання мале:

$$\Gamma(q) = t_I(\omega(q), q) / \frac{\partial t_R(\omega(q), q)}{\partial \omega(q)} \ll \omega(q). \quad (26)$$

Зауважимо, що для притягувальної взаємодії $\lambda < 0$, рівняння (25) визначатиме спектр зв'язаних станів пар частинок. Далі обмежимося тільки випадком відштовхувального знака константи взаємодії. Позначимо

$$\omega(q) = \frac{1}{2} \varepsilon_q - 2\mu + 2\Delta(q), \quad (27)$$

та явно запишемо рівняння (25)

$$1 + g \frac{q_0}{q} \{f(\sqrt{\beta\Delta(q)} + q/2q_0, \beta\mu) -$$

$$- f(\sqrt{\beta\Delta(q)} - q/2q_0, \beta\mu)\} = 0, \quad (28)$$

де $g = \beta\rho\lambda$. Враховуючи, що функція $f(\varepsilon, y)$ додатна, робимо висновок, що дійсні корені цього рівняння існують тільки коли $\beta\Delta(q) > q^2/4q_0^2$. Крім того, потрібно, щоб похідна функції $f(\varepsilon, y)$ по першій змінній мала від'ємний знак, принаймні на певному проміжку значень аргументу. Оскільки функція $f(\varepsilon, y)$ обмежена, а відношення gq_0/q може необмежено спадати до нуля, то спектр $\omega(q)$ має точку закінчення. Виявляється, що це граничне значення хвильового вектора q_c можна оцінити в загальному випадку. Для цього потрібно вказати, що функція $f(\varepsilon, y)$ обмежена згори, а отже, завжди виконується нерівність $q_c/q_0 \leq g \max(f(\varepsilon, y))$.

У формулі (26) вперше з'явилась важлива похідна $\frac{\partial t_R(\omega, q)}{\partial \omega} |_{\omega=\omega(q)}$, яка надалі буде зустрічатись. Її прямий розрахунок не є простим, але цю проблему можна обійти. Явно рахуємо похідну за ω і одразу ж підставляємо $\omega(q)$:

$$[\partial t_R(\omega, q) / \partial \omega] |_{\omega=\omega(q)} = \\ = \frac{\beta\rho}{2\sqrt{\beta\Delta(q)}} \frac{q_0}{q} \{f'(\sqrt{\beta\Delta(q)} + q/2q_0, \beta\mu) - \\ - f'(\sqrt{\beta\Delta(q)} - q/2q_0, \beta\mu)\}, \quad (29)$$

після цього диференціюємо рівняння (28) за знерозміреним параметром взаємодії, не забуваючи при цьому (хоча ми явно цього не пишемо), що величина $\Delta(q)$ також залежить від g :

$$\frac{\beta g}{2\sqrt{\beta\Delta(q)}} \frac{\partial \Delta(q)}{\partial g} \frac{q_0}{q} \{f'(\sqrt{\beta\Delta(q)} + q/2q_0, \beta\mu) -$$

$$- f'(\sqrt{\beta\Delta(q)} - q/2q_0, \beta\mu)\} +$$

$$+ \frac{q_0}{q} \{f(\sqrt{\beta\Delta(q)} + q/2q_0, \beta\mu) -$$

$$- f(\sqrt{\beta\Delta(q)} - q/2q_0, \beta\mu)\} = 0.$$

Порівнюючи два вирази і враховуючи рівняння (28), отримуємо корисне співвідношення

$$[\partial t_R(\omega, q) / \partial \omega]^{-1} |_{\omega=\omega(q)} = \frac{2}{\beta\rho} g^2 \frac{\partial}{\partial g} \Delta(q). \quad (30)$$

