

МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ОПИСУ НЕПРУЖНОГО РОЗСІЯННЯ АДРОНІВ І НОВІ МЕХАНІЗМИ ЗРОСТАННЯ ПЕРЕРІЗІВ

І.В. ШАРФ, А.В. ТИХОНОВ, Г.О. СОХРАННИЙ, К.В. ЯТКІН, М.А. ДЕЛІЄРГІЄВ, Н.О. ПОДОЛЯН, В.Д. РУСОВ

УДК 539.12
©2011

Одеський національний політехнічний університет
(Проп. Шевченка, 1, Одеса 650044)

Показано, що існують типи фейнманівських діаграм, для розрахунку яких можна застосувати метод Лапласа, що дозволяє виявити нові механізми зростання перерізів розсіяння, які не враховуються реджіонною теорією внаслідок нехтування залежністю амплітуди розсіяння від поздовжніх компонент імпульсів вторинних частинок у системі центра мас вихідних частинок. У межах мультипериферичної моделі отримано залежність повного перерізу розсіяння від енергії, яка на якісному рівні збігається з експериментальною залежністю.

на” амплітуда пружного розсіяння може бути достатньо простою функцією від своїх аргументів.

Але ці міркування матимуть сенс лише у випадку, коли достатньо ефективний метод опису непружних процесів. Саме обговорення такого метода і є метою цієї роботи.

Типовий процес непружного розсіяння при релятивістських енергіях полягає в тому, що ми маємо зіткнення двох потоків частинок з чотириімпульсами, відповідно P_1 і P_2 , і в результаті цього зіткнення, крім первинних частинок, які матимуть вже інші чотириімпульси P_3 і P_4 , утворюються ще n вторинних частинок з чотириімпульсами p_1, p_2, \dots, p_n . Загальна діаграма цього процесу показана на рис. 1, а його переріз виражається співвідношенням (1):

1. Вступ

Під час розгляду розсіяння адронів при високих енергіях основну увагу приділено пружному розсіянню. Вважається, що задача опису пружного розсіяння є простішою, ніж опис непружних процесів. Тому можна спробувати спочатку розрахувати амплітуду пружного розсіяння, а потім шляхом розгляду її уявної частини визначити внески різних непружних процесів [1, 2].

Однак, на нашу думку, розгляд безпосередньо непружних процесів є більш доцільним. По-перше, тому що такі процеси несуть більшу інформацію про властивості частинок, що зтикаються, бо те, що при пружних процесах залишається прихованим у характеристиках віртуальних частинок, при непружних процесах проявляється в характеристиках реальних частинок, які безпосередньо спостерігаються. Крім того, якщо за рахунок умови унітарності амплітуда пружного процесу містить інформацію про всі процеси, що відбуваються при розсіянні, навряд чи “правиль-

$$\sigma_n = \frac{(2\pi)^4}{4n!I} \int \frac{d\mathbf{P}_3}{2P_{30}(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{P}_4}{2P_{40}(2\pi)^3} \prod_{k=1}^n \frac{d\mathbf{p}_k}{2p_{0k}(2\pi)^3} \times$$

$$\times |T(n, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)|^2 \times$$

$$\times \delta \left(P_3 + P_4 + \sum_{k=1}^n p_k - P_1 - P_2 \right), \tag{1}$$

де M_1 і M_2 – маси первинних частинок, що зіткнулися; P_1 і P_2 – їх чотириімпульси; $I = \sqrt{(P_1 P_2)^2 - (M_1 M_2)^2}$ – інваріантний потік.

Вважається, що частинки з чотириімпульсами P_3 і P_4 тих же сортів, що і відповідно P_1 і P_2 , а n вторинних частинок з чотириімпульсами p_1, p_2, \dots, p_n є тотожними між собою. Через

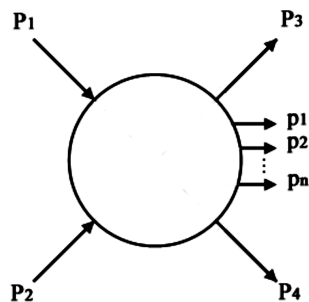


Рис. 1. Загальна діаграма непружного розсіяння

$T(n, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$ позначено амплітуду розсіяння, що відповідає непружному процесу, який наведено на рис. 1, а через δ – чотиривимірну δ -функцію Дірака, яка виражає закони збереження енергії і трьох компонент імпульсу.

Розрахунок багатовимірного інтеграла (1) є складною задачею. Втім, вона може бути спрощена у випадку, коли модуль амплітуди розсіяння має точку умовного максимуму за умов, які накладає на аргументи цієї амплітуди наявність δ -функції під інтегралом (1), а також умов масової поверхні для всіх реальних частинок. Тоді для розрахунку інтеграла можна застосувати відомий метод Лапласа [3]. Подаючи квадрат модуля амплітуди розсіяння в (1) у вигляді $|T|^2 = \exp(\ln(|T|^2))$, можна розкласти показник експоненти у ряд Тейлора в околі точки умовного максимуму, обмежуючись квадратичними доданками. Після цього отримуємо гаусівський інтеграл, розрахунок якого зводиться до обчислення визначника матриці других похідних від $\ln(|T|^2)$.

У цій роботі розглянуто декілька типів фейнманівських діаграм, яким відповідають амплітуди розсіяння, що дозволяють реалізувати розрахунок методом Лапласа. Використання цього методу для мультипериферичної моделі дозволило виявити нові механізми зростання перерізів [4, 5] і відтворити залежність повного перерізу від енергії, яка якісно збігається з експериментальною. В той же час використання методу Лапласа дозволяє вийти за межі суто мультипериферичної моделі і проаналізувати деякі типи немультіпериферичних діаграм непружного розсіяння, які будуть розглянуті нижче.

Маючи на меті отримати спочатку найбільш просту для аналізу модель, первинні і вторинні адрони, а також віртуальні частинки, будемо розглядати як кванти ефективних скалярних взаємодіючих та самодіючих полів.

Крім цього, для спрощення задачі будемо розглядати зіткнення первинних частинок однієї маси, тобто

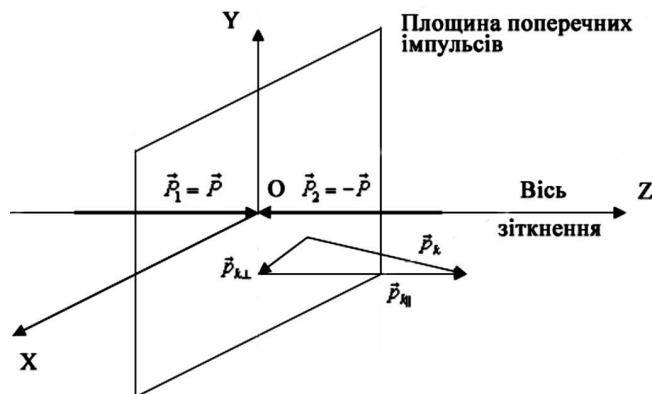


Рис. 2. Розклад тривимірних імпульсів вторинних частинок на поздовжні і поперечні компоненти відносно осі зіткнення в системі центра мас вихідних частинок із тривимірними імпульсами \mathbf{P}_1 і \mathbf{P}_2

$M_1 = M_2 = M$. При числових розрахунках за M брали масу протона, а m – маса 0,139 GeV, що приблизно дорівнює масі піона. При проведенні числових і аналітичних розрахунків всі величини обезрозмірювалися на масу вторинної частинки m , тому у всіх подальших розрахунках цю масу покладають рівною 1.

Таким чином, метою цієї роботи є доведення можливості застосування методу Лапласа для деяких типів фейнманівських діаграм, а також демонстрація можливостей самого методу для розрахунку цих діаграм.

2. Виділення незалежних аргументів амплітуди розсіяння

Враховуючи те, що переріз розсіяння є лоренц-інваріантною величиною, для його розрахунку можна використати будь-яку інерційну систему відліку. Найбільш зручною для розрахунків є система центра мас вихідних частинок, в якій імпульси цих частинок рівні за величиною і протилежні за напрямком, як це зображено на рис. 2.

У цій системі відліку маємо вісь зіткнення (рис. 2), уздовж якої спрямовано імпульси вихідних частинок. Всі тривимірні імпульси зручно розкласти на складові: поздовжню до осі $p_{k\parallel}$ і перпендикулярну до осі $\mathbf{p}_{k\perp}$ (тобто складову уздовж площини поперечних імпульсів на рис. 2). Традиційно позначимо сумарну енергію первинних частинок в їх системі центра мас через \sqrt{s} і виберемо координатні осі так, як показано на рис. 2.

