

ЕЛЕКТРИЧНИЙ ПЕРЕХІД ФРЕДЕРІКСА В НЕМАТИЧНИЙ КОМІРЦІ З ПЕРІОДИЧНОЮ ПОЛЯРНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ЗЧЕПЛЕННЯ

М.Ф. ЛЕДНЕЙ, О.С. ТАРНАВСЬКИЙ

УДК 532.783; 548-14
© 2011

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, фізичний факультет
(Просп. Академіка Глушкова, 4, Київ 03680; e-mail: Ledney@univ.kiev.ua)

Отримано значення порога і запороговий просторовий розподіл директора в електричному полі в нематичній комірці з періодичною енергією зчеплення директора з її поверхнею. Показано, що значення порога немонотонно залежить від числа s періодів енергії зчеплення, що вкладаються на довжині комірки. Запороговий розподіл директора при цілих значеннях s відслідковує періодичну зміну енергії зчеплення. Амплітуда періодичного відхилення директора росте зі зменшенням відношення товщини комірки до періоду енергії зчеплення.

1. Вступ

Значний інтерес до однорідної порогової переорієнтації директора нематичного рідкого кристала (НРК) зовнішніми полями пов'язаний з широким використанням нематичних комірок у ролі елементарної бази різного роду електронно-оптичних приладів [1–3]. У зовнішньому електричному/магнітному полях в НРК-комірці також може виникати порогова просторово-періодична структура поля директора. Зокрема, в роботах [4, 5] вивчали виникнення просторово-періодичної структури директора при його пороговій переорієнтації з планарного стану в гомеотропний в комірці флексоелектричного нематика з нескінченно жорсткими граничними умовами. Розглядався вплив скінченності енергії зчеплення директора флексоелектричного НРК з поверхнею на поріг і період просторової структури директора, що виникає при його переорієнтації в електричному полі як з планарного стану в гомеотропний [6], так і з гомеотропного в планарний [7], а також і при планар-планарній переорієнтації директора [8]. Та-

кож було встановлено, що залежно від співвідношення між пружними модулями Франка K_1 і K_2 порогова просторово-періодична структура директора може виникати і за відсутності флексоелектричних властивостей, як при планар-гомеотропній [6, 9–12], так і планар-планарній переорієнтаціях директора [13]. Порогову просторово-періодичну переорієнтацію директора в світловому полі з просторово модульованою інтенсивністю в гомеотропній нематичній комірці розглянуто в роботі [14]. В роботі [15] показано можливість отримання просторово-періодичної структури директора при його планар-планарній переорієнтації в світловому полі. Виникнення спонтанних просторово-періодичних викривлень директора і вплив на них пружної сталості K_{24} в планарно орієнтованій НРК-комірці розглядали в роботах [16–18].

Хоча просторово-періодична переорієнтація директора є об'ємним ефектом, проте її характер суттєво залежить від сили і типу взаємодії НРК з поверхніми комірки. У згаданих вище роботах умови для директора вважалися однорідними зі скінченним або нескінченним значенням енергії зчеплення. В роботі [19] досліджували вплив модуляції осі легкої орієнтації директора на поверхні комірки на просторово-періодичний розподіл поля директора флексоелектричного нематика. В роботі [20] досліджували спонтанні переходи між двома орієнтаційними станами в напівнескінченному нематикі з періодичними почерговими планарними і гомеотропними граничними умовами на поверхні. Вплив періодичності енергії зчеплення директора з поверхнею комірки на фазовий перехід нематик-ізотропна рідина розглянуто в [21]. Досліджувалась взаємодія між під-

кладками в НРК-комірці з періодичними почерговими планарними і гомеотропними граничними умовами [22], а також вплив на цю взаємодію періодичності енергії зчеплення і теплових флуктуацій директора [23]. В роботі [24] розглядали виникнення доменних структур у тонких нематичних плівках з періодичними гомеотропно-планарними граничними умовами.

У даній роботі розглянуто виникнення просторово-періодичної структури директора в НРК-комірці з періодичним розподілом енергії зчеплення під дією постійного електричного поля.

2. Рівняння для директора

Нехай маємо плоскопаралельну комірку з нематичним рідким кристалом, обмежену площинами $z = -L/2$ і $z = +L/2$, з вихідною планарною орієнтацією директора вздовж осі Ox , поміщену в зовнішнє однорідне статичне електричне поле з вектором напруженості \mathbf{E}_0 в напрямку осі Oz . Вважатимемо, що енергія зчеплення директора з поверхнями комірki при його переорієнтації у площині xOy (азимутальна енергія) нескінченно велика, а енергія зчеплення, пов'язана з відхиленням директора в площині xOz (полярна енергія), є періодичною функцією координати y і її, для визначеності, можна представити у вигляді

$$W(y) = W_0 + V \cos \frac{2\pi y}{d}, \quad (1)$$

де сталі $W_0, V > 0$ і $V < W_0$.

