# СПЕКТР ПОТУЖНОСТІ ВИПРОМІНЮВАННЯ ВІД ГАУСІВСЬКОГО ДЖЕРЕЛА, МІКРОЛІНЗОВАНОГО ТОЧКОВОЮ МАСОЮ: АНАЛІТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**В.І. ЖДАНОВ,[1,2] Д.В. ГОРПІНЧЕНКО[2]**

[1]**Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, астрономічна обсерваторія**
*(Вул. Обсерваторна, 3, Київ 04053; e-mail:* `ValeryZhdanov@gmail.com`*)*

[2]**Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”**
*(Просп. Перемоги, 37, Київ 03056)*

УДК 524.8


Теорія гравітаційного лінзування вивчає загально-релятивістські ефекти при поширенні електромагнітного випромінювання. У даній роботі розглянуто ефекти, залежні від довжини хвилі, при (мікро)лінзуванні протяжного гаусівського джерела на точковій масі за стандартних припущень щодо некогерентності різних елементів джерела. Отримано аналітичні вирази для спектра потужності мікролінзованого випромінювання, що є ефективними за великого джерела. Коли центр джерела, маса та спостерігач розташовані на одній прямій, знайдено спектр потужності в замкненій формі через гіпергеометричну функцію. У випадку загального розташування цю величину знайдено у формі ряду. Отримано асимптотичні вирази для спектра потужності за великого розміру джерела та за високих частот.

## 1. Вступ

Ефекти поширення електромагнітного випромінювання у викривленому просторі-часі, що описує загальна теорія відносності, називають гравітаційним лінзуванням. Гравітаційне лінзування відіграє важливу роль для вивчення розподілів маси у Всесвіті, для дослідження об'єктів зоряних та планетарних мас у Галактиці [1, 13, 23, 27, 29, 30]. Одне з найбільш яскравих застосувань гравітаційного лінзування є підтвердження існування темної матерії у скупченні “Куля” [7]. Термін “мікролінзування” використовують, коли випромінювання від далекого джерела відхиляється гравітаційними полями зоряних або/чи планетарних мас [13, 23, 29].

Усі ефекти, що досі спостерігалися у гравітаційно-лінзових системах (ГЛС), описуються у наближенні геометричної оптики; жоден не має справи з хвильовою оптикою. Спостереження ефектів, залежних від довжини хвилі, в ГЛС могло б відкрити шлях до цілком нових перевірок електродинаміки у викривленому просторі-часі. З іншого боку, ефекти хвильової оптики могли б дати незалежну інформацію про об'єкти, що беруть участь у процесі лінзування. Цим ефектам приділено значну увагу з теоретичної точки зору: перші роботи [8, 16, 24]; пізніший розвиток див. [12, 18–21, 31, 32]; повну бібліографію можна знайти в монографіях [3, 22, 23]. Усі ці роботи присвячено різним теоретичним аспектам хвильової оптики у слабких гравітаційних полях; експериментальних результатів немає. Це зумовлено тим, що зазначені ефекти в ГЛС дуже малі або малоймовірні. Однак нещодавно Хейл [10, 11] звернув увагу на те, що при мікролінзуванні планетарними масами або астероїдами гравітаційні ефекти хвильової оптики можуть бути зареєстрованими у недалекому майбутньому. Низка авторів (див., наприклад, [21, 26] та бібліографію в цих роботах) вивчають ефекти дифракції в ГЛС у зв'язку з перспективами детектування гравітаційних хвиль.

Аналогічно до звичайної оптики, величина хвильових ефектів при мікролінзуванні від реальних джерел залежить від розмірів джерела. Дифракційне мікролінзування джерела скінченних розмірів вивчали в подіях перетину каустики [12, 31], у випадку лінзування точковою масою [21]; взаємну когерентність різних зображень протяжного джерела поблизу каустик було оцінено у роботах Манджоса [18–20]. Відзначимо, що в ГЛС ефекти дифракції важко відділити від інтерференції між різними зображеннями кожної точки джерела. Наявність різних зображень веде до появи додаткових максимумів в автокореляційній функції мікролінзованого випромінювання (див., наприклад, [4–6,33]). Як дифракція, так і інтерференція в ГЛС можуть розглядатися на рівній основі за допомогою спектра потужності мікролінзованого випромінювання. Але більшість досліджень по цій проблемі включають числові розрахунки, тоді як бажано мати аналітичні результати, принаймні для деяких простих задач. У запропонованій статті такий результат знайдено для гаусівського джерела; цей результат раніше не був відомим, незважаючи на довгу історію теоретичних досліджень у даному питанні.

У даній роботі подано спектр потужності випромінювання від гаусівського джерела, що мікролінзується точковою масою за стандартних припущень щодо некогерентності різних точок джерела. У розділі 2, що містить допоміжні відомості, поле випромінювання обчислено стандартно – через інтеграл Кірхгофа. У розділі 3 та Додатку А отримано співвідношення у замкнутій формі через гіпергеометричну функцію для спектра потужності за умови, коли лінзуюча маса проектується на центр джерела. У розділі 4 використано це співвідношення для отримання спектра потужності у випадку загального розташування джерела та для отримання наближень спектра потужності у випадку досить малої маси і великого джерела. На відміну від більш раннього результату щодо цієї задачі [21], наш аналітичний підхід є більш зручним у випадку великого джерела (у порівнянні з радіусом Ейнштейна, спроектованого на площину джерела). У статті подано перші порядки розкладу за степенями $1/\omega$ за високих частот.