Рівняння, що виражають закон збереження енергії-імпульсу, є рівняннями зв'язку на аргументи амплітуди розсіяння. Нашою метою є виразити з цієї си-

стеми рівнянь деякі чотири змінні через решту $3n + 2$ незалежних змінних. Для цього зручно ввести нові змінні:

$$P_{\parallel}^s = \frac{P_{3\parallel} + P_{4\parallel}}{2}, \quad P_{\parallel}^a = \frac{P_{3\parallel} - P_{4\parallel}}{2},$$

$$P_{\perp x}^s = \frac{P_{3\perp x} + P_{4\perp x}}{2}, \quad P_{\perp x}^a = \frac{P_{3\perp x} - P_{4\perp x}}{2},$$

$$P_{\perp y}^s = \frac{P_{3\perp y} + P_{4\perp y}}{2}, \quad P_{\perp y}^a = \frac{P_{3\perp y} - P_{4\perp y}}{2}. \quad (2)$$

Крім того, замість поздовжніх до осі зіткнення компонент імпульсу p_{kz} , зручно ввести бистроти y_k за допомогою співвідношення

$$p_{kz} = m_{\perp}(\mathbf{p}_{k\perp}) \operatorname{sh}(y_k), \quad (3)$$

де $m_{\perp}(\mathbf{p}_{k\perp}) = \sqrt{1 + (p_{k\perp x})^2 + (p_{k\perp y})^2}$.

Після того, як $3n + 2$ незалежних змінних зручно вибрати: n бистрот вторинних частинок y_1, y_2, \dots, y_n , n компонент поперечних імпульсів вторинних частинок уздовж осі x ($p_{k\perp x}, k = 1, 2, \dots, n$), n аналогічних компонент уздовж осі y ($p_{k\perp y}, k = 1, 2, \dots, n$), а також $P_{\perp x}^a$ і $P_{\perp y}^a$.

Змінні $P_{\parallel}^s, P_{\perp x}^s$ і $P_{\perp y}^s$ можуть бути легко виражені через вибрані незалежні змінні з законів збереження компонент імпульсу. Після цього закон збереження енергії можна розглядати як рівняння відносно P_{\parallel}^a . Воно має два розв'язки:

$$P_{\parallel}^a = \frac{f_1 P_{P\parallel} \pm \frac{E_P}{2} \sqrt{(f_1)^2 + f_2(f_2 - f_3)}}{f_2},$$

$$f_1 = P_x P_{\perp x}^a + P_y P_{\perp y}^a, \quad f_2 = \frac{(E_P)^2}{4} - (P_{P\parallel})^2,$$

$$f_3 = M^2 + (P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_{\perp x}^a)^2 + (P_{\perp y}^a)^2, \quad (4)$$

де введено такі позначення:

$$E_P = \sqrt{s} - \sum_{k=1}^n m_{\perp}(\mathbf{p}_{k\perp}) \operatorname{ch}(y_k),$$

$$P_x = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_{k\perp x}, \quad P_y = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_{k\perp y},$$

$$P_{P\parallel} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_{\perp}(\mathbf{p}_{k\perp}) \operatorname{sh}(y_k). \quad (5)$$

З симетрії задачі ясно, якщо модуль амплітуди розсіяння має максимум, то в системі центра мас він має досягти при нульових значеннях поперечних імпульсів всіх частинок. Дійсно, якщо максимум досягався б при ненульовому значенні вектора поперечного імпульсу якоїсь частинки, то цей вектор виділяв би у площині поперечних імпульсів деякий напрямок. Але всі напрямки в цій площині (рис. 2) є фізично рівноправними.

З виразів (4) видно, що при нульових поперечних імпульсах знак величини P_{\parallel}^a збігається з тим, що вибирається перед коренем в (4). Враховуючи те, що на діаграмі на рис. 1 частинка з імпульсом \mathbf{P}_3 утворюється з вихідної частинки \mathbf{P}_1 з додатним значенням поздовжнього імпульсу, а частинка з імпульсом \mathbf{P}_4 утворюється з \mathbf{P}_2 , що має від'ємне значення поздовжнього імпульсу, приходимо до висновку, що найбільш імовірною є конфігурація імпульсів, коли $P_{3\parallel} > 0, P_{4\parallel} < 0$. З (2) видно, що для найбільш імовірної конфігурації імпульсів $P_{\parallel}^a > 0$. Тому далі в (4) наберемо знак "плюс".

Таким чином, внаслідок закону збереження енергії-імпульсу маємо такі зв'язки між змінними:

$$P_{3\parallel} = P_{\parallel}^a + P_{\parallel}^s,$$

$$P_{\perp x}^s = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_{k\perp x}, \quad P_{\perp y}^s = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_{k\perp y}, \quad (6)$$

де $P_{\parallel}^s = -((1/2) \sum_{k=1}^n m_{\perp}(\mathbf{p}_{k\perp}) \operatorname{sh}(y_k))$, що впливає з закону збереження поздовжньої компоненти імпульсу.

3. Метод Лапласа для діаграм мультипериферичної моделі

Мультипериферичну модель [6] розглядали у фізиці високих енергій впродовж довгого часу. Але застосування методу Лапласа для розрахунку перерізів розсіяння в цій моделі дозволяє виявити нові її особливості, які можуть виявитися корисними для опису експерименту. Типову діаграму цієї моделі наведено на рис. 3.

Такі діаграми виникають у моделі, де первинні і вторинні частинки розглядають як кванти двох взаємодіючих дійсних скалярних полів: $\Phi(x)$ з масою M

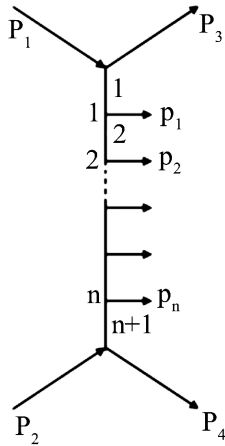


Рис. 3. Типова діаграма мультипериферичної моделі (цифри ліворуч – номери вершин діаграми, цифри праворуч – номери віртуальних ліній)

(його кванти розглядають як модель первинних частинок) і $\varphi(x)$ з масою m . Лагранжіан моделі має вигляд

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} (g^{ab} \Phi_{,a} \Phi_{,b} - M^2 \Phi^2) + \frac{1}{2} (g^{ab} \varphi_{,a} \varphi_{,b} - m^2 \varphi^2) + g \Phi^2 \varphi + \lambda \varphi^3, \quad (7)$$

де g^{ab} – компоненти тензора Мінковського, g і λ – константи зв'язку.

Парціальний переріз (1) може бути подано у вигляді [5]:

$$\sigma_n(\sqrt{s}) = \frac{(2\pi)^2 g^4}{16m^2} \left(\frac{\lambda^2}{2(2\pi)^3} \right)^n \sigma'_n(\sqrt{s}), \quad (8)$$

де функція $\sigma'_n(\sqrt{s})$, звільнена від несуттєвих констант, визначає залежність перерізу від енергії \sqrt{s} .

Амплітуда розсіяння, що відповідає діаграмі на рис. 3, з точністю до несуттєвого для задачі на максимум постійного множника (який відрізняє величину A від розглянутої вище величини T), має вигляд

$$A = \prod_{l=1}^{n+1} (1 - (k_l)^2 - i\epsilon)^{-1}, \quad (9)$$

де $k_1 = P_1 - P_3$, $k_2 = P_1 - P_3 - p_1, \dots, k_{n+1} = P_1 - P_3 - \sum_{j=1}^n p_j$. Тут $(k_l)^2$ означають скалярні квадрати відповідних чотиривекторів у просторі Мінковського, а величина ϵ , яка відповідає за правильний обхід полюсів, повинна бути наближеною до нуля після виконання всіх обчислень. Крім того, вважаємо,

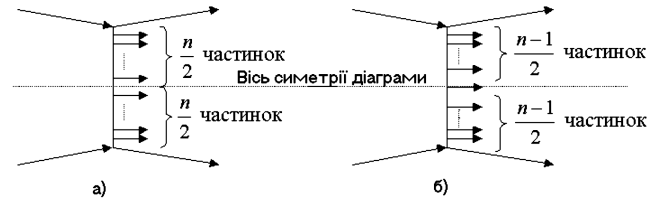


Рис. 4. Горизонтальна вісь симетрії мультипериферичної діаграми для парної (а) і непарної (б) кількості вторинних частинок

що відповідні компоненти чотиривектора P_3 , виражені через незалежні змінні співвідношеннями (6). Нагадаємо, що всі величини безрозмірені на масу вторинної частинки m .

Можна довести, що всі величини $(k_l)^2$ (далі будемо називати їх віртуальностями) у фізичній області процесу, що розглядається, є від'ємними (детальний доказ наведено в [4]). Тому амплітуда (7) не містить полюсів в області, по якій ми збираємося здійснити інтегрування (1). Це дає змогу наблизити величини ϵ до нуля ще до початку подальших розрахунків. Після цього, як видно з (9), амплітуда розсіяння набуватиме лише дійсні додатні значення. Тому замість подальшого дослідження на максимум квадрата модуля функції (9) можна досліджувати на максимум саму цю функцію.