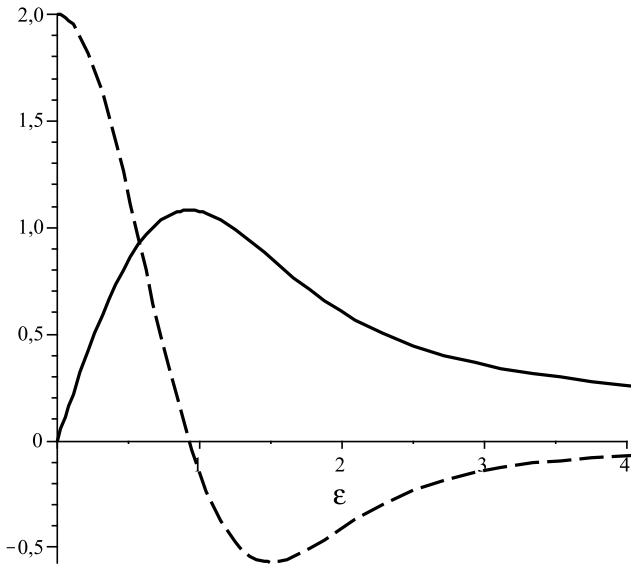


Рис. 1. Графік функції $f(\varepsilon)$ (суцільна лінія) та її похідної (штрихована лінія)

Розкладаючи в ряд за степенями q/q_0 рівняння (28), дослідимо довгохвильову асимптотику полюсів двочастинкової функції Гріна. При малих значеннях хвильового вектора для величини $\Delta(q)$ отримаємо розклад

$$\Delta(q) = \Delta + \frac{1}{2} \Delta'' \beta \varepsilon_q, \quad (31)$$

де Δ визначається рівнянням

$$1 + g f'(\sqrt{\beta \Delta}, \beta \mu) = 0, \quad (32)$$

та

$$\beta \Delta'' = -\frac{1}{3!} \sqrt{\beta \Delta} f^{(3)}(\sqrt{\beta \Delta}, \beta \mu) / f^{(2)}(\sqrt{\beta \Delta}, \beta \mu), \quad (33)$$

$f'(\varepsilon, y)$, $f^{(2)}(\varepsilon, y)$, $f^{(3)}(\varepsilon, y)$ – відповідні похідні по першій змінній функції (24), властивості якої дослідимо нижче. У точці, де не існує друга похідна $f^{(2)}(\sqrt{\beta \Delta}, \beta \mu)$, спектр стає неаналітичним при малих q/q_0 – фактично стає неможливим розклад (31), хоча величина $\Delta(0)$ скінченна. Далі стане зрозумілим, що є певні обмеження і на величину $\beta \Delta'' \geq 1/2$.

Спочатку розглянемо класичну границю. Для цього формально спрямуємо величину модуля хімічного потенціалу до безмежності. Тоді функція

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon, y \rightarrow -\infty) = \varepsilon \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \exp\{-x\varepsilon^2\} \quad (34)$$

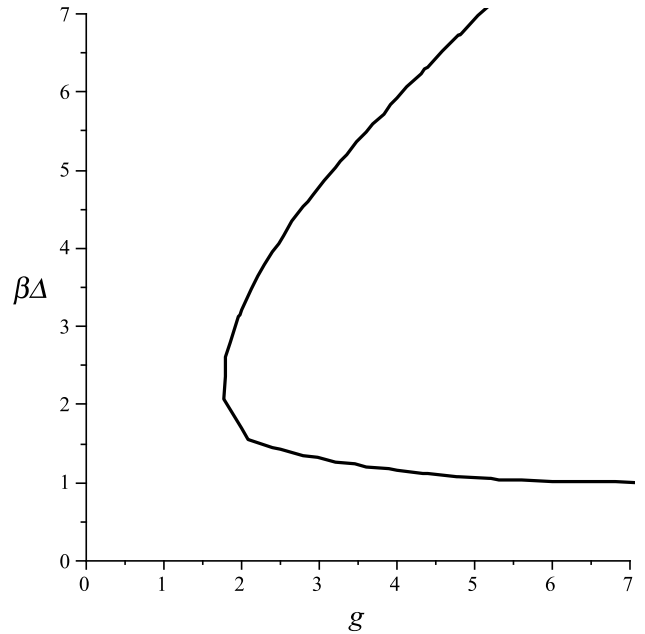


Рис. 2. Графік залежності величини щілин $\beta\Delta$ (верхня лінія) та $\beta\Delta_s$ (нижня лінія) двочастинкового спектра від знерозміреного параметра взаємодії