## 2. Базові співвідношення

У цьому розділі подано основні співвідношення, що використовуються далі. Згідно з [8, 21] та іншими авторами, використано стандартні обчислення з теорії дифракції та гравітаційного лінзування (див., наприклад, [3,23]), нехтуючи поляризацією. Розрахунок поля проведено на фоні плоского просторово-часового фону; це має сенс, наприклад, у випадку ГЛС нашої Галактики. Однак ці результати легко поширити на випадок позагалактичних ГЛС після деякого перевизначення відстаней у викривленому просторі-часі.

Нехтуючи ефектами поляризації, описуємо поле випромінювання однією скалярною функцією $\varphi(t,\mathbf{r})$. Працюємо далі у декартових координатах; спостерігач, лінза і джерело розташовані в околі осі $Z$ у площинах $z=0$, $z=D_d$ та $z=D_s$ відповідно. "Струм" джерела описуємо за допомогою скалярної функції $\mathrm{j}(t,\mathbf{y})$ припускаючи, що джерело повністю лежить в площині $\mathbf{r}=(\mathbf{y},D_s)$, $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^2$. Вважаємо $\mathrm{j}(t,\mathbf{y})$ стаціонарним процесом з кореляційними властивостями

$$\langle \mathrm{j}(t,\mathbf{r})\mathrm{j}(t',\mathbf{r}')\rangle=\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}')I(t-t',\mathbf{y}); \tag{1}$$

це враховує незалежність випромінювання різних точок джерела; $\langle\ldots\rangle$ позначає середнє за ансамблем.

Для перетворення Фур'є $\tilde{\mathrm{j}}(k,\mathbf{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{j}(t,\mathbf{y})\times$ $\times e^{i\omega t}dt$ маємо

$$\langle\tilde{\mathrm{j}}(\omega,\mathbf{y})\tilde{\mathrm{j}}^*(\omega',\mathbf{y}')\rangle=\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\delta(\omega-\omega')\,\tilde{I}(\omega,\mathbf{y}), \tag{2}$$

де $\tilde{I}(\omega,\mathbf{y})=\int dt\,I(t,\mathbf{y})e^{i\omega t}$ – інтенсивність елемента у точці $\mathbf{y}$ для частоти $\omega$.

Запишемо рівняння Гельмгольця для $\tilde{\varphi}(\omega,\mathbf{r})$:

$$\Delta\tilde{\varphi}+\omega^2\tilde{\varphi}=-4\pi\tilde{j}\quad(c=1).$$

Розглянемо розв'язок $\tilde{\varphi}(\omega,\mathbf{r})$ цього рівняння, який описує поле випромінювання до того, як воно попадає на площину лінзи. Нехай $D_{ds}=D_s-D_d$ – відстань від площини джерела до площини лінзи; джерело знаходиться біля осі $Z$: $|\mathbf{y}|\ll D_{ds}$. Перед площиною лінзи $\mathbf{r}'=(\mathbf{y}',D_d+0)$ біля осі $Z$ ($|\mathbf{y}'|\ll D_{ds}$) розв'язок отримуємо так само, як у теорії дифракції у плоскому просторі [14, 15]:

$$\tilde{\varphi}_b(\omega,\mathbf{y}')=$$

$$=\frac{e^{i\omega D_{ds}}}{D_{ds}}\int d^2\mathbf{y}\,\tilde{\mathrm{j}}(\omega,\mathbf{y})\exp\left[\frac{i\omega}{2D_{ds}}(\mathbf{y}'-\mathbf{y})^2\right]. \tag{3}$$

Для обчислення поля після площини лінзи використовуємо відомий метод фазового екрану (див., наприклад, [3, 22, 23]) приймаючи, що випромінювання отримує додатковий фазовий зсув $\omega t_{\mathrm{grav}}$ у площині лінзи, де $t_{\mathrm{grav}}(\mathbf{y}')$ – загальнорелятивістська часова затримка для сигналів, що перетинають площину лінзи в точці $\mathbf{y}'$. Ця затримка однакова для усіх частот. Поле після проходження площини лінзи таке:

$$\tilde{\varphi}_a(\omega,\mathbf{y}')=e^{-i\omega t_{\mathrm{grav}}(\mathbf{y}')}\tilde{\varphi}_b(\omega,\mathbf{y}').$$

Випромінювання приходить до спостерігача у початку координат $\mathbf{r}=\mathbf{0}$. Поле $\tilde{\varphi}(\omega,\mathbf{0})$ розраховуємо методом Кірхгофа–Зоммерфельда [15]:

$$\tilde{\varphi}(\omega,\mathbf{0})=\frac{\omega e^{i\omega D_d}}{2\pi i\,D_d}\int d^2\mathbf{y}'\tilde{\varphi}_a(\omega,\mathbf{y}')\exp\left[\frac{i\omega}{2D_d}\mathbf{y}'^2\right]=$$