Як видно з (3), (4) і (9), внаслідок того, що в системі центра мас $\mathbf{P}_{1\perp} = 0$ всі поперечні компоненти імпульсів входять до виразу для амплітуди розсіяння лише у вигляді квадратичних і білінійних комбінацій. Звідси випливає, що при нульових значеннях всіх поперечних компонент імпульсів ми матимемо принаймні стаціонарну точку амплітуди розсіяння. Якщо ж врахувати ще й наведені в попередньому розділі міркування симетрії, то подальший пошук максимуму можна вести не для самої амплітуди (9), а для її звуження, яке можна отримати, поклавши в (3)–(6) і (9) всі поперечні компоненти імпульсів рівними нулю. Це звуження, яке залишається функцією лише від кількості вторинних частинок та їх бистрот, позначатимемо далі як $A_{\parallel}(n, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Врахуємо, що діаграми мультипериферичної моделі мають горизонтальну вісь симетрії (рис. 4).

У роботі [4] показано, що якщо у вираз для звуження $A_{\parallel}(n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ одночасно підставити замість $y_1 - (-y_n)$, замість $y_2 - (-y_{n-1})$ і т. д., тобто бистроту кожної частинки замінити на бистроту частинки, що симетрична відносно осі симетрії, із протилежним знаком, то при такій заміні цей вираз переходить сам у себе. Це є наслідком симетрії процесу щодо дзеркального відображення відносно площини

ни поперечних імпульсів на рис. 2. У [4] доведено, що наслідком цієї симетрії є те, що в точці максимуму швидкості частинок, що приєднуються до діаграми симетрично відносно осі на рис. 4, повинні набувати взаємно протилежних значень, а у випадку непарної кількості частинок швидкість частинки, що належить осі симетрії (рис. 4,б) повинна дорівнювати нулю. Показавши в виразі для $A_{||}(n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ швидкості нижньої частини діаграми на рис. 4 рівні відповідним швидкостям частинок верхньої половини, взятим із знаком "мінус", і швидкості частинки, що належить осі симетрії, рівною нулю, отримуємо подальше звуження амплітуди розсіяння. Це звуження буде функцією лише швидкостей частинок, розташованих вище осі симетрії (рис. 4). Позначимо його як A_0 .

У випадку парної кількості частинок [4] маємо

$$A_0 = \left(\prod_{j=1}^{n/2} \left(1 - (E_j)^2 + (P_{||j})^2 \right)^{-2} \right) \times \left(1 + (P_{||n/2+1})^2 \right)^{-1}. \quad (10)$$

Тут енергія, що переноситься по лінії з номером j (рис. 3), така:

$$E_j = \sum_{k=j}^{n/2} \text{ch}(y_k), \quad (11)$$

якщо $j = 1, 2, \dots, n/2$, і $E_{n/2} = 0$, а поздовжня компонента імпульсу

$$P_{||j} = P_{1||} - P_{3||} - \sum_{k=1}^{j-1} \text{sh}(y_k) \quad (12)$$

для $j = 2, 3, \dots, n/2 + 1$, і $P_{||1} = P_{1||} - P_{3||}$. При цьому введено позначення

$$P_{1||} = \sqrt{(s/4) - M^2}, \quad (13)$$

символом $P_{3||}$ позначено вираз

$$P_{3||} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{s}}{2} - E_1 \right)^2 - M^2}, \quad (14)$$

що утворюється з (4) при урахуванні всіх властивостей симетрії (зауважимо, що з цих властивостей випливає, що $P_{||}^s = 0$, і тому $P_{3||} = P_{||}^a$). Звернемо увагу на різницю змісту позначень $P_{1||}$ і $P_{||1}$. Перше з них

позначає паралельну осі зіткнення (рис. 2) компоненту імпульсу первинної частинки 1, а друге – паралельну компоненту імпульсу, що переноситься уздовж віртуальної лінії 1 на рис. 3.

У випадку непарної кількості частинок маємо

$$A_0 = \prod_{j=1}^{(n+1)/2} \left(1 - (E_j)^2 + (P_{||j})^2 \right)^{-2}, \quad (15)$$

де

$$E_j = (1/2) + \sum_{k=j}^{(n-1)/2} \text{ch}(y_k) \quad (16)$$

для $j = 1, 2, \dots, n-1$; $E_{(n+1)/2} = 1/2$; $P_{||j}$ для $j = 1, 2, \dots, (n+1)/2$ визначаються тими ж співвідношеннями (12), що й у випадку непарної кількості частинок. При цьому $P_{1||}$ і $P_{3||}$ виражаються тими самими співвідношеннями (13) і (14), що й у випадку парної кількості частинок, але з E_1 , що визначається співвідношенням (16). Враховуючи те, що всі обчислення аналогічні для випадків парної і непарної кількості вторинних частинок, розглянемо докладно тільки випадок парних n , а для випадку непарних лише наведемо відповідні результати.

Оскільки функція (10) є добутком додатних дробів, зручно шукати точку максимуму не її, а її логарифма, який позначимо як $L(n, y_1, y_2, \dots, y_{(n/2)})$. Тоді система рівнянь для знаходження стаціонарної точки функції L може бути наведена у вигляді (введемо позначення $Z_j = 1 - (E_j)^2 + (P_{||j})^2$):

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{\partial L}{\partial E_1} \text{sh}(y_1) + 4 \text{ch}(y_1) \sum_{j=2}^{n/2} \frac{P_{||1}(E_1) - \sum_{k=1}^{j-1} \text{sh}(y_k)}{Z_j} + 2 \text{ch}(y_1) \frac{P_{||1}(E_1) - \sum_{k=1}^{n/2} \text{sh}(y_k)}{Z_{(n/2)+1}} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_l} = \frac{\partial L}{\partial E_1} \text{sh}(y_l) + 4 \text{sh}(y_l) \sum_{j=2}^{n/2} \frac{\sum_{k=j}^{n/2} \text{ch}(y_k)}{Z_j} +$$

$$+ 4 \text{ch}(y_l) \sum_{j=l+1}^{n/2} \frac{P_{||1}(E_1) - \sum_{k=1}^{j-1} \text{sh}(y_k)}{Z_j} +$$

$$+2\text{ch}(y_l) \frac{P_{||1}(E_1) - \sum_{k=1}^{n/2} \text{ch}(y_k)}{Z_{(n/2)} + 1} = 0,$$

$$l = 2, 3, \dots, (n/2) - 1, \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{n/2}} = \frac{\partial L}{\partial E} \text{sh}(y_{n/2}) + 4\text{sh}(y_{n/2}) \sum_{j=2}^{n/2} \frac{\sum_{k=j}^{n/2} \text{ch}(y_k)}{Z_j} +$$

$$+2\text{ch}(y_{n/2}) \frac{P_{||1}(E_1) - \sum_{k=1}^{n/2} \text{sh}(y_k)}{Z_{(n/2)+1}} = 0. \tag{19}$$

Для подальшого спрощення системи рівнянь (17)–(19) можна використати такі міркування. Внаслідок від’ємності віртуальностей $(k_j)^2$ і виразу (9) видно, що всі фейнманівські знаменники Z_j є більшими за одиницю. Крім того, всі ці знаменники входять до системи (17)–(19) у вигляді $1/Z_j$. Але функція $f(x) = 1/x$ при $x > 1$ має малу похідну, тобто змінюється повільно. Це дозволяє використати для розв’язку системи рівнянь (17)–(19) наближення, в якому всі величини $1/Z_j$, що входять до цієї системи рівнянь, покладаються рівними між собою. До того ж, при граничному значенні $\sqrt{s} = 2M + n$ маємо $|(k_j)^2| = n(j-1) + (j-1)^2 + Mn$. Коли n невеликі, ця величина набуває великих значень, тому для не дуже великих енергій маємо співвідношення $Z_j \gg 1$, що ще більше сприяє використанню наближення рівних $1/Z_j$. Числовий розрахунок показує, що це наближення можна застосовувати і при великих енергіях, бо віртуальності стають малими і осі Z_j близькими до 1, внаслідок чого, знов $1/Z_j$ приблизно рівні.

У роботі [4] показано, що в цьому наближенні рівних $1/Z_j$ система трансцендентних рівнянь (17)–(19) може бути розв’язана аналітично, і цей розв’язок має такий вигляд. Якщо позначити значення бистрот, що утворюють розв’язок $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_{n/2}^{(0)}$, то всі ці бистроти виражаються через $y_{n/2}^{(0)}$ співвідношенням

$$y_k^{(0)} = \left(2 \left(\frac{n}{2} - k\right) + 1\right) y_{n/2}^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

З аналогічних міркувань для непарної кількості частинок отримуємо [4]:

$$y_k^{(0)} = \left(\frac{n-1}{2} - k + 1\right) y_{(n-1)/2}^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{21}$$

Величини $y_{n/2}^{(0)}$ в (20) і $y_{(n-1)/2}^{(0)}$ в (21) можуть бути виражені через розв’язок Δy трансцендентного рівняння

$$\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{\text{sh}((n/2)\Delta y)}{2\text{sh}((1/2)\Delta y)} = M \text{ch}\left(\frac{n+1}{2}\Delta y\right). \tag{22}$$

При цьому $y_{n/2}^{(0)} = \Delta y/2$, а $y_{(n-1)/2}^{(0)} = \Delta y$.