з ведучими асимптотиками при малих і великих значеннях аргументу набуває значень

$$f(\varepsilon \rightarrow 0) = 2\varepsilon, \quad f(\varepsilon \rightarrow \infty) = 1/\varepsilon.$$

Очевидне спрощення цієї границі – зникла залежність від хімічного потенціалу. Графік функції і її похідної наведено на рис. 1.

З форми графіка функції видно, що, починаючи з мінімально можливого значення $g_{\min} = 1,757$, рівняння (32) має два корені (див. рис. 2): перший росте майже лінійно з ростом константи взаємодії, виходячи на асимптотику $\beta\Delta = g$, другий – прямує до значення $\beta\Delta_s = 0,854$. Відповідно отримаємо дві вітки спектра: першу назовемо основною і збережемо для неї позначення $\omega(q)$, $\Delta(q)$; для другої – м'якої моди додаємо індекс $\omega_s(q)$, $\Delta_s(q)$. Принагідно зауважимо, що у класичному випадку не існує дійсних безщілинних розв'язків рівняння (25), тобто розв'язків з умовою $\beta\Delta(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$.

Розміщення точки закінчення спектра визначається параметром g . В околі точки $g \rightarrow 1,757$ граничне значення хвильового вектора двочастинкового спектра q_c мале, а при великих значеннях величини знерозміреного параметра взаємодії великим буде і відношення q_c/q_0 . Тоді у фігурних дужках рівняння (28) важливим буде тільки другий доданок, відповідно, рі-

зниця $\sqrt{\beta\Delta(q)} - q/2q_0$ зсуватиметься у точку максимуму $\varepsilon_{\max} = 0,924$ функції $f(\varepsilon)$. За таких умов у границі $g \gg 1$ отримуємо, що $q_c/q_0 = gf(\varepsilon_{\max}) = 1,082g$.

Залишилось проаналізувати загасання двочастинкового спектра. Позначимо $\Gamma(q)$, $\Gamma_s(q)$ – загасання віток $\omega(q)$, $\omega_s(q)$ відповідно. Наше завдання з'ясувати, в яких областях добуток $\lambda t_I(\omega(q), q)$ є малим. Неважко показати, що в класичній границі цей добуток можна записати так:

$$\lambda t_I(\omega(q), q) = 2\sqrt{\pi}g \frac{q_0}{q} \exp\{-q^2/4q_0^2 - \beta\Delta(q)\} \times \quad (35)$$

$$\times \sinh\left[\sqrt{\beta\Delta(q)}q/q_0\right],$$

відповідна рівність з точністю до заміни $\Delta(q) \rightarrow \Delta_s(q)$ виконується і для вітки $\omega_s(q)$. Величина (35) буде малою при великих значеннях хвильового вектора для обох віток. Інша ситуація в довгохвильовій області:

$$\lambda t_I(\omega(0), 0) = 2\sqrt{\pi}g\sqrt{\beta\Delta}e^{-\beta\Delta}, \quad (36)$$

(і, відповідно, для іншої вітки) з чого випливає, що для всіх значень параметра взаємодії величина $\lambda t_I(\omega_s(0), 0)$ у класичному випадку не є малою і лінійно росте зі збільшенням g . Це, в свою чергу, означає, що загасання вітки зі спектром $\omega_s(q)$ велике, інакше кажучи в класичній границі s -вітки взагалі немає. Для основної вітки двочастинкового спектра величина (36) стає дуже малою у границі $g \gg 1$. Величину загасання $\Gamma(q)$ можна розрахувати за формулою (26). У довгохвильовій області вона прямує до константи, і, що важливо, відношення

$$\Gamma(0)/\omega(0) = 2\sqrt{\pi}g^{3/2}e^{-g}, \quad g \gg 1, \quad (37)$$

експоненційно спадає.

