

О.Р. БАРАН

Інститут фізики конденсованих систем НАН України  
(Вул. Свєнцицького, 1, Львів 79011; e-mail: ost@ph.ictp.lviv.ua)

## ЕФЕКТ ПОТОКУ ЕНЕРГІЇ В ОДНОВИМІРНІЙ СПІН-1/2 XX МОДЕЛІ МАГНЕТОЕЛЕКТРИКА. МЕТОД МНОЖНИКА ЛАГРАНЖА

УДК 537.611, 537.621,  
537.636

*Для дослідження нерівноважних стаціонарних станів з потоком енергії одновимірної спін-1/2 XX моделі магнетоелектрика з механізмом Кацури–Наґаси–Балацького при достатньо низьких температурах використано метод множника Лагранжа. За допомогою перетворення Йордана–Віґнера задача зводиться до гамільтоніана не взаємодіючих безспінових ферміонів і може бути розв’язаною точно. Побудовано ряд фазових діаграм та розраховано залежності намагніченості, електричної поляризації та різноманітних сприйнятливостей від магнітного та електричного полів, а також і від потоку енергії.*

**Ключові слова:** одновимірна XX модель, магнетоелектрик, нерівноважні стаціонарні стани, потік енергії, метод множника Лагранжа.

### 1. Вступ

#### 1.1. Нерівноважні стаціонарні стани

В сучасній статистичній фізиці значна увага приділяється теоретичному вивченню нерівноважних стаціонарних процесів різної природи у різноманітних системах та моделях. Зокрема особливості нерівноважних стаціонарних станів (НРСС) досліджувались у нерівноважній спін-бозонній моделі [1, 2]; спрощеній моделі системи не взаємодіючих електронів (одновимірний ланцюжок ферміонів, який складається із центральної частини та двох металічних термостатів) [2]; системі електрон-дірка-фотон [3]; скінченній квантовій системі взаємодіючих частинок, під’єднаній до електродів, які є одночасно і термостатами [4]; квантовій дротині [5]; системі, у якій квантова точка поміщена між металом і надпровідником або ферромагнітними контактами з протилежними поляризаціями [6]; XX ланцюжку у поперечному полі, під’єданому до квантових резервуарів не взаємо-

діючих спінів, які мають різну температуру [7]; спінових моделях із взаємодіями між найближчими сусідами та з потоком енергії [8–20] або спіновим струмом [9, 21–24]. Слід зауважити, що основною особливістю НРСС є наявність постійного потоку якоїсь фізичної величини (енергії, магнітного моменту, заряду тощо).

Для одновимірних квантових систем існує декілька методів дослідження НРСС. Зокрема в роботах [16–18] нерівноважну систему з потоком енергії, який індукований різними температурами  $T_1$  та  $T_2$  двох частин ланцюжка, інтерпретували за допомогою ефективного гамільтоніана як рівноважну систему (якщо обидві  $T_i$  є ненульовими), або ж як систему, що знаходиться у основному стані (якщо якесь одне  $T_i = 0$ ). В роботах [5, 8–14] використовували метод множника Лагранжа, у якому стан, стимульований потоком енергії або магнітного моменту, може бути наближено згенерований як основний стан ефективного гамільтоніана  $\mathcal{H} - \lambda \mathcal{J}$  (до гамільтоніана  $\mathcal{H}$  системи, яка розглядається, додається член, пропорційний до оператора потоку  $\mathcal{J}$ ). Цей метод ґрунтується на тому, що коли

© О.Р. БАРАН, 2021

потік є інтегралом руху  $[\mathcal{H}, \mathcal{J}] = 0$ , тоді стаціонарний стан можна описати в межах узагальненого ансамблю Гібса [14, 25, 26]. Слід наголосити, що для систем у нерівноважному стаціонарному стані, у яких потік енергії індукований термостатами із різними температурами, метод множника Лагранжа доцільно реалізовувати лише коли ці температури є низькими і коли їх різниця є малою [10, 14].