Тоді в одноконстантному наближенні вільна енергія комірki НРК може бути записана у вигляді

$$F = F_{el} + F_E + F_S,$$

$$F_{el} = \frac{1}{2} \int_V \left\{ K ((\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{n})^2) - \right.$$

$$\left. - K_{24} \operatorname{div}(\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} + [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}]) \right\} dV,$$

$$F_E = -\frac{\varepsilon_a}{8\pi} \int_V (\mathbf{nE})^2 dV,$$

$$F_S = -\frac{1}{2} \int_S W(y)(\mathbf{ne})^2 dS. \quad (2)$$

Тут F_{el} – пружна енергія Франка, F_E – внесок у вільну енергію від електричного поля, F_S – поверхнева вільна енергія нематика, вибрана у вигляді потенціалу Раїні [25], K, K_{24} – пружні сталі нематика, \mathbf{n} – директор, $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp} > 0$ – анізотропія статичної діелектричної проникності, \mathbf{e} – орт осі легкої орієнтації директора на поверхні комірki ($\mathbf{e} \parallel Ox$).

Як було показано в роботі [6], за відсутності флексополяризації при нескінченно великій азимутальній енергії зчеплення і одноконстантному наближенні, перехід Фредерікса проходить в площині “зовнішнє електричне поле – вихідна орієнтація директора”. Тому далі будемо вважати, що переорієнтація директора відбувається в площині xOz . Тоді, в силу однорідності системи в напрямку осі Ox , директор в об'ємі НРК можна шукати у вигляді

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \theta(y, z) + \mathbf{k} \sin \theta(y, z), \quad (3)$$

де \mathbf{i}, \mathbf{k} – орти декартової системи координат.

Мінімізуючи вільну енергію (2) по куту θ , отримуємо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \epsilon E_z^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (4)$$

і граничні умови до нього

$$\left[\pm K \frac{\partial \theta}{\partial z} + \left(W_0 + V \cos \frac{2\pi y}{d} \right) \sin \theta \cos \theta \right]_{z=\pm L/2} = 0, \quad (5)$$

де $\epsilon = \frac{\varepsilon_a}{4\pi K}$. Як видно із рівняння (4) і граничних умов (5), у розглядуваній геометрії задачі пружний коефіцієнт K_{24} не дає внеску в просторову переорієнтацію директора.

Рівняння для директора (4), (5) необхідно вирішувати разом з рівняннями електростатики $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ і $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ для електричного поля $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$ в об'ємі комірki.

3. Порогове значення електричного поля

Будемо вважати лінійний розмір D комірki в напрямку осі Oy набагато більшим її товщини L , так що граничними ефектами на бічних поверхнях комірki можна знехтувати. На функцію θ накладаємо циклічні граничні умови по координаті y : $\theta(y + D, z) = \theta(y, z)$. Тоді, в силу парності функції $W(y)$ (1), функцію $\theta(y, z)$ можна шукати в такому вигляді:

$$\theta(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(z) \cos(q_n y), \quad (6)$$

де $q_n = 2\pi n/D$.

Для визначення величини порога переорієнтації директора достатньо обмежитись розглядом лінеаризованої задачі. Підставивши розклад (6) у лінеаризовані по куту θ рівняння (4), (5) і використавши лінійну незалежність функцій $\cos(q_n y)$, отримаємо рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів $\theta_n(z)$:

$$\frac{d^2 \theta_n}{dz^2} + (\epsilon E_0^2 - q_n^2) \theta_n = 0 \quad (7)$$

і граничні умови до них

$$\left[\pm K \frac{d\theta_n}{dz} + W_0 \theta_n + V \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \theta_m \right]_{z=\pm L/2} = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

де

$$\alpha_{nm}(s) = \frac{s}{2\pi} (2 - \delta_{n0}) \times$$

$$\times \sin(\pi s) \left[\frac{(-1)^{n+m}}{s^2 - (n+m)^2} + \frac{(-1)^{n-m}}{s^2 - (n-m)^2} \right], \quad (9)$$

$s = D/d$ – число періодів енергії зчеплення, що вкладається на довжині комірки.