Якісно основні риси поведінки двочастинкового спектра зберуться і при низьких температурах. Зрозуміло, що з'явиться залежність від хімічного потенціалу, який росте з пониженням температури. Загальна картинка є такою: при фіксованому значенні хімічного потенціалу максимум функції $f(\varepsilon, \beta\mu)$ зсуватиметься вліво, а значення її похідної в нулі буде зростати із наближенням до критичної температури. Це, в свою чергу, приведе до зменшення величини щільності Δ_s відповідної вітки двочастинкового спектра (цієї вітки зовсім не буде в точці $T = T_c$). Важливо, що для основної вітки спектра $\omega(q)$ в області її існування всі ведучі асимптотики залишаються такими ж, як і в класичному випадку.

Цікавою особливістю побудованої теорії є як сам факт існування границі сильної взаємодії, так і можливість аналітично її проаналізувати. Знайдемо величину щільності м'якої моди в околі критичної температури і для великих значень знерозміреного параметра взаємодії. Повернемося до рівняння (32). У випадку $g \rightarrow \infty$ його корінь збігатиметься з точкою максимуму по першій змінній функції $f(\varepsilon, \beta\mu)$ при фіксованому значенні хімічного потенціалу. Тому для отримання ведучих асимптотик величини Δ_s достатньо проаналізувати поведінку цієї функції при малих значеннях обох аргументів. У формулі (24) наявна неаналітичність функції $g_{1/2}(e^y)$ в точці $y = 0$, виділяючи яку, рахуємо ведучі асимптотики інтеграла

$$f(\varepsilon, y) = 2\{\sqrt{\pi} \arctan(\varepsilon/\sqrt{y}) + \quad (38)$$

$$+\varepsilon\zeta(1/2) + o(\varepsilon^3, \varepsilon y)\}/\zeta(3/2),$$

де $\zeta(3/2) = 2,6124$ та $\zeta(1/2) = -1,4604$. Неважко бачити, що границі

$$f(0, y) = 0, \quad f(\varepsilon \rightarrow 0, 0) = \frac{\pi^{3/2}}{\zeta(3/2)} \text{sign}(\varepsilon),$$

не "комутують". Диференціюємо (38) за першою змінною і підставляємо в рівняння (32). У результаті отримуємо

$$\beta\Delta_s = \frac{\sqrt{\pi\beta|\mu|}}{-\zeta(1/2)} \left\{ 1 + \frac{\zeta(3/2)}{-\zeta(1/2)} \frac{1}{2g} \right\}. \quad (39)$$

Ще раз наголосимо, що область застосовності виразу (39) обмежена температурами в околі критичної і великими значеннями параметра g , хоча рівняння (32) має розв'язки для $g > -\zeta(3/2)/2\zeta(1/2) = 0,894$. Фактично це значення знерозміреної константи взаємодії визначає області слабкої ($g \ll 0,894$) і сильної ($g \gg 0,894$) взаємодії або області високих та низьких температур відповідно.

Не важко знайти і перший член розкладу (33) за хвильовим вектором в області $q/2q_0 < \sqrt{\beta\Delta_s}$ спектра $\omega_s(q)$ в околі критичної температури $\beta\Delta_s'' = 1/2$. Для м'якої моди, в околі критичної температури, величина загасання, як і у випадку класичної границі теорії, не є малою. В цьому легко переконались проаналізувавши (22). Тоді добуток

$$\lambda t_I(\omega_s(q), q)|_{q \rightarrow 0} = \frac{2\sqrt{\pi}g}{\zeta(3/2)} \frac{\sqrt{\beta\Delta_s}}{\beta\Delta_s + q^2/2q_0^2}, \quad (40)$$