Звернемо увагу ще на те, що у співвідношеннях (20) і (21) враховано властивості симетрії значень бистрот у точці максимуму, тому ці формули виражають значення бистрот не тільки для вершин, розташованих вище осі симетрії, а для всіх вершин діаграми на рис. 3.

Поблизу порога утворення n частинок розв’язок рівняння (22) має вигляд

$$\Delta y = \frac{2}{n+1} \text{acosh}\left(\frac{\sqrt{s}-n}{2M}\right). \tag{23}$$

З (23) видно, що величина Δy має порогову точку розгалуження при $\sqrt{s} = 2M + n$. Якщо методом Лапласа розрахувати внесок непружного процесу, що розглядається, в уявну частину амплітуди пружного розсіяння, то через Δy ця порогова точка розгалуження увійде до виразу для цієї амплітуди пружного розсіяння, як того вимагає умова унітарності. Зауважимо, що якщо внесок мультипериферичних діаграм в уявну частину амплітуди пружного розсіяння розраховувати звичними методами, тобто без використання методу Лапласа [7, 8], то отримаємо залежність характерну для реджійної теорії, яка не містить подібних точок розгалуження.

Для знаходження величини Δy для енергій не близьких до порогової, зауважимо таке. Величина $(\text{sh}((n/2)\Delta y))/\text{sh}((1/2)\Delta y)$, що входить до (22), має зміст повної енергії, яка виноситься вторинними частинками. Величина $2M \text{ch}(((n+1)/2)\Delta y)$ є енергією, що виноситься частинками P_3 і P_4 . Як видно з цих виразів, при невеликих енергіях (і, відповідно, Δy) основна доля енергії уноситься саме частинками P_3 і P_4 . Це означає, що бистрота $((n+1)/2)\Delta y$ частинки P_3 повинна мало відрізнятися від бистроти (позначимо її Y^*) первинної частинки P_1 . Тоді, якщо ввести замість Δy нову змінну

$$\delta_y = Y^* - (n+1)(\Delta y/2), \tag{24}$$

то для розв’язку трансцендентного рівняння (22) можна використати її малість. Це приводить до такого приблизного результату:

$$\delta_y \approx \left(M \left(\left(\frac{\sqrt{s}}{M}\right)^{2/(n+1)} - 1\right)\right)^{-1}. \tag{25}$$

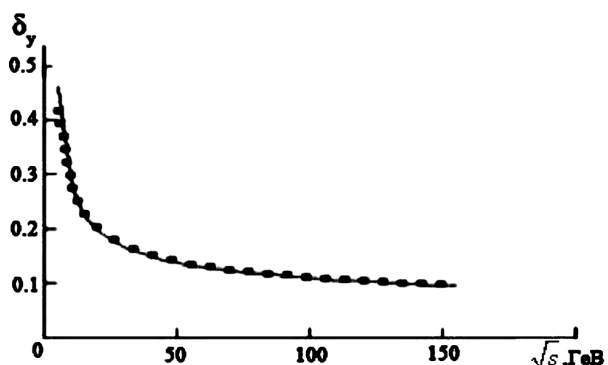


Рис. 5. Наближений розв'язок (25) (пунктир) і результат числового розв'язку рівняння (22) (суцільна лінія) при $n = 10$

Те, що наближення (25) є задовільним, видно з рис. 5, де наведено його порівняння з результатом “точного” числового розв'язку рівняння (22).

Усі наведені результати щодо існування максимуму амплітуди розсіяння та його властивостей чисельно перевірено в [4]. Крім того, в [5] на підставі результатів чисельних розрахунків показано, що максимум є достатньо “гострим”, щоб можна було застосовувати метод Лапласа.

За допомогою наведених результатів можна продемонструвати найбільш важливу властивість точки максимуму мультипериферичної моделі. Ця властивість полягає в тому, що розраховані при значеннях змінних, що відповідають точці максимуму, абсолютні величини віртуальностей $|(k_l)^2|$ спадають зі зростанням енергії \sqrt{s} . Як показує числовий розрахунок [4], абсолютні величини віртуальностей зростають від мінімального значення (будемо його позначати v_{\min}), що досягається на 1 та $n + 1$ лініях діаграми, наведеної на рис. 3, до максимального значення (v_{\max}), що досягається на лінії, яка перетинається віссю симетрії у випадку парної кількості частинок (рис. 4,а) або на двох лініях, що дотикаються осі на рис. 4,б, у випадку непарної кількості частинок. Розрахунок величин v_{\min} і v_{\max} з урахуванням (20) або (21), а також (24) і (25) приводить до таких наближених результатів:

$$v_{\min} = \left(\left(\frac{\sqrt{s}}{M} \right)^{2/(n+1)} - 1 \right)^{-2},$$

$$v_{\max} = \left(\left(\frac{\sqrt{s}}{M} \right)^{1/(n+1)} - \left(\frac{\sqrt{s}}{M} \right)^{-1/(n+1)} \right)^{-2}. \quad (26)$$

Спадання абсолютних величин віртуальностей з енергією, яке видно зі співвідношень (26), підтвер-

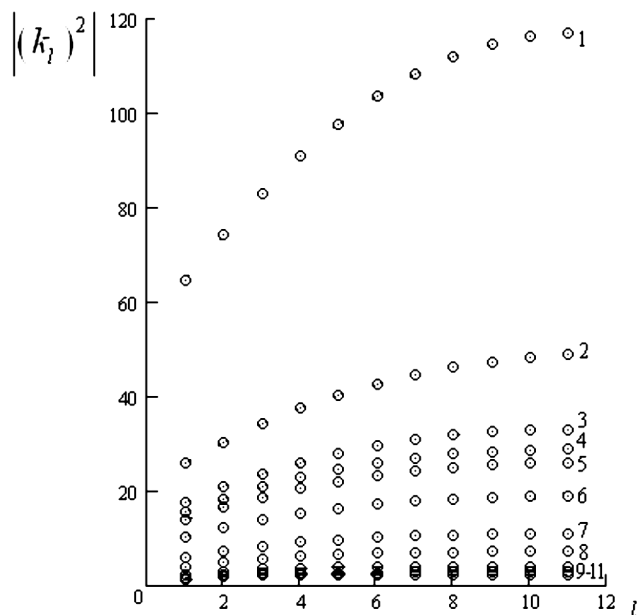


Рис. 6. Залежність від \sqrt{s} абсолютних величин віртуальностей, розрахованих у точці максимуму для $n = 20$. Показані лише віртуальності ліній, розташованих вище осі симетрії діаграми, оскільки віртуальності симетричних ліній однакові. Де лінія 1 відповідає енергії $\sqrt{s} = 5$ GeV, 2 - $\sqrt{s} = 7$ GeV, 3 - $\sqrt{s} = 9$ GeV, 4 - $\sqrt{s} = 10$ GeV, 5 - $\sqrt{s} = 11$ GeV, 6 - $\sqrt{s} = 15$ GeV, 7 - $\sqrt{s} = 30$ GeV, 8 - $\sqrt{s} = 60$ GeV, 9 - $\sqrt{s} = 200$ GeV, 10 - $\sqrt{s} = 546$ GeV, 11 - $\sqrt{s} = 900$ GeV

джується результатами чисельного розрахунку, які наведені на рис. 6.

Це зменшення відповідає новому механізму зростання перерізів розсіяння, який не враховувався при попередніх розрахунках в мультипериферичній моделі. Дійсно, як видно із (9), зменшення абсолютних величин віртуальностей приведе до зростання значення амплітуди розсіяння у точці максимуму зі зростанням \sqrt{s} . Враховуючи наведену вище ідею методу Лапласа, бачимо, що квадрат модуля значення амплітуди в точці максимуму, який зростає, увійде як множник у вираз для парціального перерізу розсіяння з утворенням певної кількості вторинних частинок. Тоді, складаючи парціальні перерізи, можемо отримати і повний переріз, який зростає із енергією як того вимагають експериментальні дані.