Підставивши загальний розв'язок рівняння (7) $\theta_n(z) = a_n \cos(\sqrt{\epsilon E^2 - q_n^2} z)$ в граничні умови (8), отримаємо таку систему однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_n :

$$\left(\cos \xi_n - \frac{2}{\epsilon} \xi_n \sin \xi_n \right) a_n + v \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} a_m \cos \xi_m = 0, \quad (10)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Тут використано позначення: $\epsilon = \frac{W_0 L}{K}$, $v = \frac{V}{W_0}$,

$\xi_n = \sqrt{p^2 - \left(\frac{\pi n L}{D}\right)^2}$, $p = \frac{\pi E_0}{2 E_\infty}$, $E_\infty = \frac{\pi}{L \sqrt{\epsilon}}$ – величина порога переходу Фредерікса при нескінченно жорсткому однорідному зчепленні директора з поверхнею комірки [1, 3].

Умова нетривіального розв'язку системи рівнянь (10) дає детермінантне рівняння для визначення величини порогового електричного поля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_0 & v\alpha_{01} & v\alpha_{02} & \dots \\ v\alpha_{10} & L_1 & v\alpha_{12} & \dots \\ v\alpha_{20} & v\alpha_{21} & L_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

де $L_n = 1 + v\alpha_{nn} - \frac{2}{\epsilon} \xi_n \operatorname{tg} \xi_n$.

Будемо розглядати малі неоднорідності енергії зчеплення, такі, що виконується умова $v \ll 10\epsilon L^2/D^2$. Тоді $v\alpha_{ml} \ll g_1 < g_2 < g_3 < \dots$ для всіх $m, l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Розв'язок рівняння (11) шукаємо у вигляді $p = p_0 + \delta$, де p_0 – розв'язок задачі при $v = 0$, $|\delta| \ll p_0$. Вважаючи δ величиною того ж порядку, що і $v\alpha_{ml}$, наведемо діагональні елементи рівняння (11) у вигляді

$$L_0 = v\alpha_{00} - f_0 \delta - h_0 \delta^2 + o(\delta^2) \sim v\alpha_{00},$$

$$L_n = g_n + v\alpha_{nn} + O(\delta), \quad \text{якщо } n \geq 1, \quad (12)$$

де

$$f_0 = \frac{\epsilon}{2p_0} \left(1 + \frac{2}{\epsilon} + \frac{4p_0^2}{\epsilon^2} \right), \quad h_0 = \frac{2}{\epsilon} (1 + \epsilon) \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4p_0^2} \right), \quad (13)$$

$$g_n = 1 - \frac{2}{\epsilon} \sqrt{p_0^2 - \left(\frac{\pi n L}{D}\right)^2} \operatorname{tg} \sqrt{p_0^2 - \left(\frac{\pi n L}{D}\right)^2}. \quad (14)$$

Розглянемо визначник Δ N -го порядку в рівнянні (11), розкриваючи який по останньому рядку отримаємо

$$\Delta_N = L_{N-1} \Delta_{N-1} + v \sum_{i=0}^{N-2} (-1)^{N+i+1} \alpha_{N-1,i} M_{N-1,i}, \quad (15)$$

де M_{ij} – додатковий мінор до елемента ij визначника. Легко бачити, що мінор $M_{N-1,0} = (-1)^N v\alpha_{0,N-1} L_{N-2} L_{N-3} \dots L_1 + o(v\alpha_{ml})$ є величиною першого порядку малості по $v\alpha_{0,N-1}$, а всі мінори $M_{N-1,i}$ ($1 \leq i \leq N-2$) є малими величинами порядку $v^2 \alpha_{ml}^2$.

Обмежившись в (15) врахуванням членів порядку $v^2 \alpha_{ml}^2$, отримаємо рекурентну формулу

$$\Delta_N = L_{N-1} \Delta_{N-1} - v^2 \alpha_{N-1,0} \alpha_{0,N-1} L_1 L_2 \dots L_{N-2} + o(v^2 \alpha_{ml}^2), \quad (16)$$

що пов'язує визначники N -го і $(N-1)$ -го порядків.

У результаті N -кратного застосування отриманого рекурентного співвідношення, вираз (15) набуде вигляду

$$\Delta_N = L_1 L_2 \dots L_{N-1} \left(L_0 - v^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\alpha_{i0} \alpha_{0i}}{g_i} \right). \quad (17)$$

Розв'язуючи рівняння (11) і беручи до уваги (17), знаходимо значення δ і величину порога орієнтаційної нестійкості директора:

$$E_{0th} = E_{W_0} + \frac{2v}{\pi} E_{\infty} \left[\frac{\alpha_{00}}{f_0} - v \left(\frac{h_0 \alpha_{00}^2}{f_0^3} + \frac{2}{f_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{0i}^2}{g_i} \right) \right], \quad (18)$$

де $E_{W_0} = 2p_0 E_{\infty} / \pi$ – величина порога переходу Фредерікса в випадку однорідної скінченної енергії зчеплення W_0 , p_0 – найменший додатний корінь рівняння $p_0 \operatorname{tg} p_0 = \varepsilon/2$. Як показують розрахунки, сума по i у виразі (18) збігається, тому в ній можна обмежитись врахуванням скінченного числа доданків з довільною наперед заданою точністю.