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2012. Т. 57, №10

$$= \frac{e^{i\omega D_s}}{2i\,D_d D_{ds}} \int d^2\mathbf{y}\,\tilde{\mathrm{j}}(\omega,\mathbf{y})\phi(\omega,\mathbf{y}), \tag{4}$$

де

$$\phi(\omega,\mathbf{y}) =$$

$$= \frac{\omega}{\pi}\int \exp\left\{i\omega\left[\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{2D_{ds}} + \frac{\mathbf{x}^2}{2D_d} - t_{\rm grav}(\mathbf{x})\right]\right\} d^2\mathbf{x}\,. \tag{5}$$

Використовуючи (2, 4), маємо

$$\langle\tilde{\varphi}(\omega,\mathbf{0})\tilde{\varphi}^*(\omega',\mathbf{0})\rangle = \delta(\omega-\omega')P(\omega),$$

де спектр потужності

$$P(\omega) = \left(\frac{1}{2\,D_d D_{ds}}\right)^2 \int d^2\mathbf{y}\,\tilde{I}(\omega,\mathbf{y})\,|\phi(\omega,\mathbf{y})|^2\,. \tag{6}$$

## 3. Центральне гаусівське джерело, точкова лінзуюча маса

Співвідношення (6) записано для довільних джерел та гравітаційних затримок. Далі розглядаємо випадок точкової мікролінзи у $\mathbf{r} = (\mathbf{0}, D_d)$ з часом затримки (наприклад, [3, 22, 23]):

$$t_{\rm grav}(\mathbf{y}) = 2r_g \ln(|\mathbf{y}|/L), \quad r_g = 2Gm, \tag{7}$$

де $m$ – маса мікролінзи, $L$ – розмірний параметр, що зникає в остаточних обчисленнях; далі він опущений.

Розглянемо гаусівський розподіл яскравості по диску джерела для інтенсивності $\tilde{I}$ з рівняння (2):

$$I(\omega,\mathbf{y},\mathbf{r}_0) = \frac{f(\omega)}{\pi R^2}\exp\left(-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{r}_0)^2}{R^2}\right), \tag{8}$$

де $\mathbf{r}_0$ – центр джерела у площині джерела; функцію $f(\omega)$ вважаємо однаковою для усіх точок джерела, вона визначає часову когерентність кожного елемента джерела.

Інтеграл (5) обчислюється точно [3, 8, 21] через вироджену гіпергеометричну функцію $\Phi(a,c;x)$ [2]:

$$\phi(\omega,\mathbf{y}) =$$

$$= \frac{\omega}{\pi}\int \exp\left\{i\omega\left[\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{2D_{ds}} + \frac{\mathbf{x}^2}{2D_d} - 2r_g\ln|\mathbf{x}|)\right]\right\} d^2\mathbf{x} =$$

$$= \omega^{i\sigma} e^{\frac{i\omega\mathbf{y}^2}{2D_s}}\,\Gamma(1-i\sigma)\left(\frac{2D_{ds}D_d i}{D_s}\right)^{1-i\sigma}\times$$

$$\times\Phi\left(\,i\sigma, 1;\; i\sigma y^2/R_{E,s}^2\right), \tag{9}$$

де використано перетворення Куммера [2]; $\sigma = \omega r_g$, $R_{E,s} = [2r_g D^*]^{1/2}$ – радіус Ейнштейна, спроектований на площину джерела, $D^* = D_{ds}D_s/D_d$; $y = |\mathbf{y}|$.

У випадку гаусівського джерела спектр (6) має вигляд

$$P(\omega,\mathbf{r}_0) = \left(\frac{1}{2\,D_d D_{ds}}\right)^2 \frac{f(\omega)}{\pi R^2}\times$$

$$\times\int d^2\mathbf{y}\,\exp\left[-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{r}_0)^2}{R^2}\right]|\phi(\omega,\mathbf{y})|^2\,. \tag{10}$$

Ефект мікролінзування можна описати часткою

$$\Upsilon = P(\omega,\mathbf{r}_0)/P_0(\omega), \tag{11}$$

де $P_0$ – спектр потужності за відсутності мікролінзування ($\sigma = 0$).

Якщо центр джерела знаходиться у початку координат ($\mathbf{r}_0 = 0$), то інтеграл (10) можна обчислити через гіпергеометричні функції [28]; це дає (додаток А) $\Upsilon = \Upsilon_0(\alpha,\sigma)$, де

$$\Upsilon_0(\alpha,\sigma) \equiv \exp[2\sigma\arctan(\beta)]\,|\Gamma(1-i\sigma)|^2\times$$

$$\times F\left(i\sigma, -i\sigma;\, 1\,; (1+\beta^2)^{-1}\right); \tag{12}$$

$\beta = \alpha/\sigma$, $\alpha = R_{E,s}^2/R^2$, $R > 0$; $F(a,b;c;x)$ – гіпергеометрична функція. Відзначимо, що $\sqrt{\beta} = R^{-1}\sqrt{\lambda D^*/\pi}$ відіграє роль відношення розміру зони Френеля до розміру джерела.