Але при перевірці цього, ми стикаємося з необхідністю врахування інтерференційних внесків [9]. Ці внески походять від того, що амплітуда розсіяння в межах мультипериферичної моделі подана не лише діаграмою, зображеною на рис. 3, а сумою $n!$ діаграм такого типу з усіма можливими порядками приєднання ліній вторинних частинок до діаграми. Відповід-

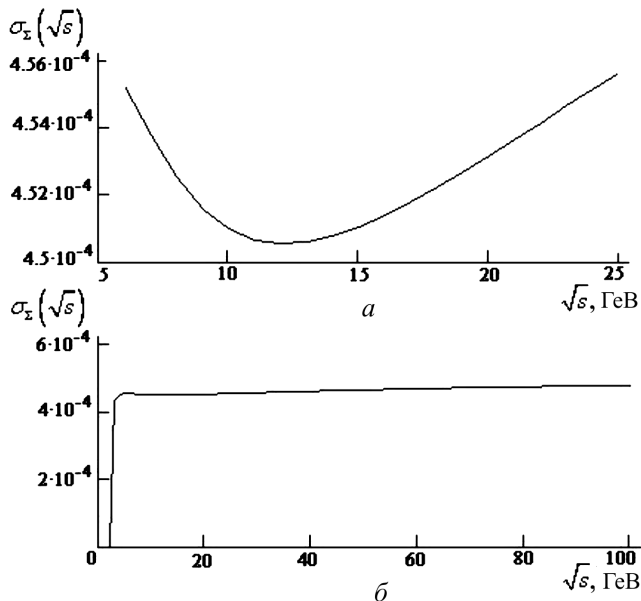


Рис. 7. Залежність $\sigma_{\Sigma}(\sqrt{s})$ від енергії при значеннях підгінної константи $\Lambda = 5,475$ в інтервалі енергій $\sqrt{s} = 7\text{--}25$ GeV (а) і $\sqrt{s} = 1\text{--}100$ GeV (б). Значення підгінної константи вибиралося так, щоб точка мінімуму перерізу приблизно збігалася з тією, що спостерігається в експерименті для протон-протонного розсіяння

но при розрахунку квадрата модуля цієї амплітуди отримаємо велику кількість “перехресних” (інтерференційних) доданків. Інтеграли від них становлять додатні внески в парціальний переріз, які внаслідок їх величезної кількості не можуть не враховуватися, бо, як показано у [5], внесок від квадрата модуля однієї лише діаграми, наведеної на рис. 3, становить дуже малу долю сумарного парціального перерізу. Як показує числовий розрахунок, починаючи від порога утворення n частинок, існує достатньо широкий інтервал енергій, за яких власні значення матриці других похідних від логарифма амплітуди розсіяння по бистротах можна вважати близькими між собою. Для таких енергій у [9] запропоновано приблизний метод врахування інтерференційних внесків у парціальні перерізи.

Якщо розрахувати парціальні перерізи, то можна розглянути величину

$$\sigma_{\Sigma}(\sqrt{s}) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \Lambda^n \sigma'_n(\sqrt{s}), \quad (27)$$

де $\sigma'_n(\sqrt{s})$ визначене у співвідношенні (8) і введено позначення

$$\Lambda = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^3} \quad (28)$$

для безрозмірної константи зв'язку, яка розглядається як підгінний параметр. Крім того, через n_{\max} позначено максимальну кількість вторинних частинок, утворення яких дозволено законом збереження енергії. Величина $\sigma_{\Sigma}(\sqrt{s})$ є аналогом повного перерізу розсіяння в моделі, що розглядається. Як видно з рис. 7, можна задати значення підгінної константи Λ таким, що залежність цієї величини від енергії \sqrt{s} буде мати вигляд аналогічний тому, який спостерігається в експерименті для повного перерізу розсіяння адронів на адронах (рис. 7). На жаль, поки що можна казати лише про якісний збіг з результатами експерименту. Для досягнення кількісного збігу потрібно розглянути, мабуть, більш реалістичну модель, ніж модель взаємодії двох дійсних скалярних полів.

Тим не менш, можна зробити висновок, що механізм зменшення віртуальностей, який зберігатиметься і в більш складних моделях, дійсно може претендувати на роль механізму, відповідального за зростання повного перерізу зі зростанням енергії, яке спостерігається в експерименті.

Виникає питання, чи узгоджується це зростання із обмеженням Фруассара [10]. Як видно зі співвідношень (26) і рис. 6, механізм зменшення віртуальностей із зростанням енергії “вимикається”. Із співвідношень (26) випливає, що це відбувається за умови

$$\sqrt{s} \gg M \exp((n+1) \operatorname{asinh}(1/2)). \quad (29)$$

При цьому вираз для парціального перерізу містить множник [5, 9]: $\left(\sqrt{s} \sqrt{\frac{s}{4} - M^2} \left(\frac{E_P}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{E_P}{2}\right)^2 - M^2}\right)^{-1}$, де E_P визначається співвідношенням (4) при нульових поперечних імпульсах і бистротах (20) або (21). При великих енергіях цей множник поводить як s^{-2} , і згідно з (29) в точці максимуму залежності $\sigma'_n(\sqrt{s})$ для різних n він містить у знаменнику величину $\approx \exp(4(n+1) \operatorname{asinh}(1/2))$. Таким чином, якщо підгінна константа приблизно задовольняє умову

$$\ln(\Lambda) < 4 \operatorname{asinh}(1/2), \quad (30)$$

значення величин $\Lambda^n \sigma'_n(\sqrt{s})$ в точках їх максимумів будуть спадати зі зростанням n . Тоді при достатньо великих енергіях доданки з великими n будуть давати малий внесок у суму (27), а доданки з малими n будуть спадати за рахунок “вимикання” механізму зменшення віртуальностей. У такому випадку сумарний переріз (27) повинен мати асимптотику, що зменшується з енергією.

Як доказ, можемо навести результати, показані на рис. 8, з яких можна зробити висновок, що зростання

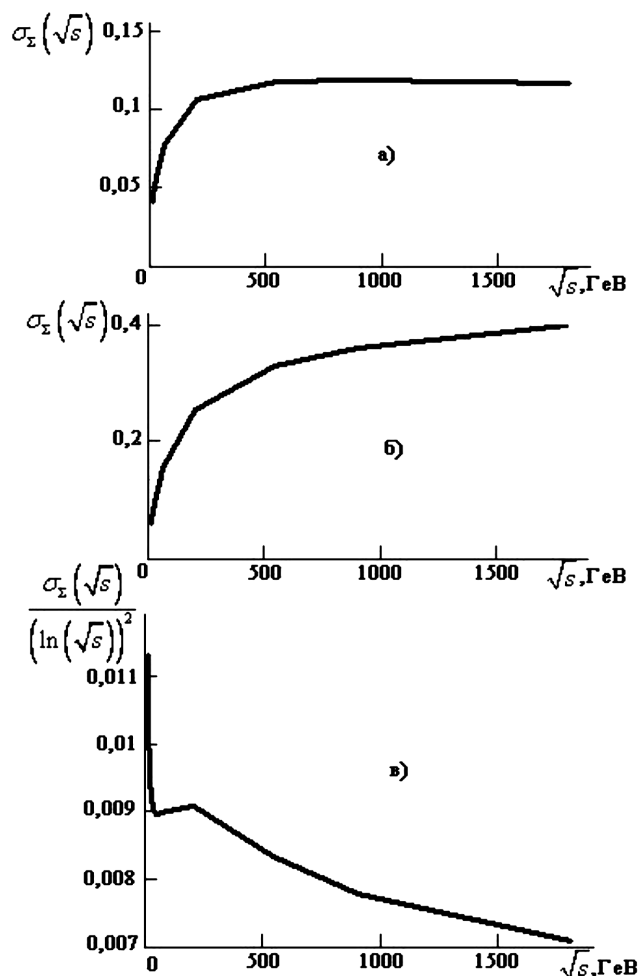


Рис. 8. Розраховані величини (27) в інтервалі енергій $\sqrt{s} = 10\text{--}1800$ GeV з урахуванням інтерференційних внесків методом [9] для різних значень підгінної константи $\Lambda = \exp(3,9 \operatorname{asinh}(\frac{1}{2}))$ (а), $\Lambda = \exp(4,1 \operatorname{asinh}(\frac{1}{2}))$ (б, в) і відношення $\sigma_{\Sigma}(\sqrt{s})/(\ln(s))^2$, збіг якого зі зростанням енергії \sqrt{s} (в) підтверджує виконання обмеження Фруассара

сумарного перерізу за рахунок зменшення віртуальностей може бути узгоджено з обмеженням Фруассара.

Таким чином, розглядаючи мультипериферичну модель за допомогою методу Лапласа, ми отримали результати, які суттєво відрізняються від тих, що були отримані в межах тієї ж моделі іншими методами [6–8]. Тому природно проаналізувати причини такої різниці. Основна причина полягає в тому, що ті наближення, які робилися щоб зробити багатовимірний інтеграл (1) придатним для обчислень, повністю виключали залежність підінтегрального виразу від позовдовжніх відносно осі зіткнення компонент імпульсів

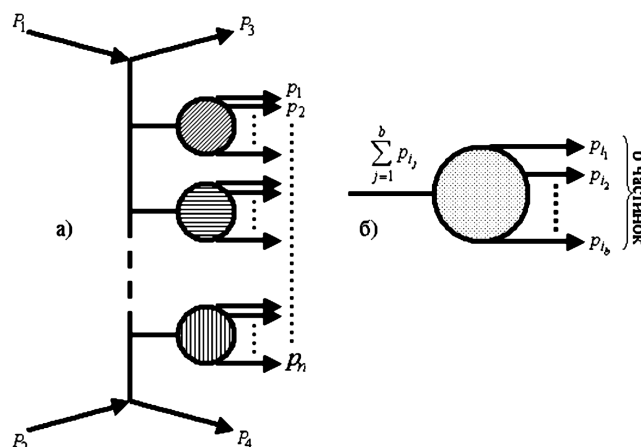


Рис. 9. Діаграма непружного розсіяння з довільними блоками утворення вторинних частинок (а), та її окремий блок (б). Заштрихований блок позначає довільну діаграму з відповідною кількістю зовнішніх ліній. Блоки можуть бути однаковими чи різними між собою, що позначається різною штриховкою

вторинних частинок у системі центра мас. Але, як ми бачили, ця залежність суттєва, бо вона не зводиться до константи, а має максимум. Крім того, зростання величини цього максимуму з енергією \sqrt{s} є наслідком залежності амплітуди розсіяння від бистрот, і його, звичайно, неможливо виявити, якщо знехтувати цією залежністю.