росте лінійно з ростом знерозміреної константи взаємодії і суттєво залежить від того, що спочатку спрямувати до нуля: величину щільності Δ_s чи хвильовий вектор. Така поведінка є характерною при наближенні до точки фазового переходу. Тепер можна вийти за межі теорії збурень і узагальнити результат на випадок (16). Достатньо замінити $m \rightarrow \tilde{m}$, $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ та $\lambda \rightarrow Z\lambda$ в усіх сумах за хвильовим вектором. Загальний висновок такий: вище температури бозеконденсації існує дві вітки двочастинкового спектра системи, загасання однієї росте зі збільшенням константи взаємодії, іншої – навпаки – швидко прямує до нуля. Це, як стане зрозуміло з наступного розділу, неабияк важливо для знаходження спектра квазічастинок.

4. Одночастинковий спектр. Критична температура

Використовуючи рівняння (8), переписемо в нашому наближенні власноенергетичну частину так:

$$\Sigma(\omega_n, p) = 2\rho\lambda + \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{q}} \frac{2\lambda^2 t(\omega'_n, q)}{1 + \lambda t(\omega'_n, q)} \times G(\omega'_n - \omega_n, |\mathbf{q} - \mathbf{p}|), \quad (41)$$

де вже явно виділений обмінний член. Далі отримаємо результат теорії збурень для власноенергетичної частини, а узагальнення на випадок (16) буде очевидним.

Для обчислення суми за частотами у виразі (41) зручно записати відповідний дріб, використовуючи спектральне співвідношення

$$\frac{\lambda t(\omega_n, q)}{1 + \lambda t(\omega_n, q)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - i\omega_n} \times \frac{\lambda t_I(\omega, q)}{(1 + \lambda t_R(\omega, q))^2 + \lambda^2 t_I^2(\omega, q)},$$

де другий співмножник під інтегралом є уявною частиною виразу (після заміни $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$) у лівій частині рівності. Після цього розрахунок суми за частотою простий і для масового оператора отримуємо таку формулу:

$$\Sigma(\omega_n, p) = 2\rho\lambda + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} 2\lambda \times$$

$$\times \frac{\lambda t_I(\omega, q)}{(1 + \lambda t_R(\omega, q))^2 + \lambda^2 t_I^2(\omega, q)} \frac{n(\beta\omega) - n(\beta\xi_{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|})}{\omega - \xi_{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} - i\omega_n}. \quad (42)$$

У загальному випадку подальший прямий розрахунок цього виразу потребує чисельних рахунків. Аналітично можна проаналізувати тільки границю достатньо малих $g \ll 1$ (а нижче покажемо, що й великих $g \gg 1$) значень знерозміреного параметра взаємодії. Особливо зупинитись на випадкові малих g не будемо – ця границя добре вивчена в літературі, зауважимо лише, що з технічного боку більш зручно аналізувати вираз (41), аніж переходити до формули (42).

Якщо все ж таки працювати з формулою (42) при малих g , то як легко бачити, основний внесок в інтеграл за змінною ω будуть вносити околиці максимумів функції $t_I(\omega, q)$ (при фіксованому q). Ця ситуація кардинально змінюється у протилежному випадку $g \gg 1$. Важливим підґрунтям для цього є те, що саме в цій області є добре визначена вітка двочастинкового спектра $\omega(q)$ і добуток $\lambda t_I(\omega(q), q)$ швидко прямує до нуля. Така ситуація буде реалізовуватись в околиці всіх добре визначених (загасання мале) віток двочастинкового спектра. Тоді квазілоренцівський контур “втягується” (під інтегралом) в дельтаподібний пік:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\lambda t_I(\omega, q)}{(1 + \lambda t_R(\omega, q))^2 + \lambda^2 t_I^2(\omega, q)} \rightarrow \rightarrow \text{sign}(t_I(\omega, q)) \delta(1 + \lambda t_R(\omega, q)). \quad (43)$$