Для великих $\alpha \gg 1$ і $\sigma \sim O(1)$ аргумент гіпергеометричної функції малий, і тому $\Upsilon_0(\alpha,\sigma) \approx 2\pi\sigma$.

Для $\alpha \ll 1$, тобто $R_{E,s} \ll R$, та обмеженого $\sigma \sim O(1)$ зручно використати розкладання гіпергеометричної функції $F(a,b;c;x)$ біля точки $x = 1$ для цілого $c$. Тоді (12) має вигляд

$$\Upsilon_0(\alpha,\sigma) = \exp[2\sigma\arctan(\beta)]\times$$

$$\times\left\{1 - \sigma^2 s\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\Gamma(n+1+i\sigma)}{\Gamma(1+i\sigma)}\right|^2 \frac{s^n[k_n(\sigma)-\ln s]}{(n+1)(n!)^2}\right\}, \tag{13}$$

де

$$k_n(\sigma) = 2\psi(n+1) - \psi(n+1+i\sigma) -$$

$$-\psi(n+1-i\sigma) + \frac{1}{n+1},$$

$s = \alpha^2/(\alpha^2+\sigma^2), \quad \psi(x) \equiv d\ln\Gamma(x)/dx.$

Запишемо розкладання по $\alpha$ до членів $\sim \alpha^2$ та $\alpha^2 \ln\alpha$, що зберігає залежність від частоти. У цьому наближенні рівняння (13) може бути записано як

$$\Upsilon_0(\alpha,\sigma) = 1 + 2\alpha + 2\alpha^2 - \alpha^2[k_0 - 2\ln(\alpha/\sigma)]\,. \tag{14}$$

Розклад (13) можна переписати у формі, що є зручною для асимптотичного розкладання за великих частот:

$$\Upsilon_0(\alpha,\sigma) = \exp[2\sigma\arctan(\alpha/\sigma)]\times$$

$$\times\left\{1 - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\sigma)\frac{\tilde{s}^{n+1}[\tilde{k}_n(\sigma) - \ln\tilde{s}]}{(n+1)(n!)^2}\right\}, \tag{15}$$

де $\tilde{s} = \sigma^2 s = \alpha^2/(1+\beta^2)$,

$\tilde{k}_n(\sigma) = k_n(\sigma) + 2ln(\sigma)$,

$$C_n(\sigma) = \left|\frac{\Gamma(n+1+i\sigma)}{\Gamma(1+i\sigma)\sigma^n}\right|^2 = \prod_{m=0}^{n}\left(1+\frac{m^2}{\sigma^2}\right), \tag{16}$$

З використанням асимптотик функції $\psi$ (див. [2]) для великих значень аргументу, коефіцієнти $\tilde{k}_n(\sigma)$ можна розкласти за степенями $\sigma^{-2}$. Тоді

$$\Upsilon_0(\alpha,\sigma) = \sum_{n=0}^{m}\sigma^{-2n}\Upsilon_0^{(n)}(\alpha) + O(\sigma^{-2(m+1)}). \tag{17}$$

До членів $\sim \sigma^{-2}$ маємо

$$\tilde{k}_n(\sigma) = \tilde{k}_n(\infty) - \frac{1}{\sigma^2}\left[n(n+1) + \frac{1}{6}\right] + O(\sigma^{-4}), \tag{18}$$

$\tilde{k}_n(\infty) = 2\psi(n+1) + (n+1)^{-1}$; з (16) випливає

$$C_n(\sigma) = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\,\sigma^2} + \dots\,.$$

Звідси маємо межі геометричної оптики ($\sigma \equiv \omega r_g \to \infty$):

$$\Upsilon_0(\alpha,\infty) = \Upsilon_0^{(0)}(\alpha) =$$

$$= \exp(2\alpha)\left\{1 - \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}[\tilde{k}_n(\infty) - 2\ln\alpha]}{(n+1)(n!)^2}\right\} =$$

$$= 2\alpha e^{2\alpha}K_1(2\alpha)\,, \tag{19}$$

де використано представлення для модифікованої функції Бесселя $K_1$ ([9]; формула 8.446). Пряме обчислення, виходячи з геометричної оптики (Додаток В), узгоджується з цим виразом.