Розглянемо далі деякі інші типи діаграм, для яких можна застосувати метод Лапласа.

4. Деякі типи діаграм, що допускають застосування методу Лапласа

Розглянемо діаграму типу, показаного на рис. 9, а, і окремий блок такої діаграми, рис. 9, б.

Далі ми розглянемо приклади таких окремих блоків (рис. 9, б), яким відповідають аналітичні вирази, що мають таку властивість. Максимальне значення модуля такого виразу досягається не при певних значеннях чотириімпульсів $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_b}$, а лише за умови рівності всіх цих чотириімпульсів між собою. У той самий час, у вираз для решти діаграми ці чотириімпульси входять лише у вигляді $\sum_{j=1}^b p_{i_j}$, тому умова максимуму цього виразу фіксуватиме лише значення цієї суми. Таким чином, при одних і тих самих значеннях чотириімпульсів $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_b}$ можливо задовольнити умову максимуму і для блоку, і для решти діаграми.

Найпростішими прикладами блоків, для яких умовою максимуму є рівність всіх чотириімпульсів вторинних частинок, що приєднуються до блоку, є блоки

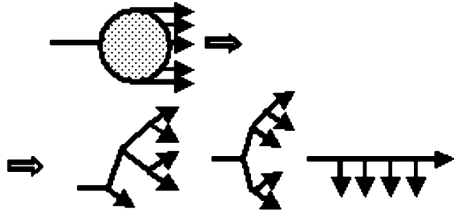


Рис. 10. Варіанти блоків без петель для випадку п'яти частинок, що приєднуються до блоку

діаграм, що не містять петель. Наприклад, для блоку без петель з п'ятьма частинками, що приєднуються до нього маємо три варіанти таких діаграм (рис. 10).

Кожній внутрішній лінії блоку без петель відповідає множник типу $1/(1 - (\sum p_i)^2 - i\varepsilon)$, де кількість доданків у сумі $\sum p_i$ не менша 2. Тому ці множники не приводять до полюсів в області інтегрування, і параметр ε може бути наближеним до нуля ще до всіх подальших розрахунків (при цьому $|1/(1 - (\sum p_i)^2)| = 1/((\sum p_i)^2 - 1)$). Звідси видно, що кожний такий множник досягає максимального значення за умови мінімальності величин $(\sum p_i)^2$, яка має сенс квадрата сумарної енергії тих частинок, чий чотириімпульс входить до суми в системі їх центра мас. Але ця енергія буде мінімальною, коли всі імпульси частинок у системі центра мас дорівнюють нулю. Таким чином, мінімальне значення лоренц-інваріанту $(\sum p_i)^2$ досягається при рівних значеннях всіх чотириімпульсів, що входять до суми.

Зауважимо, що у скалярній теорії, яку ми розглядаємо, кожному блоку відповідає деяка скалярна функція від чотириімпульсів вторинних частинок, що приєднуються до блоку. Внаслідок доведеної властивості, при пошуку максимуму модуля амплітуди розсіяння, що відповідає всій діаграмі, цю функцію можна замінити на звуження, яке можна отримати, покладаючи всі чотириімпульси рівними одному й тому ж значенню p . Але скалярна функція від одного чотиривектора p може бути лише функцією від $p^2 = 1$ – тобто константою. Тому після переходу до розглянутого звуження подальша максимізація проводиться аналогічно до розглянутого раніше випадку мультипериферичної діаграми на рис. 3.

Той факт, що діаграми з безпетлевими блоками, як і мультипериферичні діаграми на рис. 3 мають точку умовного максимуму, а також те, що обидва типи діаграм з утворенням однакової кількості вторинних частинок мають однаковий порядок по константі зв'язку, дозволяє порівняти значення модулів відповідних амплітуд у точці максимуму (рис. 11). Як ба-

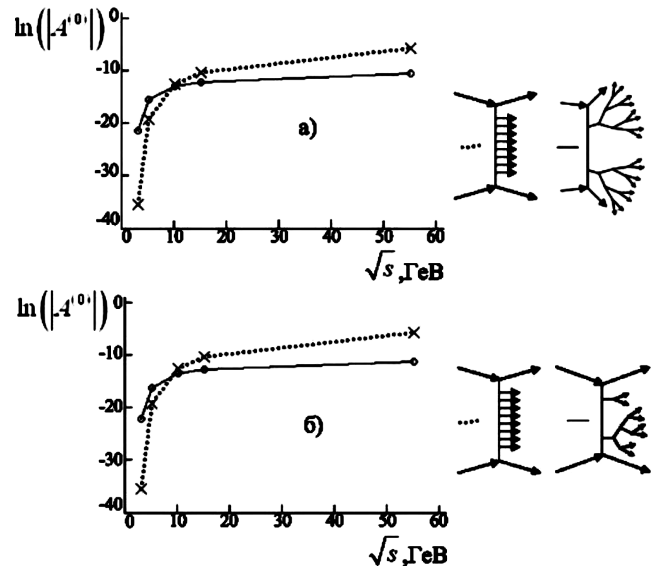


Рис. 11. Залежність від \sqrt{s} логарифма модуля амплітуди розсіяння в точці максимуму $|A^{(0)}|$ для різних типів діаграм

чимо, існує достатньо широкий інтервал енергій \sqrt{s} , поблизу до порога утворення певної кількості вторинних частинок, де внесок від діаграм з безпетлевими блоками буде більш суттєвим, ніж внесок простих мультипериферичних діаграм. Враховуючи те, що при будь-якій енергії знайдуться такі множинності n вторинних частинок, для яких ми будемо знаходитись достатньо близько до порога, робимо висновок про необхідність врахування діаграм з безпетлевими блоками.

У розглянутих вище діаграмах всі фейнманівські знаменники є за модулем більші за одиницю. Тому, як видно з наведених результатів, значення безрозмірної амплітуди розсіяння в точках максимуму є малими. Це наводить на думку спробувати розглянути діаграми з петлями, в яких вирази, що відповідають лініям, мають полюси. Такі нескінченності, що інтегруються, можуть приводити до більших значень амплітуди розсіяння. З метою отримання таких діаграм розглянемо систему трьох взаємодіючих скалярних полів з лагранжіаном:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} (g^{ab} \Phi_{,a} \Phi_{,b} - M^2 \Phi^2) + \frac{1}{2} (g^{ab} \varphi_{,a} \varphi_{,b} - m^2 \varphi^2) + \frac{1}{2} g^{ab} \chi_{,a} \chi_{,b} + g \Phi^2 \chi + \lambda \chi^2 \varphi + \lambda_1 \chi^3 + \lambda_2 \chi^4, \quad (31)$$

де λ_1 і λ_2 – відповідні константи зв'язку, обезрозмірені на масу m . Тобто тепер поля Φ і φ , які мають той самий сенс як і раніше, взаємодіють вже не безпосередньо, а через безмасове скалярне поле χ , яке

розглядається як скалярний аналог глюонів. У теорії з лагранжіаном (31) виникають діаграми типу показаних на рис. 12.

Зауважимо, що коли на якійсь із петель (рис. 12) утворюється одна вторинна частинка, інтеграл по такій петлі містить розбіжність, яку можна усунути перенормуванням константи λ в лагранжіані (31), тоді скінченна частина інтеграла, що відповідає петлі, достатньо легко обчислюється. Тому далі будемо розглядати петлі з утворенням більше однієї частинки. Доведемо, що модуль аналітичного виразу, який відповідає кожній петлі на діаграмі рис. 12 досягає максимального значення за умови рівних чотириімпульсів всіх вторинних частинок, що приєднуються до петлі.

Аналітичний вираз, що відповідає одній петлі на рис. 12, має вигляд

$$A = (-1)^{b+1} \int d^4q (q^2 + i\varepsilon)^{-1} \times \prod_{j=1}^b \left(\left(q - \sum_{k=1}^j p_k \right)^2 + i\varepsilon \right)^{-1}. \quad (32)$$

Тут кількість частинок, що приєднуються до петлі, позначено через b , а їх чотириімпульси для зручності нумеруються незалежно від інших чотириімпульсів частинок на діаграмі (тобто p_1, p_2, \dots, p_b).