Тепер, використовуючи властивості δ -функції, можна обчислити інтеграл у формулі (42)

$$\Sigma(\omega_n, p) = 2\rho\lambda + \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{q}} [\partial t_R(\omega, q) / \partial \omega]^{-1} |_{\omega=\omega(q)} \times \frac{n(\beta\omega(q)) - n(\beta\xi_{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|})}{\omega(q) - \xi_{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} - i\omega_n}. \quad (44)$$

Отриманий тут вираз (44) для власноенергетичної частини становить важливий результат цієї статті, оскільки дозволяє проаналізувати загасання спектра квазічастинок і розрахувати критичну температуру системи. І, хоча ця формула має працювати в області великих g слід сподіватись на задовільний опис і для проміжних значень параметра взаємодії.

Проаналізуємо уявну частину масового оператора (44) після аналітичного продовження у верхню півплощину $i\omega_n \rightarrow \xi_p + i0$:

$$\Sigma_I(\xi_p, p) = \frac{4\pi g^2}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\partial \Delta(q)}{\partial g} [n(\beta\omega(q)) - n(\beta\xi_{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|})] \times$$

$$\times \delta(\omega(q) - \xi_{|\mathbf{q}-\mathbf{p}|} - \xi_p). \quad (45)$$

Для спрощення (це не вплине на точність оцінки) в інтегралі за хвильовим вектором замінюємо величину $\beta\Delta'' \rightarrow 1/2$ її значенням при великих параметрах взаємодії. Тоді, внаслідок нескладного розрахунку, отримуємо

$$\begin{aligned} \Sigma_I(\xi_p, p) = & \frac{1}{4\pi} \frac{p_0^3}{\rho} g^2 \frac{\partial \Delta}{\partial g} \frac{p_0}{p} \times \\ & \times \left[\ln \left| 1 - \exp \left\{ \beta\mu - \left(\frac{\beta\Delta}{p/p_0} \right)^2 \right\} \right| - \right. \\ & \left. - \ln \left| 1 - \exp \left\{ 2\beta\mu - \left(\frac{\beta\Delta}{p/p_0} \right)^2 - p^2/p_0^2 \right\} \right| \right], \quad (46) \end{aligned}$$

де $p_0 = q_0 = \sqrt{2mT}/\hbar$. Як бачимо, для всіх значень хвильового вектора загасання дуже мале, а це, в свою чергу, важливе необхідне підтвердження обґрунтованості вибору (16) структури одночастинкової функції Гріна.

Тепер дослідимо дійсну частину масового оператора. Мета – знайти ведучі асимптотики $Z(p)$ та нового одночастинкового спектра ξ_p при малих p та великих g . У цій границі простим диференціюванням отримуємо

$$\begin{aligned} [\partial \Sigma_R(\omega, p)/\partial \omega] |_{\omega=\xi_p} = & \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} n(\beta\xi_{\mathbf{q}}) \times \\ & \times g^2 \frac{\partial}{\partial g} \frac{1}{\beta\Delta} \left\{ 1 - \frac{\beta\Delta'' - 1/2}{\Delta} \varepsilon_{\mathbf{q}} + \dots \right\}, \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{m}}{m} = & 1 - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} n(\beta\xi_{\mathbf{q}}) \times \\ & \times g^2 \frac{\partial}{\partial g} \left\{ \frac{\beta\Delta'' - 1/2}{\beta\Delta} - \frac{1}{3} \beta\varepsilon_{\mathbf{q}} \frac{(\beta\Delta'' + 1/2)^2}{(\beta\Delta)^2} + \dots \right\}. \quad (48) \end{aligned}$$

Тут ми виписали тільки ті доданки, які дають найбільший внесок в інтеграл. Внаслідок нескладного розрахунку з використанням ведучих асимптотик для $\beta\Delta = g$ та $\beta\Delta'' = 1/2$ отримуємо, що ефективна маса одночастинкових збуджень прямує до маси частинок, а величина Z дорівнює $1/2$. З умови

$$\frac{Z}{\rho} \left(\frac{\tilde{m}T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_{3/2}(1) = 1, \quad (49)$$