На рис. 1 наведено залежність безрозмірного порогового поля E_{0th}/E_{∞} від числа s періодів енергії зчеплення, що вкладаються на довжині комірки, отриману в результаті чисельного розрахунку формули (18) для декількох значень відношення L/D при $\varepsilon = 100$ і $v = 0, 1$. Як видно, величина порогового електричного поля зі зростанням параметра s осцилює з амплітудою, що зменшується, наближаючись в граничному випадку $s \rightarrow \infty$ до значення порога E_{W_0} переходу Фредерікса в випадку однорідної скінченної енергії зчеплення W_0 . При $s \gtrsim 5$ значення порога практично перестають залежати від величини відношення L/D при заданих значеннях параметрів ε і v . Максимальне значення порога досягається при $s = 0$ (у випадку однорідної скінченної енергії зчеплення $W_0 + V$) і, згідно з виразами (18), (9), може бути представлено у вигляді

$$E_{W_0+V} = \frac{2E_{\infty}}{\pi} \left(p_0 + \frac{v}{f_0} - \frac{h_0 v^2}{f_0^3} \right), \quad (19)$$

де значення параметрів f_0 , h_0 визначаються виразами (13).

Якщо на довжині комірки вкладається ціле число періодів енергії зчеплення, тобто $s = k \in N$, тоді $\alpha_{00}(k) = 0$, $\alpha_{0i}^2(k) = \delta_{ik}/4$ і згідно з виразом (18) поріг виявляється рівним

$$E_{0th} = E_{W_0} - \frac{v^2 E_{\infty}}{\pi f_0 g_k}, \quad (20)$$

де f_0 і g_k визначаються формулами (13) і (14) відповідно.

На відміну від випадку довільних значень s , у величину порога дають внесок лише квадратичні по v члени. Як видно з рис. 1 і формули (20), значення

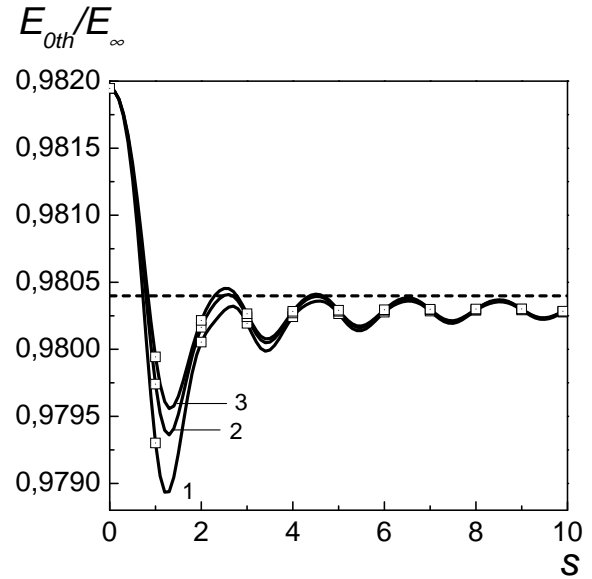


Рис. 1. Залежність порогового електричного поля E_{0th}/E_{∞} від значень параметра s при $\varepsilon = 100$, $v = 0, 1$ (суцільна лінія). $L/D = 0, 03$ (1), $0, 04$ (2), $0, 05$ (3). \square – значення порога при цілих s . Величина порога E_{W_0}/E_{∞} у випадку однорідної скінченної енергії зчеплення W_0 (штрихова лінія)

порога $E_{0th}(k)$ виявляються меншими за його величину E_{W_0} у випадку однорідної скінченної енергії зчеплення W_0 . З ростом цілого числа k періодів енергії зчеплення, що вкладаються на довжині комірки, величина порога $E_{0th}(k)$ монотонно зростає і при $k \gg 1$ наближено визначається за формулою

$$E_{0th} = E_{W_0} - \frac{v^2 E_{\infty}}{\pi f_0 \left(1 + \frac{2\pi L}{\varepsilon d} \right)}.$$

У розглядуваному випадку цілих значень $s = k$ кут відхилення директора від його незбуреного напрямку буде визначатися лише двома доданками ряду (6), а саме

$$\theta(y, z) = \theta_0(z) + \theta_1(z) \cos(2\pi y/d). \quad (21)$$

Отже, вздовж осі Oy виникає просторово-періодична структура директора з періодом рівним періоду енергії зчеплення.