Після застосування до інтеграла (32) тотожності Фейнмана [11], його можна записати як

$$A = i(-1)^{b-1} (b-2)! \pi^2 \times \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{b-1}} dz_b \frac{1}{(d + i\varepsilon)^{b-1}}, \quad (33)$$

де введено позначення

$$d = \sum_{i=1}^b z_i (1 - z_i) + 2 \sum_{i=1}^{b-1} \sum_{j=i+1}^b z_j (1 - z_i) (p_i p_j). \quad (34)$$

З області інтегрування в (33) видно, що на цій області всі вирази $z_j (1 - z_i)$ невід'ємні. Тому мінімум модуля знаменника d досягається при мінімально можливих значеннях всіх скалярних добутків $(p_i p_j)$. Це реалізується за умови рівності всіх цих чотириімпульсів. Таким чином, для подальшого розгляду максимізації модуля виразу, що відповідає діаграмі на рис. 12,

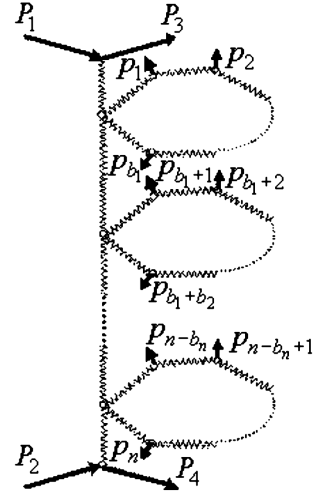


Рис. 12. Діаграма з петлями. Хвилясті лінії відповідають полю χ . Кількість петель позначено через l , кількість вторинних частинок, що приєднуються до кожної петлі, позначено b_1, b_2, \dots, b_l відповідно

вираз для кожної петлі можна замінити його звуженням на множину однакових чотириімпульсів. Обчислення інтеграла (32) при довільних чотириімпульсах вторинних частинок було б дуже складним завданням. Однак, для вказаного звуження завдання спрощується настільки, що інтеграл можна розрахувати аналітично. Позначаючи значення інтеграла (32) для рівних чотириімпульсів $p_1 = p_2 = \dots = p_b$ через A_0 , отримуємо

$$A_0 = \pi^3 \left(\frac{(-1)}{(b-2)!(b-2)!b} + (-1)^{b-1} I_1(b, j) + \sum_{f=2}^{b-2} (-1)^{b-f} I_2(b, j, f) \right),$$

$$I_1(b, j) = \frac{1}{(b-1)!b!} + \sum_{j=2}^{b-1} \frac{1}{j!(b-j)!(b-j+1)!(j-1)!},$$

$$I_2(b, j, f) = f \left(\frac{1}{(b-f)!b!(f-1)!} + \sum_{j=f+1}^{b-1} \frac{1}{j!(b-j)!(f+b-j)!(j-f)!} \right). \quad (35)$$

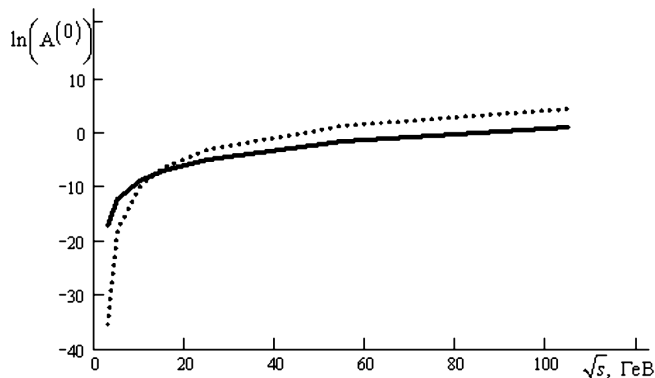


Рис. 13. Логарифми модулів значень амплітуди розсіяння в точках максимуму для діаграм з однією петлею на рис. 12 (суцільна лінія) і на рис. 3 (пунктир) для $n = 8$

У теорії з лагранжіаном (31) також виникають мультипериферичні діаграми типу, наведеного на рис. 3, але із заміною вертикальних ліній на хвилясті лінії поля χ . Ці діаграми і діаграми на рис. 12 мають різний порядок по константі зв'язку. Однак, якщо розглянути діаграму типу, показаного на рис. 12, з однією петлею, то вона буде містити лише одну “зайву” вершину у порівнянні з діаграмою на рис. 3 з тією ж кількістю частинок. Ми збираємось порівняти логарифми модулів амплітуд розсіяння, що відповідають цим діаграмам. Враховуючи те, що при будь-якому “розумному” значенні константи зв'язку логарифм цієї константи буде величиною порядку декількох одиниць, ми все ж наводимо на рис. 13 відповідне порівняння для випадку діаграм з утворенням восьми вторинних частинок.

З наведених на рис. 13 результатів бачимо, що при малих енергіях домінування внеску діаграм з петлею настільки суттєве, що на нього не може вплинути будь-яке “розумне” значення константи зв'язку.

Таким чином, застосування методу Лапласа, з одного боку, дозволяє розширити коло діаграм непружного розсіяння, доступних для розрахунків, а з іншого – показує, що поряд з мультипериферичними діаграмами розгляд інших типів діаграм є необхідним.

З метою розгляду простого скалярного аналогу утворення адронів із кварків розглянемо модель з лагранжіаном:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} (g^{ab} \Phi_{,a} \Phi_{,b} - M^2 \Phi^2) + \frac{1}{2} (g^{ab} \varphi_{,a} \varphi_{,b} - m^2 \varphi^2) + \frac{1}{2} (g^{ab} \xi_{,a} \xi_{,b} - m_q^2 \xi^2) + g \Phi^2 \varphi + \lambda \xi^2 \varphi, \quad (36)$$

де m_q – маса 0,338 ГеВ, безрозмірна на масу піона m . Така маса приблизно дорівнює середній масі

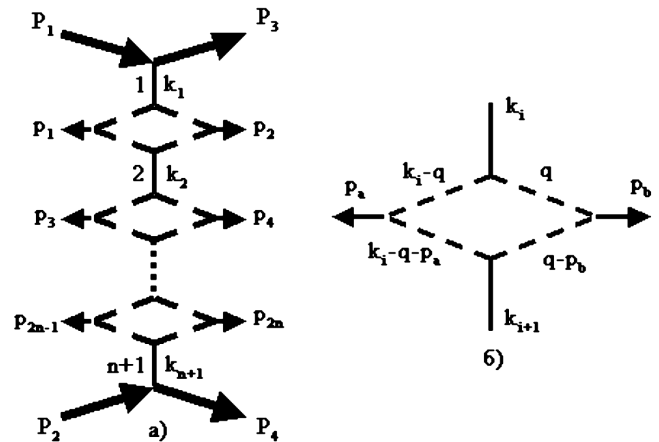


Рис. 14. Діаграма з чотирикутними вершинами (а) замість простих вершин на рис. 3 та її чотирикутний блок (б)

легких кварків. У моделі з лагранжіаном (36) виникають діаграми, показані на рис. 14,а (лінії поля ξ позначено пунктиром).

Основною проблемою при максимізації модуля амплітуди розсіяння, яка відповідає діаграмі на рис. 14,а, є розрахунок інтеграла, що відповідає чотирикутній петлі на рис. 14,б. Як видно з діаграми, модуль амплітуди розсіяння має точку максимуму, то цей максимум має досягатися при рівних значеннях чотириімпульсів $p_a = p_b = p$, які приєднуються до кожної чотирикутної петлі. Тому, покладаючи ці імпульси однаковими, ми далі знов можемо максимізувати отримане таким чином звуження амплітуди розсіяння. Це суттєво спрощує розрахунок інтеграла, який відповідає петлі на рис. 14,б. Після цього спрощення інтеграл по чотирикутній петлі може бути перетворено до однократного інтеграла. Вираз для цього інтеграла є дуже громіздким і тому тут не доводиться. Але він виявляється цілком придатним для подальшої числової максимізації модулів амплітуд розсіяння, що відповідають діаграмам типу, зображеного на рис. 14,а, з невеликою кількістю чотирикутних петель.

Значення бистрот в точці максимуму для діаграми з чотирма чотирикутними вершинами наведено на рис. 15. З наведеного там порівняння з максимізацією аналогічної діаграми з простими вершинами видно, що заміна константи, що відповідає простій вершині, на складний вираз, що відповідає чотирикутній вершинній діаграмі на рис. 14,б, мало змінює результат максимізації. При цьому зі зростанням енергії різниця між цими результатами стає непомітною.