яка випливає з формули (16), знаходимо критичну температуру

$$\frac{T_c - T_0}{T_0} = 0,587, \quad g \gg 1. \quad (50)$$

Цей результат можна порівняти з розрахунками критичної температури $(T_c - T_0)/T_0 = 0,396$ в нещодавно опублікованій роботі [16]. Очевидно, що неузгодженість числових коефіцієнтів пов'язана з використанням різних наближень при розрахунках. Важливо, що якісно результати збігаються, хоча тут подано розрахунки вище критичної температури, тобто, строго кажучи, мова йде про границю $T \rightarrow T_c + 0$. Автори [16] розглядали бозе-газ в конденсатній фазі, тобто з боку $T \rightarrow T_c - 0$. Отже, критична температура збільшується і прямує до константи при необмеженому зростанні g . Результат неочікуваний, оскільки при необмеженому зростанні довжини s -розсіяння повинен ефективно збільшуватись “власний” об'єм частинки, як наслідок, збільшуватись густина, а отже, і температура бозе-конденсації. Тобто, такі якісні міркування наводять на думку, що при необмеженому зростанні величини взаємодії між частинками повинна необмежено рости й величина критичної температури системи. Нагадаємо, що це результат звичайної теорії збурень.

Для самоузгодженого розрахунку потрібно знайти такі члени розкладу величини (31) за параметром $1/g$:

$$\beta\Delta = g + \frac{3}{2} g_{5/2}(e^{\beta\mu})/g_{3/2}(e^{\beta\mu}), \quad (51)$$

$$\beta\Delta'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\Delta} g_{5/2}(e^{\beta\mu})/g_{3/2}(e^{\beta\mu}). \quad (52)$$

Коротко торкнемось подальших обчислень. Для розрахунку критичної температури (49) знову потрібно розрахувати величину Z та ефективну масу \tilde{m} квазі-частинок, використовуючи формули (47) та (48) відповідно, але з тією відмінністю, що тепер у правій частині цих рівностей ми повинні підставити точне значення \tilde{m} замість m і перемасштабувати величину константи взаємодії – тобто виконати заміну $\lambda \rightarrow Z\lambda$. Не зупиняючись на деталях розрахунків інтегралів і розв'язуванні простих алгебраїчних рівнянь, наводимо результат, виражений через газовий параметр ρa^3 :

$$\tilde{m}_{T \rightarrow T_c} = \frac{2}{3} m, \quad Z_{T \rightarrow T_c} = 0,830(\rho a^3)^{-1/8}, \quad (53)$$

і, відповідно, для критичної температури маємо

$$\frac{T_c}{T_0} = 0,472(\rho a^3)^{1/12}, \quad (54)$$

де T_0 – температура бозе-конденсації ідеального газу. Умова застосовності цих формул у критичній температурі $Z\rho\lambda/T_c = 1,855(\rho a^3)^{1/8} \gg 1$, хоча опис буде задовільним, як видно з рис. 1, для значень цього параметра більших за 3–4 (саме при цих значеннях аргументу функція $f(\varepsilon)$ “виходить” на асимптотику $1/\varepsilon$). Потрібно також зауважити, що це лише ведуча асимптотика критичної температури при великих значеннях газового параметра.

В протилежному випадку, для $g \rightarrow 0$, простіше використовувати схему, запропоновану в роботі [5], а не явно розраховувати вираз (42). Важливо, що в нашому випадку величина зсуву критичної температури повністю збігатиметься з результатом роботи [17], де використане таке ж наближення.

Коротко обговоримо поширення результатів і на менші значення g . По-перше, потрібно точніше розрахувати величину $\Delta(g)$ і врахувати той факт, що двочастинковий спектр має точку закінчення. По-друге, зі зменшенням g втрачається точність співвідношення (44), тому для розрахунків необхідно використовувати формулу (42).