4. Просторовий розподіл директора

Знайдемо просторовий розподіл директора в комірці при невеликому перевищенні порога переходу Фредерікса. Представимо електричне поле \mathbf{E} в об'ємі нематика через потенціал $\varphi(y, z) = -(z + \psi(y, z))E_0$,

де $\psi(y, z)$ – невідома функція. З рівняння $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ і граничних умов для електричного поля на поверхні комірки отримуємо рівняння для функції $\psi(y, z)$ і граничні умови до нього

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2 \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=\pm L/2} = 0. \quad (22)$$

Розглянемо випадок, коли на довжині комірки вкладається ціле число періодів енергії зчеплення, $D/d = k \in N$. Якщо неоднорідність енергії зчеплення мала, і така, що виконується умова $v \ll 10\varepsilon L^2/d^2$, то функцію $\theta(y, z)$ шукаємо у вигляді (21), де $|\theta_1| \ll |\theta_0|$. Накладаючи на функцію $\psi(y, z)$ періодичні умови по змінній y , $\psi(y + d, z) = \psi(y, z)$, шукатимемо її у вигляді аналогічному (21):

$$\psi(y, z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) \cos(2\pi y/d), \quad \text{де } |\psi_1| \ll |\psi_0|. \quad (23)$$

В силу симетрії задачі мають місце співвідношення: $\theta(y, -z) = \theta(y, z)$, $\psi(y, -z) = \psi(y, z)$.

Підставивши (21), (23) у вирази (4), (5) і (22), отримуємо з точністю до членів порядку θ^3 такі рівняння і граничні умови до них для знаходження функцій $\theta_0(z)$, $\psi_0(z)$, $\theta_1(z)$ і $\psi_1(z)$:

$$\frac{d^2 \theta_0}{dz^2} + \varepsilon E_0^2 \left(\theta_0 - \frac{2}{3} \theta_0^3 + 2\theta_0 \frac{d\psi_0}{dz} \right) = 0, \quad (24)$$

$$\left[\pm K \frac{d\theta_0}{dz} + W_0 \left(\theta_0 - \frac{2}{3} \theta_0^3 \right) + \frac{1}{2} V \theta_1 (1 - 2\theta_0^2) \right]_{z=\pm L/2} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \psi_0}{dz^2} = -2 \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \theta_0 \frac{d\theta_0}{dz}, \quad (26)$$

$$\left. \frac{d\psi_0}{dz} \right|_{z=\pm L/2} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d^2 \theta_1}{dz^2} + \left(\varepsilon E_0^2 - \frac{4\pi^2}{d^2} \right) \theta_1 = 0, \quad (28)$$

$$\left[\pm K \frac{d\theta_1}{dz} + W_0 \theta_1 + V \theta_0 \right]_{z=\pm L/2} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - \frac{4\pi^2}{d^2} \psi_1 = -2 \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \left(\theta_0 \frac{d\theta_1}{dz} + \theta_1 \frac{d\theta_0}{dz} \right), \quad (30)$$

$$\left. \frac{d\psi_1}{dz} \right|_{z=\pm L/2} = 0. \quad (31)$$

Інтегруючи один раз по z рівняння (24), і враховуючи системи (26) і (27), отримуємо

$$\frac{L^2}{4p^2} \left(\frac{d\theta_0}{dz} \right)^2 = (1 + \alpha \theta_{0s}^2) (\theta_{0m}^2 - \theta_0^2) - \gamma (\theta_{0m}^4 - \theta_0^4), \quad (32)$$

де $\theta_{0s} = \theta_0(z = \pm L/2)$, $\theta_{0m} = \theta_0(z = 0)$ – максимальне значення функції $\theta_0(z)$, що досягається в центрі $z = 0$ комірки, $\alpha = 2 \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}}$, $\gamma = \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}}$.