Для наступного члена розкладу маємо

$$\Upsilon_0^{(1)}(\alpha) = -\alpha^2 e^{2\alpha}\left\{\frac{2}{3}\alpha + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(1)}(\alpha)\alpha^{2n}}{(n+1)(n!)^2}\right\},$$

$$C_n^{(1)}(\alpha) = \alpha^2 - n(n+1) - \frac{1}{6} \quad +$$

$$+\left(\tilde{k}_n(\infty) - 2\ln\alpha\right)\left[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) - \alpha^2(n+1)\right].$$

## 4. Нецентральне джерело

Перейдемо до обчислення $\Upsilon$ у загальному випадку нецентрального джерела за допомогою рівнянь (12)–(14). Інтегрування по кутовій змінній дає

$$P(\omega,\mathbf{r}_0) = \left(\frac{1}{2\,D_d D_{ds}}\right)^2\frac{2f(\omega)}{R^2}\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_0^2}{R^2}\right)\times$$

$$\times\int_0^{\infty} dy\,y\exp\left(-\frac{y^2}{R^2}\right)I_0\left(\frac{2yr_0}{R^2}\right)|\phi(\omega,\mathbf{y})|^2\,, \tag{20}$$

де $r_0 = |\mathbf{r}_0|$. Використовуючи розклад модифікованої функції Бесселя 1-го роду $I_0$ в ряд Тейлора та підстановку $y^2 = tR^2_{E,s}$, отримуємо

$$\Upsilon(\alpha,\sigma,r_0) = \alpha\exp\left(-\frac{r_0^2}{R^2} + \pi\sigma\right)|\Gamma(1-i\sigma)|^2\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n!)^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n}\int_0^{\infty} dt\,e^{-\alpha t}t^n\,|\Phi\,(\,i\sigma,1;\,i\sigma t)|^2\,. \tag{21}$$

За допомогою диференціювання по параметру $\alpha$ та враховуючи рівняння (9), (12), це можна подати як

$$\Upsilon(\alpha,\sigma,r_0) = \exp\left(-\frac{r_0^2}{R^2}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{n+1}}{(n!)^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left[\frac{\Upsilon_0(\alpha,\sigma)}{\alpha}\right]. \tag{22}$$



ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2012. Т. 57, №10

Очевидно, це представлення працює, коли $r_0/R$ не є великим; це будемо припускати далі. Це виключає, наприклад, випадок точкового джерела.

Як показує нескладний аналіз, для того, щоб отримати внески до порядку $\alpha^2$ та $\alpha^2 \ln\alpha$ в (22), можна використати обрізаний вираз (14). Отримуємо тоді

$$\Upsilon(\alpha,\sigma,r_0) = 1 + 2\alpha e^{-r_0^2/R^2} + \alpha^2 e^{-r_0^2/R^2}\left\{2g\left(\frac{r_0^2}{R^2}\right) - \right.$$

$$\left. -2\frac{r_0^2}{R^2} + \left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right)[2 - k_0(\sigma) - 2\ln(\sigma/\alpha)]\right\}, \qquad (23)$$

де

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\,(n-1)\,n!} =$$

$$= (x-1)[Ei(x) - C - \ln x] - e^x + 1 + 2x,$$

$Ei(x)$ – інтегральна експонента, $C$ – стала Ейлера.

Перейдемо до асимптотичного розкладу для $\Upsilon(\alpha,\sigma,r_0)$ за великих частот. Підстановка (17) у (22) приводить до асимптотичного ряду за степенями $\sigma^{-2}$:

$$\Upsilon(\alpha,\sigma,r_0) = \sum_{m}^{M} \sigma^{-2m}\Upsilon^{(m)}(\alpha,r_0) + O(\sigma^{-2(M+1)}) \qquad (24)$$

з коефіцієнтами

$$\Upsilon^{(m)}(\alpha,r_0) = \exp\left(-\frac{r_0^2}{R^2}\right) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{(n!)^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n} \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left[\frac{\Upsilon_0^{(m)}(\alpha)}{\alpha}\right]. \qquad (25)$$

Деяка увага потрібна, коли диференціюємо почленно асимптотичний розклад (17); однак це легко обґрунтувати з огляду на явну структуру функцій, що використовуються. У границі геометричної оптики

$$\Upsilon(\alpha,\infty,r_0) = \Upsilon^{(0)}(\alpha,r_0), \qquad (26)$$

де $\Upsilon^{(0)}(\alpha,r_0)$ подаємо формулою (25) за $m=0$. Пряме обчислення підсилення у межах звичайної теорії гравітаційного лінзування дає такий самий результат (див. Додаток B).

Коефіцієнт $\Upsilon^{(1)}(\alpha)$, що описує першу поправку до (26) з точністю до $\sim\alpha^2$, можна отримати або з (25), або з (23):

$$\Upsilon^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{6}\alpha^2 \exp\left(-\frac{r_0^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right). \qquad (27)$$