5. Висновки

Отже, запропонована методика розрахунку, яка в найпростішому наближенні враховує всі попарні процеси розсіяння, добре описує бозе-газ з точковою взаємодією для всіх значень параметра неідеальності. Обґрунтовано ідею (16) про те, що така система принципово не відрізняється від ідеального бозе-газу: взаємодія перенормує константи, а не змінює ведучих асимптотик динамічних величин системи, включно до температури бозе-конденсації. У критичній точці неважко показати, що ведуча асимптотика власно-енергетичної частини (41) на нульовій частоті неаналітична за хвильовим вектором $\Sigma(0, p) - \Sigma(0, 0) \sim p^2 \ln(p)$, що є натяком на степеневу поведінку одночастинкової функції Гріна $G(0, p) \sim p^{\eta-2}$.

Детально проаналізовано двочастинковий спектр системи вище критичної температури і обчислено температуру бозе-конденсації у границі сильного відштовхування між частинками.

Автор висловлює подяку професорові І. О. Вакарчуку за обговорення результатів роботи.

1. V. Carogrosso-Sansone *et al.*, New J. Phys. **12**, 043010 (2010).
2. G. Baym *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1703 (1999).

3. K. Huang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3770 (1999).
4. R. Seiringer and D. Ueltschi, Phys. Rev. B **80**, 014502 (2009).
5. G. Baym *et al.*, Europhys. Lett. **49**, 150 (2000).
6. V.A. Kashurnikov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 120402 (2001).
7. P. Arnold and G. Moore, Phys. Rev. Lett. **87**, 120401 (2001).
8. P. Arnold and B. Tomasik, Phys. Rev. A **62**, 063604 (2000).
9. B. Kastening, Phys. Rev. A **68**, 061601 (2003); Phys. Rev. A **69**, 043613 (2004).
10. M. Holzmann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 120403 (2001).
11. P. Arnold *et al.*, Phys. Rev. A **65**, 013606 (2002).
12. K. Huang and C.N. Yang, Phys. Rev. **105**, 767 (1957).
13. В.Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике* (Атомиздат, Москва, 1976).
14. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (Физматгиз, Москва, 1962).
15. Д.Н. Зубарев, УФН **71**, 71 (1960).
16. F. Cooper, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **105**, 240402 (2010).
17. H.T.C. Stoof, Phys. Rev. A **45**, 8398 (1992).

Одержано 30.01.11

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БОЗЕ-ГАЗА
ИЗ δ -ПОДОБНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ВЫШЕ
ТЕМПЕРАТУРЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ПРЕДЕЛЕ
СИЛЬНОГО ОТТАЛКИВАНИЯ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ

В.С. Пастухов

Резюме

С помощью функционального интегрирования построены точные уравнения для одночастичной и неприводимой части двухчастичной функций Грина для трехмерного бозе-газа с точечным взаимодействием. В наиболее простом приближении теории, которое учитывает все прямые парные процессы рассеяния частиц, детально проанализирован двухчастичный спектр системы. Показано, что ведущая асимптотика одночастичного спектра квадратична в длинноволновой области. Найдена величина критической температуры в пределе сильного отталкивания между частицами.

DYNAMICAL PROPERTIES OF A BOSE GAS WITH δ -LIKE
INTERACTION BETWEEN PARTICLES
AT TEMPERATURES ABOVE THE PHASE
TRANSITION POINT AND IN THE LIMIT
OF STRONG INTERPARTICLE REPULSION

V.S. Pastukhov

Ivan Franko National University of Lviv
(12, Drahomanov Str., Lviv 79005; Ukraine;
e-mail: volodyapastukhov@gmail.com)

S u m m a r y

Exact equations for the one-particle Green's function and for the irreducible part of the two-particle Green's function of a

three-dimensional Bose gas with point-like interaction between particles have been derived in the framework of the functional integral approach. The two-particle spectrum of the system has been analyzed in detail in the simplest approximation, which makes allowance for all two-particle scattering processes. The leading asymptotics of the single-particle spectrum in the long-wave range was shown to remain quadratic. The critical temperature was found in the limit of strong repulsion between particles.