Інтегруючи рівняння (32), знаходимо

$$\frac{2p|z|}{L} \sqrt{1 + \alpha \theta_{0s}^2} = \left(1 + \frac{3\gamma \theta_{0m}^2}{4(1 + \alpha \theta_{0s}^2)} \right) \arccos \frac{\theta_0}{\theta_{0m}} + \frac{\gamma \theta_0 \sqrt{\theta_{0m}^2 - \theta_0^2}}{4(1 + \alpha \theta_{0s}^2)}. \quad (33)$$

Якщо виконується умова $v \ll 10\varepsilon L^2/d^2$, то амплітуда $\theta_1(z)$ першої гармоніки, що визначається системою (28) і (29), має вигляд

$$\theta_1(z) = -\frac{v\theta_{0s}}{\cos \xi_k} \cos \frac{2\xi_k z}{L}. \quad (34)$$

Обмежимося розглядом сильного зчеплення ($\varepsilon \gg 1$) директора з поверхнею комірки. З граничних умов (25), враховуючи рівняння (32) і вирази (34), з точністю до лінійних по $1/\varepsilon$ малих величин, знайдемо

$$\theta_{0s} = \frac{2p\theta_{0m}}{\varepsilon} \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) \left(1 - \frac{\gamma}{2} \theta_{0m}^2 \right). \quad (35)$$

Підставивши значення θ_{0s} (35) в рівняння (33), записане для поверхонь $z = \pm L/2$ комірки, в лінійному по $1/\varepsilon$ наближенні отримуємо

$$\theta_{0m}^2 = \frac{4}{3\gamma} \left(\frac{E_0}{E_{0th}} - 1 \right), \quad E_0 \geq E_{0th}, \quad (36)$$

де $E_{0th} = E_{W_0} \left(1 - \frac{v^2}{\varepsilon} \right)$ – порогове значення (20) електричного поля, записане з точністю до величин лінійних по $1/\varepsilon$. В граничному випадку абсолютно жорсткого зчеплення ($W = \infty$) директора з підкладами значення θ_{0m} , як випливає з (36), збігається зі знайденим у роботі [26].

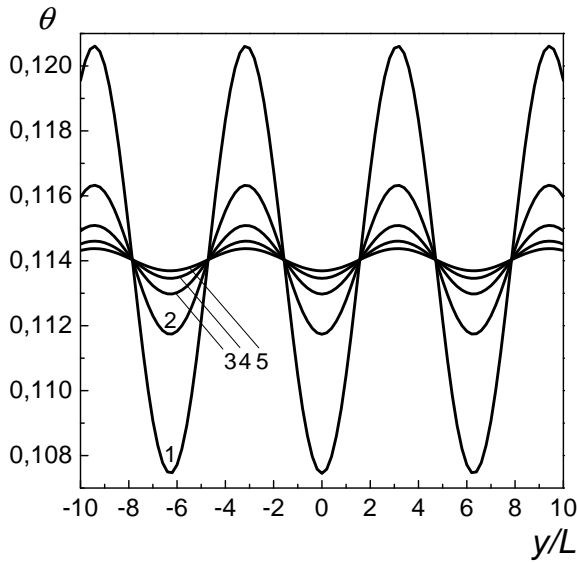


Рис. 2. Кут відхилення директора θ як функція координати y в центрі комірки $z = 0$ при $L/d = 0,1$ (1), $0,2$ (2), $0,3$ (3), $0,4$ (4), $0,5$ (5)

Підставивши вираз (35) у рівняння (33), отримаємо з точністю до малих величин порядку θ_{0m}^3 вираз для функції $\theta_0(z)$ у вигляді

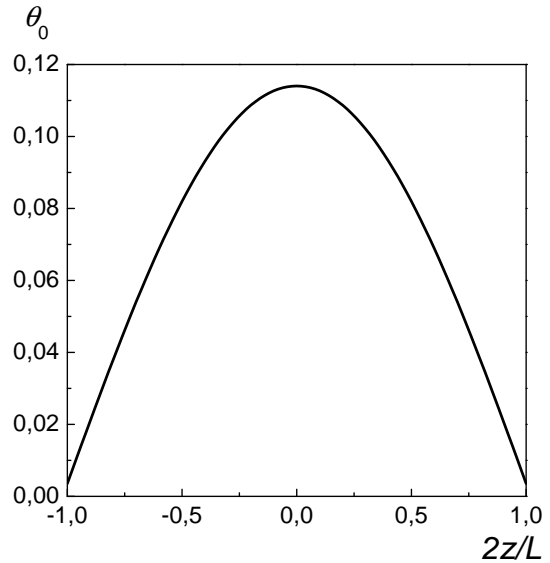
$$\theta_0(z) = \theta_{0m} \cos\left(\frac{\pi z E_0}{L E_\infty}\right) + \frac{\gamma \theta_{0m}^3}{8} \sin\left(\frac{\pi z E_0}{L E_\infty}\right) \left[6 \frac{\pi z E_0}{L E_\infty} + \sin\left(2 \frac{\pi z E_0}{L E_\infty}\right) \right], \quad (37)$$

де θ_{0m} задається виразом (36).