## 5. Обговорення

У даній роботі отримано аналітичні вирази для спектра потужності випромінювання протяжного гаусівського джерела, яке є мікролінзованим точковою масою, за стандартних припущень щодо некогерентності різних елементів джерела. Наш результат дозволяє аналізувати на однаковій основі як випадок широкополосного, так і вузькополосного прийому при відповідному виборі функції $f(\omega)$ у рівнянні (8). Якщо центр джерела, лінзуюча маса та спостерігач знаходяться на одній прямій, то спектр потужності подано точною формулою (12) через гіпергеометричну функцію. У випадку загального розташування результат подається у формі функціонального ряду (22). Таке представлення спектра потужності робить можливим отримувати наближення з будь-яким ступенем точності у випадку досить малого $\alpha = (R_{E,s}/R)^2$. Представлення ефективне, якщо відстань $r_0$ між проекцією лінзи на площину джерела та центром джерела має порядок або менше за розмір джерела. Протилежний випадок ($r_0 \gg R$) можна аналізувати методом з роботи [21], де використано розклад коефіцієнта підсилення в околі положення джерела. Представлення (12), (22) використані для отримання перших порядків асимптотичних розкладів (23), (27) у випадку малої лінзи та високих частот. Пряме обчислення високочастотної границі точно збігається з виразами з геометричної оптики. Як видно з (14), (27), перший нетривіальний внесок ефектів хвильової оптики, що містить залежність від частоти, виникає у членах порядку $\sim\alpha^2$ (хоча перший внесок лінзового ефекту геометричної оптики має порядок $\sim\alpha$); цей внесок зникає для великих джерел. За високих частот цей внесок веде себе як $\sim\omega^{-2}$.

Наприкінці запропонуємо деякі оцінки для радіодіапазону; разом із тим значно менші довжини хвиль також можуть мати інтерес (див., наприклад, [25]). Щоб ефекти хвильової оптики були значущими, потрібно мати $\sigma = r_g\omega \sim 1$ та $\alpha \sim 1$. Для довжин хвиль $\sim$ 1–10 см перша умова виконана, якщо маси мікролінз мають порядок $10^{-5}M_\odot$. Такі планетарні маси мають часто зустрічатися у Галактиці, і є низка спостережних підтверджень позасонячних планет, в тому числі з використанням мікролінзування (див., наприклад, [29]). Хейл [10] зазначає, що прояви гравітаційного мікролінзування можна буде виявити впродовж покрить віддалених зірок об'єктами поясу Койпера та хмари Оорта. Однак у цьому випадку обговорення слід модифікувати шляхом введення непрозорого екрану, що описує лінзуючий об'єкт [3].

Для того щоб $\alpha$ не було малим, розмір джерела $R$ має бути близько $R_{E,s}$ або менше. Це властиво широкому інтервалу величин $D^*$ у випадку мікролінзування об'єктами Галактики; хоча у цьому випадку ймовірність мікролінзування слушним радіоджерелом є малою (див., однак, [11]). Для віддаленого позагалактичного джерела при $D_s \approx D_{ds} \sim 10^3$ Мпк, мікролінзованого планетною масою на відстані $D_d = 10$ кпк, маємо $R_{E,s} \sim 10^{-2}[M/(10^{-5}M_\odot)]^{1/2}$ пк. Типовий розмір радіоджерел більший, але він може мати неоднорідні структури з характерними масштабами порядку $R_{E,s}$. У цьому випадку хвильові ефекти гравітаційно-лінзової оптики будуть суттєвими.

Роботу частково підтримано програмою "Космомікрофізика" НАН України та грантом Швейцарської національної фундації SCOPES №128040.

## ДОДАТОК A.
### Виведення рівняння (12) у випадку центрального джерела

З рівняння (10) маємо

$$|\phi(\omega,\mathbf{y})|^2 = |\Gamma(1-i\sigma)|^2\left(\frac{2D_{ds}D_d}{D_s}\right)^2\times$$
$$\times e^{\sigma\pi}\left|\Phi\left(i\sigma,1;\ i\sigma y^2/R^2_{E,s}\right)\right|^2. \tag{28}$$

При $r_0 = 0$ спектр потужності (10) дорівнює

$$P(\omega,0) = \left(\frac{1}{2\,D_dD_{ds}}\right)^2\frac{2f(\omega)}{R^2}\int\limits_0^\infty dy\,y\exp\left(-\frac{y^2}{R^2}\right)|\phi(\omega,y)|^2\,, \tag{29}$$

де виконано інтегрування за кутовою змінною. З урахуванням (28), (29) та використовуючи підстановку $t = y^2$, отримуємо (11) відповідно до $\mathbf{r}_0 = 0$ :

$$\Upsilon_0(\alpha,\sigma) =$$
$$= e^{\sigma\pi}\,|\Gamma(1-i\sigma)|^2\int dt\,e^{-t}\,|\Phi\,(i\sigma,1;\ i\sigma t/\alpha)|^2\ , \tag{30}$$

де $\alpha = R^2_{E,i}/R^2$. Інтеграл у формулі (30) є частковим випадком виразу, що можна отримати з формули 6.15.22 книги [2]. Тут для оцінки (30) проведемо обчислення безпосередньо для інтеграла:

$$I(a,\lambda,a',\lambda') = \int\limits_0^\infty dt\,e^{-t}\Phi\,(a,1;\ \lambda t)\,\Phi\left(a',1;\ \lambda' t\right), \tag{31}$$

де $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$, $0 < \mathrm{Re}(a') < 1$, $|\lambda'| + |\lambda| < 1$. Для цього знадобиться представлення виродженної гіпергеометричної функції

$$\Phi\,(a,1;\ x) = \frac{1}{B(a,1-a)}\int\limits_0^1 du\ \frac{e^{xu}u^{a-1}}{(1-u)^a}, \tag{32}$$

а також представлення гіпергеометричної функції

$$F\,(a,b;1;\ x) = \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(1-b)}\int\limits_0^1 du\ \frac{t^{b-1}}{(1-zt)^a(1-t)^b} =$$
$$= \frac{1}{B(b,1-b)}\int\limits_0^\infty d\tau\ \frac{\tau^{b-1}(1+\tau)^{a-1}}{[1+(1-z)\,\tau]^a}\,, \tag{33}$$

де $B(a,b)$ – бета-функція, $t = \tau/(1+\tau)$.