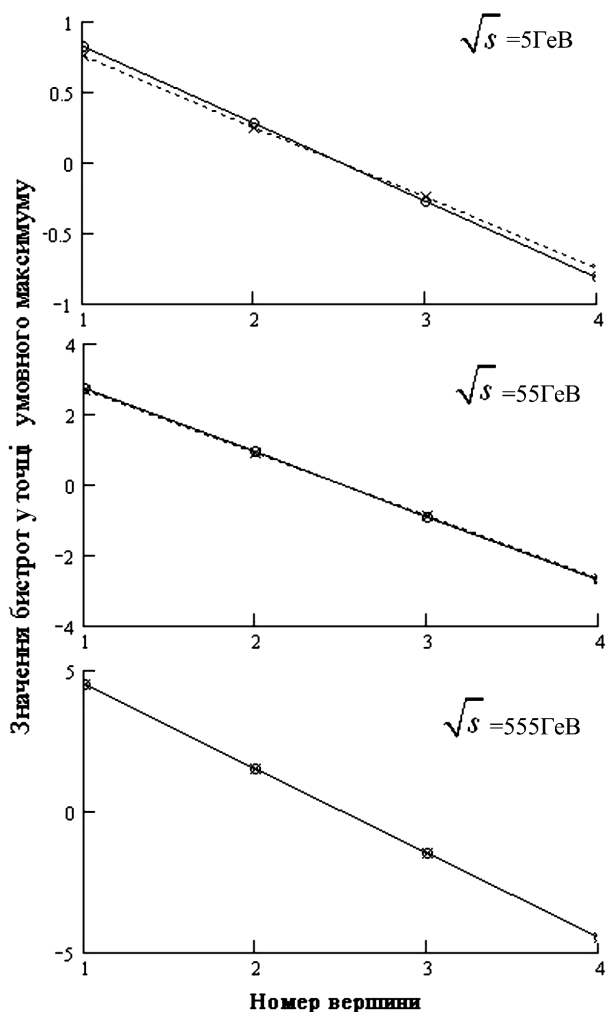


Рис. 15. Значення бистрот у точці умовного максимуму модуля амплітуди розсіяння для діаграми на рис. 12,а з простими і з чотирикутними вершинами. Для зручності точки сполучені лініями: пунктирною для простих вершин і суцільною – для чотирикутних вершин

На рис. 16 показано результати розрахунку значень віртуальностей у точці максимуму, що відповідають вертикальним лініям діаграми (нумерацію ліній показано на рис. 14,а) при різних значеннях енергії. Як видно з рис. 16, для діаграм з чотирикутними вершинами зберігається основний механізм зростання перерізів, пов'язаний зі зменшенням віртуальностей.

Однак крім цього, впливає новий механізм зростання, зумовлений зростанням з енергією модулів значень функцій в точці максимуму, що відповідають чотирикутним вершинам (рис. 17).

Таким чином, з результатів цього розділу, можемо зробити висновок, що існує достатньо багато ти-

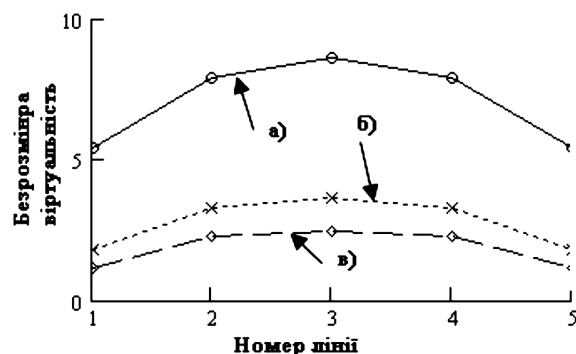


Рис. 16. Залежність безрозмірних віртуальностей у точці максимуму для вертикальних ліній діаграми на рис. 14,а з чотирма чотирикутними вершинами від енергії, де лінія а – відповідає енергії $\sqrt{s} = 5$ GeV, б – $\sqrt{s} = 10$ GeV, в – $\sqrt{s} = 15$ GeV

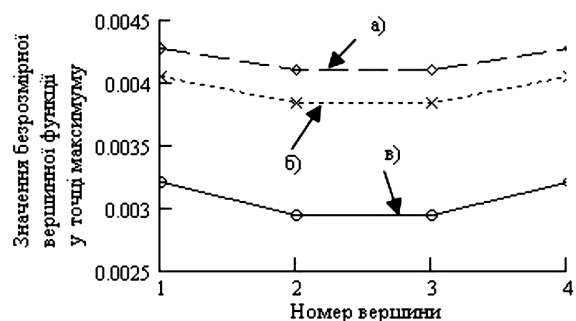


Рис. 17. Зростання модуля функції, що відповідає чотирикутній вершині рис. 14,б з енергією. Де лінія а відповідає енергії $\sqrt{s} = 15$ GeV, б – $\sqrt{s} = 10$ GeV, в – $\sqrt{s} = 5$ GeV. Нумерація вершин відповідає рис. 14,а: перша вершина – та, в яку входить перша вертикальна лінія на діаграмі рис. 14,а і т.д.

пів діаграм, які можуть розраховуватися методом Лапласа. При цьому той факт, що нам не потрібно знати значення складних інтегралів при всіх значеннях зовнішніх імпульсів, а лише в малій області навколо точки максимуму, значно спрощує розгляд цих інтегралів і дає можливість розглядати нові діаграми, які раніше були недоступні для розрахунків.

1. А.Б. Кайдалов, УФН **173**, 1153 (2003).
2. В.А. Абрамовский, В.Н. Грибов, О.В. Канчели, ЯФ **18**, 595 (1973).
3. Н.Г. де Брейн *Асимптотические методы в анализе* (ИЛ, Москва, 1961).
4. I.V. Sharf, G.O. Sokhrannyi, A.V. Tykhonov, K.V. Yatkin, N.A. Podolyan, M.A. Deliyergiyev, V.D. Rusov, hep-ph/0605110 (2006).

5. I.V. Sharf, G.O. Sokhrannyi, A.V. Tykhonov, K.V. Yatkin, N.A. Podolyan, M.A. Deliyergiyev, V.D. Rusov, arXiv: 0711.3690 (2007).
6. D. Amati, A. Stanghellini, and S. Fubini, *Nuovo Cimento* **26**, 896 (1962).
7. I.G. Halliday and L.M. Saunders, *Nuovo Cimento A* **60**, 115 (1969).
8. Ю.П. Никитин, И.Л. Розенталь *Ядерная физика высоких энергий* (Атомиздат, Москва, 1980).
9. I.V. Sharf, A.V. Tykhonov, G.O. Sokhrannyi, K.V. Yatkin, and V.D. Rusov, arXiv: 0912.2598 (2009).
10. M. Froissart, *Phys. Rev.* **123**, 1053 (1961).
11. П. Рамон *Теория поля* (Мир, Москва, 1984).

Одержано 16.03.11

МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЙНИЯ АДРОНОВ И НОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ ВОЗРАСТАНИЯ СЕЧЕНИЙ

И.В. Шарф, А.В. Тихонов, Г.О. Сохранний, К.В. Яткин, М.А. Делиергиев, Н.О. Подолян, В.Д. Русов

Резюме

Показано существование таких типов фейнмановских диаграмм, которые порождают амплитуды рассеяния, чьи модули имеют условный максимум при условии сохранения энергии-импульса. Это дает возможность применить метод Лапласа для расчёта сечений, соответствующих таким амплитудам рассеяния, а также выявить новые механизмы возрастания парциальных и полных сечений с ростом энергии. Эти механизмы связаны с зависимостью амплитуды рассеяния от продольных компонент импульсов вторичных частиц в системе центра масс первичных частиц, которые ранее не учитывались в известных вариантах расчета мультипериферической модели. Показано,

что для простейшей мультипериферической модели, основанной на скалярной теории с подгоночной константой связи, удается на качественном уровне добиться согласия рассчитанной и экспериментальной зависимостей полного сечения от энергии исходных частиц в системе центра масс. Рассмотрены другие диаграммы, также допускающие применение метода Лапласа. Показано, что вклады от таких диаграмм в сечения не менее существенны, чем от мультипериферических. Поскольку для применения метода Лапласа достаточно знать амплитуду рассеяния только в малой окрестности точки максимума, его использование даёт возможность рассчитывать такие диаграммы, которые ранее были недоступны для расчетов. Обсуждается применение метода Лапласа в КХД.

DESCRIPTION OF HADRON INELASTIC SCATTERING BY THE LAPLACE METHOD AND NEW MECHANISMS OF CROSS-SECTION GROWTH

I.V. Sharf, A.V. Tykhonov, G.O. Sokhrannyi, K.V. Yatkin, M.A. Deliyergiyev, N.A. Podolyan, V.D. Rusov

Odesa National Polytechnical University
(1, Shevchenko Prosp., Odesa 650044, Ukraine)

Summary

It is shown that there exist some types of Feynman diagrams, which can be calculated within the Laplace method. This allows one to reveal new mechanism of growth of the scattering cross-sections, which are not involved by the Regge theory due to the neglect of the dependence of the scattering amplitude on the longitudinal components of the momenta of secondary particles in the center-of-mass system of initial state particles. Within the multiperipheral model, the energy dependence of the total scattering cross-section is obtained. The theoretical results coincide qualitatively with experimental data.