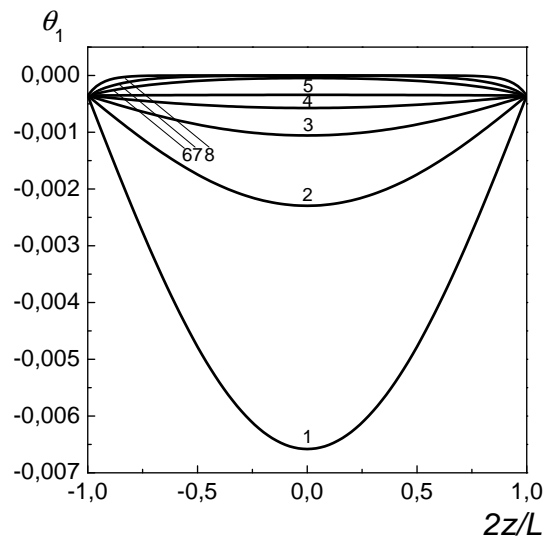
З систем (26), (27) і (30), (31), враховуючи вирази (34), (37) відповідно, знаходимо явний вигляд функцій $\psi_0(z)$ і $\psi_1(z)$:

$$\psi_0(z) = \frac{\varepsilon_a L \theta_m^2}{4 \varepsilon_\perp} \left(\cos\left(\frac{\pi E_0}{E_\infty}\right) \frac{2z}{L} - \frac{E_\infty}{\pi E_0} \sin\left(\frac{2\pi z E_0}{L E_\infty}\right) \right), \quad (38)$$

$$\psi_1(z) = -\frac{\varepsilon_a v p L \theta_m^2}{\varepsilon_\perp \varepsilon \cos \xi_k} \left\{ \frac{2 \cos p \cos \xi_k}{(\pi L/d)^2} - \frac{\cos(p - \xi_k)}{(p - \xi_k)^2 + (\pi L/d)^2} - \frac{\cos(p + \xi_k)}{(p + \xi_k)^2 + (\pi L/d)^2} \right\} \times \frac{\pi L \operatorname{sh}(2\pi z/d)}{d \operatorname{ch}(\pi L/d)} - \frac{(p - \xi_k) \sin(2(p - \xi_k)z/L)}{(p - \xi_k)^2 + (\pi L/d)^2}$$



a



б

Рис. 3. Залежності θ_0 (а) і θ_1 (б) як функції зведеної товщини $2z/L$ комірки при $\varepsilon = 100$, $v = 0,1$, $E_0 = 1,01E_{0th}$. $L/d = 0,1$ (1), $0,2$ (2), $0,3$ (3), $0,4$ (4), $0,5$ (5), 1 (6), 2 (7), 5 (8)

$$-\frac{(p + \xi_k) \sin(2(p + \xi_k)z/L)}{(p + \xi_k)^2 + (\pi L/d)^2} \}. \quad (39)$$

Формули (38), (39) і (23) визначають розподіл потенціалу електричного поля в об'ємі комірки.

Формула (21), враховуючи отримані вирази (34) і (37), дає розподіл поля директора над порогом орієнтаційної нестійкості. На рис. 2 наведено залежність цього розподілу в центрі комірки для декількох значень відношення L/d . При розрахунках покладалося $\varepsilon = 100$, $v = 0,1$ і $E_0 = 1,01E_{0th}$.

Оскільки функція $\theta_0(z)$ в розв'язку $\theta(y, z)$ (21) неявно (через θ_{0m} (36)) залежить від параметра неоднорідності v , її не можна розглядати як таку, що відповідає однорідній скінченній енергії зчеплення W_0 . І лише в граничному випадку $v \rightarrow 0$ функція $\theta_0(z)$ описує поле директора при $W(y) = W_0$. Зазначимо також, що функція $\theta_0(z)$ не залежить від величини відношення L/d при будь-яких значеннях параметра v і має вигляд, наведений на рис. 3,а.

Амплітуда $\theta_1(z)$ (34) просторово періодичної структури директора, що виникає вздовж осі Oy , лінійна по параметру неоднорідності v енергії зчеплення та істотно залежить (через параметр ξ_k) від величини параметра L/d (відношення товщини комірки до періода енергії зчеплення). На рис. 3,б наведено розрахункові залежності $\theta_1(z)$ для різних значень цього параметра. Як видно з рисунка, зі зменшенням величини відношення L/d абсолютне значення θ_1 монотонно зростає. Найбільш істотна залежність θ_1 від параметра L/d має місце при малих значеннях цього параметра.