Використаємо (32) для $\Phi\,(a,1;\ \lambda t)$ та $\Phi\,(a',1;\ \lambda' t)$ в (31) та виконаємо інтегрування по $t$ після зміни порядку інтегрування:

$$I(a,\lambda,a',\lambda') = \frac{1}{B(a,1-a)B(a',1-a')}\times$$
$$\times\int\limits_0^1 du\ u^{a-1}(1-u)^{-a}\int\limits_0^1 dv\ \frac{v^{a'-1}(1-v)^{-a'}}{1-\lambda u-\lambda' v}.$$

Інтегрування $dv$ після підстановки $v \to \xi$: $v = \tau/(1+\tau)$ та $\tau = \xi(1-\lambda u)/(1-\lambda-\lambda u)$ легко виконати з огляду на інтегральне представлення для бета-функції.

Тоді підстановка $u = \eta/(1-\lambda+\eta)$ дає

$$I(a,\lambda,a',\lambda') =$$
$$= \frac{(1-\lambda)^{-a}(1-\lambda')^{-a'}}{B(a,1-a)}\int\limits_0^\infty d\eta\ \frac{\eta^{a-1}(1+\eta)^{a'-1}}{[1+(1-z)\eta]^{a'}}\,,$$

де $z = \lambda\lambda'(1-\lambda)^{-1}(1-\lambda')^{-1}$. Таким чином, враховуючи представлення (33), отримуємо кінцеве співвідношення

$$I(a,\lambda,a',\lambda') = \frac{F(a',a;\ 1;\ z)}{(1-\lambda)^a(1-\lambda')^{a'}}. \tag{34}$$

Обчислення проведено в області параметрів $a,\lambda,a',\lambda'$, де усі інтеграли є збіжними. Однак співвідношення (34) аналітично продовжується на більш широку область, яка включає значення $a = i\sigma$, $a' = -i\sigma$, $\lambda = i\sigma/\alpha$, $\lambda' = -i\sigma/\alpha$. Це дає рівняння (12) основного тексту.

## ДОДАТОК B.
### Підсилення гаусівського джерела в геометричній оптиці

Підсилення точкового джерела точковою масою в геометричній оптиці у змінних площини джерела добре відоме [3, 23]:

$$\mu(y) = \frac{y^2+2R^2_{E,s}}{y\sqrt{y^2+4R^2_{E,s}}}. \tag{35}$$

У нашому випадку цей вираз треба згорнути з гаусівським розподілом яскравості (8), що дає сумарне підсилення

$$A = \frac{1}{\pi R^2}\int d^2\mathbf{y}\mu(y)e^{-(\mathbf{y}-\mathbf{r_0})^2/R^2} =$$
$$= \frac{2}{R^2}e^{-\frac{r_0^2}{R^2}}\int\limits_0^\infty dy\,y\,\mu(y)e^{-\frac{y^2}{R^2}}I_0\left(\frac{2yr_0}{R^2}.\right)$$

З урахуванням (35), використовуючи тейлорівське розкладання для $I_0$ та підстановку $y^2 = tR^2_{E,s}$, маємо

$$A = A(\alpha,r_0) =$$

$$= e^{-\frac{r_0^2}{R^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n!)^2} \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n} \int_0^{\infty} dy\, e^{-\alpha t} t^n \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}} =$$

$$= e^{-\frac{r_0^2}{R^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{n+1}}{(n!)^2} \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^{\infty} dy\, e^{-\alpha t} \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}}. \quad (36)$$

Останній інтеграл можна обчислити [9] через модифіковану функцію Бесселя другого роду $K_1$, що дає

$$A(\alpha, 0) = \alpha \int_0^{\infty} dt\, e^{-\alpha t} \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}} = 2\alpha e^{2\alpha} K_1(2\alpha). \quad (37)$$

Це збігається з $\Upsilon_0(\alpha, \infty)$ з формули (19).

Для довільного положення джерела з (36) маємо

$$A(\alpha, r_0) = e^{-\frac{r_0^2}{R^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{n+1}}{(n!)^2} \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left[\frac{A(\alpha, 0)}{\alpha}\right], \quad (38)$$

що збігається з $\Upsilon(\alpha, \infty, r_0)$ of (26).