Автори висловлюють подяку І.П. Пінкевичу за корисні зауваження під час обговорення результатів роботи.

1. П. де Жен, *Физика жидких кристаллов* (Мир, Москва, 1977).
2. Л.М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов* (Наука, Москва, 1978).
3. А.С. Сонин, *Введение в физику жидких кристаллов* (Наука, Москва, 1983).
4. Ю.П. Бобылев, С.А. Пикин, *ЖЭТФ* **72**, 369 (1977).
5. Y.P. Bobylev, V.G. Chigrinov, and S.A. Pikin, *J. Phys. Collod.* **40**, 331 (1979).
6. М.Ф. Ледней, И.П. Пинкевич, *ЖЭТФ* **127**, 898 (2005).
7. В.П. Романов, Г.К. Складенко, *ЖЭТФ* **116**, 543 (1999).
8. М.Ф. Ледней, *Кристаллография* **51**, 705 (2006).
9. F. Lonberg and R.B. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 718 (1985).
10. E. Miraldi, C. Oldano, and A. Strigazzi, *Phys. Rev. A* **34**, 4348 (1986).
11. C. Oldano, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1098 (1986).
12. D. Krzyzanski and G. Derfel, *Phys. Rev. E* **61**, 6663 (2000).
13. М.Ф. Ледней, И.П. Пинкевич, *УФЖ* **51**, 367 (2006).
14. М.Ф. Ледней, И.П. Пинкевич, В.Ю. Решетняк, *ЖЭТФ* **107**, 1921 (1995).
15. М.Ф. Ледней, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 407 (2007).
16. V.M. Pergamenshchik, *Phys. Rev. E* **61**, 3936 (2000).
17. A.L. Alexe-Ionescu, G. Barbero, and I. Lelidis, *Phys. Rev. E* **66**, 061705 (2002).
18. G. Barbero, L.R. Evangelista, and I. Lelidis, *Phys. Rev. E* **67**, 051708 (2003).
19. G. Barbero, G. Skačej, A.L. Alexe-Ionescu, and S. Žumer, *Phys. Rev. E* **60**, 628 (1999).
20. T.J. Atherton and J.R. Sambles, *Phys. Rev. E* **74**, 022701 (2006).
21. N. Sato and K. Okumura, *Chem. Phys. Lett.* **453**, 274 (2008).
22. A. Poniewierski and S. Kondrat, *J. Mol. Liq.* **112**, 61 (2004).
23. F. Karimi Pour Haddadan and S. Dietrich, *Phys. Rev. E* **73**, 051708 (2006).
24. C. Anquetil-Deck and D.J. Cleaver, *Phys. Rev. E* **82**, 031709 (2010).
25. A. Rapini and M. Papolar, *J. Phys. Collod.* **30**, 54 (1969).
26. H. Gruler, T.J. Scheffer, and G. Meier, *Z. Naturforsch.* **27a**, 966 (1972).

Одержано 22.02.11

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД ФРЕДЕРИКСА В НЕМАТИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОЛЯРНОЙ ЭНЕРГИЕЙ СЦЕПЛЕНИЯ

М.Ф. Ледней, А.С. Тарнавский

Резюме

Теоретически исследована пороговая переориентация директора внешним постоянным электрическим полем в планарной ячейке нематического жидкого кристалла с периодической энергией сцепления директора с поверхностью ячейки. Найдено значение порога и запороговое пространственное распределение директора в зависимости от периода и величины энергии сцепления. Показано, что значение порога немонотонно зависит от числа s периодов энергии сцепления, укладывающихся на длину ячейки. Запороговое распределение директора при целых значениях s отслеживает периодическое изменение энергии сцепления. Амплитуда периодического отклонения директора растет с уменьшением отношения толщины ячейки к периоду энергии сцепления.

ELECTRICAL FRIEDERICKSZ TRANSITION
IN A NEMATIC CELL WITH PERIODIC
POLAR ANCHORING ENERGY

M.F. Ledney, O.S. Tarnavskyy

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Physics
(4, Academician Glushkov Ave., Kyiv 03127, Ukraine;
e-mail: Ledney@univ.kiev.ua)

S u m m a r y

The threshold value for the electrical Friedericksz transition in a nematic liquid crystal cell with the periodic energy of director

anchoring with the cell surface has been derived, and the above-threshold spatial distribution of the director in the applied electric field has been determined. The threshold value was shown to depend nonmonotonously on the number s of anchoring energy periods across the cell length. The above-threshold distribution of the director at integer s traces a periodic variation of the anchoring energy. The amplitude of the director's periodic deviation grows with the reduction of the ratio between the cell thickness and the anchoring energy period.