1. A.N. Alexandrov, V.M. Sliusar, V.I. Zhdanov, Ukr. J. Phys. **56**, 389 (2011).
2. G. Bateman, A. Erdélyi, *Higher transcendental functions* (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. 1.
3. П.В. Блиох, А.А. Минаков, *Гравитационные линзы* (Киев, Наукова Думка, 1989).
4. E.F. Borra, MNRAS **289**, 660 (1997).
5. E.F. Borra, MNRAS **389**, 364 (2008).
6. E.F. Borra, MNRAS **411**, 1695 (2011).
7. D. Clowe, M. Bradac, A. Gonzalez *et al.*, ApJ. **648**, L109 (2006).
8. S. Deguchi and W.D. Watson, AJ **307**, 30 (1986).
9. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego, 2000).
10. J.S. Heyl, MNRAS Lett. **402**, L39 (2010).
11. J.S. Heyl, MNRAS **411**, 1780 (2011).
12. M. Jaroszyński and B. Paczyński, ApJ **455**, 443 (1995).
13. *Gravitational Lensing: Strong, Weak & Micro*, edited by C.S. Kochanek, P. Schneider, and J. Wambsganss (Springer, Berlin, 2006).
14. L.D Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1983).
15. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков, *Теория волн* (Наука, Москва, 1990).
16. А.В. Манджос, Письма в Астрон. Журн. **7**, 387 (1981).
17. А.В. Манджос, Письма в Астрон. Журн. **16**, 598 (1990).
18. А.В. Манджос, Астрон. Журн. **68**, 22 (1991).
19. А.В. Манджос, Астрон. Журн. **68**, 236 (1991).
20. А.В. Манджос, Астрон. Журн. **72**, 153 (1995).
21. N. Matsunaga and K. Yamamoto, JCAP **01**, 023 (2006).
22. А.А. Минаков, В.Г. Вакулик, *Статистический анализ гравитационного микролинзирования* (Наукова Думка, Киев, 2010).
23. P. Schneider, J. Ehlers, and E.E. Falko, *Gravitational Lenses* (Springer, New York, 1992).
24. P. Schneider and J. Schmid-Burgk, A&A **148**, 369 (1985).
25. K.Z. Stanek, B. Paczynski, and J. Goodman, ApJ **413**, L7 (1993).
26. R. Takahashi, T. Suyama, and S. Michikoshi, A&A **438**, L5 (1993).
27. P. Tisserand, L. Le Guillou, C. Afonso *et al.*, A&A **469**, 387 (2007).
28. Т.С. Вовкогон, В.І. Жданов, Вісник Київського університету. Астрономія **45**, 8 (2009).
29. J. Wambsganss, in: *Gravitational Lensing: Strong, Weak & Micro*, edited by C.S. Kochanek, P. Schneider, and J. Wambsganss, (Springer, Berlin, 2006), p. 453.
30. L. Wyrzykowski, J. Skowron, S. Kozlowski *et al.*, MNRAS **416**, 2949 (2011).
31. S.A. Zabel and J.B. Peterson, ApJ **594**, 456 (2003).
32. А.Ф. Захаров, А.В. Манджос, ЖЭТФ **77**, 529 (1993).
33. V.I. Zhdanov, Astronomy Lett. **25**, 793 (1999).

Одержано 31.01.12

## СПЕКТР МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ГАУССОВСКОГО ИСТОЧНИКА, МИКРОЛИНЗИРОВАННОГО ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

*В.И. Жданов, Д.В. Горпинченко*

Р е з ю м е

Рассмотрены эффекты волновой оптики при микролинзировании протяженного гауссовского источника на точечной массе при стандартных предположениях о некогерентности разных элементов источника. Получены аналитические выражения для спектра мощности излучения микролинзированного источника, эффективные в случае большого источника. В случае, когда центр источника, масса и наблюдатель находятся на одной прямой, найден спектр мощности, выраженный в замкнутой форме, через гипергеометрическую функцию. У случае общего расположения эта величина найдена в форме ряда. Представлены асимптотические выражения для спектра мощности в случае большого источника и высоких частот.

POWER SPECTRUM OF RADIATION FROM A GAUSSIAN SOURCE MICROLENSED BY A POINT MASS: ANALYTIC RESULTS

*V.I. Zhdanov*[1,2], *D.V. Gorpinchenko*[2]

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Astronomical Observatory
(*3, Observatorna Str., Kyiv 04053, Ukraine;*
*e-mail: ValeryZhdanov@gmail.com*),

[2]National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute"
(*37, Prosp. Peremogy, Kyiv 03056, Ukraine*)

S u m m a r y

Gravitational lensing deals with general-relativistic effects in the propagation of electromagnetic radiation. We consider wavelength-dependent contributions in case of a (micro)lensing of an extended Gaussian source by a point mass under standard assumptions about the incoherent emission of different source elements. Analytical expressions for the power spectrum of a microlensed radiation, which are effective in case of a large source, are obtained. If the source center, the mass, and an observer are on a straight line, the power spectrum is found in a closed form in terms of a hypergeometric function. In the case of general locations of the lens and the source, the result is presented in the form of a series. Approximate analytic expressions for the power spectrum in the case of a large source and high frequencies are obtained.