Зупинимося коротко на основних результатах дослідження властивостей НРСС у одновимірних спінових моделях з потоком енергії. В роботах [8, 9] основна увага зосереджена на дослідженні парних кореляційних функцій у одновимірних моделі Ізінґа та  $XX$  моделі, причому обидві в поперечному полі. Встановлено, що в станах, коли має місце потік енергії, кореляції загасають із відстанню між вузлами за степеневим законом. У [9] також показано, що у НРСС загасання  $XX$  парної кореляційної функції відбувається швидше, аніж у стані, коли потік енергії є відсутнім. В роботі [10] встановлено, що у одновимірній  $XX$  моделі з включенням потоку енергії відбувається перерозподіл інтенсивності  $XX$  динамічного структурного фактора при низьких частотах від краю зони Бріллюена в напрямку до її центра. Нагадаємо, що зроблені висновки у [8–10] стосуються лише випадку дуже низьких температур, оскільки дослідження проводились на основі методу множника Лагранжа. У роботах [17, 18], використовується метод, у якому немає обмежень на температури частин ланцюжка. В [17] показано, що у  $XX$  моделі у поперечному полі при низьких температурах  $XX$  кореляційна функція загасає із відстанню за степеневим законом. При високих ж температурах ця кореляційна функція загасає експоненційно на великих відстанях і степеневе на малих. У [18] вивчається ефект Казимира у квантовому спіновому ланцюжку з двома магнітними домішками у НРСС. Встановлено, що сила Казимира загасає експоненційно зі збільшенням відстані між цими домішками.

Окремо згадаємо також про роботи [27–30], у яких розглядають системи із потоком енергії з використанням методу множника Лагранжа, проте які не мають прямого відношення до дослідження нерівноважних стаціонарних процесів. Так, у [27] вивчаються властивості основного стану трикубітної одновимірної  $XX$  моделі в поперечному полі при наявності потоку енергії. У [28] досліджують квантову запутаність двох кубітів, які взаємоді-

ють із  $XU$  ланцюжком з потоком енергії. У [29] вивчають, як впливає енергетичний струм на переміщення квантового стану у  $XX$  моделі в однорідному поперечному полі. Ця робота, так само як і дві попередні, має стосунок до квантових комп'ютерів. У [30] розглядають одновимірну узагальнену модель компаса, у якій потік енергії є інтегралом руху лише у часткових випадках. Вивчається вплив на фізичні характеристики тричастинкових взаємодій, а також взаємодії Дзялошинського–Морія.

## 1.2. Магнетоелектричний ефект

Сполуки, в яких проявляється магнетоелектричний ефект (МЕЕ), а також відповідні їм квантові спінові або електронні моделі надалі залишаються об'єктами широких досліджень [31–40]. Тут слід зауважити, що хоча МЕЕ було обґрунтовано теоретично [41] та виявлено експериментально [42] у сполуці  $St_2O_3$  вже півстоліття тому, мікроскопічного пояснення цього явища тривалий час не було.

На даний час запропоновано декілька механізмів виникнення МЕЕ в кристалах (див. огляди [32, 34]): модель магнетострикції; модель залежної від спіна  $p$ - $d$  гібридизації орбіталей; модель з механізмом Кацури–Наґаоси–Балацького (КНБ) пов'язаності локалізованих спінів (магнітних моментів) із електричною поляризацією зв'язка [43, 44]. В останній моделі поляризація виникає внаслідок зміщення йона ліганда, який знаходиться поміж двома магнітними йонами, причому між цими магнітними частинками має місце надобмінна взаємодія. Таким чином, механізм КНБ ґрунтується на твердженні, що поляризація на зв'язку між двома магнітними йонами пропорційна до спінового струму між ними, який у операторній формі для ряду спінових систем має вигляд взаємодії Дзялошинського–Морія. У зв'язку з цим КНБ моделі магнетоелектрика ще часто називають моделями магнітного потоку або інверсної взаємодії Дзялошинського–Морія.

Механізм Кацури–Наґаоси–Балацького пов'язаності локалізованих магнітних моментів із електричною поляризацією зв'язка між ними спостерігається в ряді магнітних сполук, зокрема в одновимірному магнетоелектрику  $CuCl_2$  [45]. Окрім того, кристали  $LiCu_2O_2$  [46] та  $LiCuVO_4$  [47] також можуть бути достатньо добре описаними в рамках одновимірної КНБ моделі.

Попри фундаментальне значення МЕЕ, він також відкриває широкі можливості для технологічних застосувань завдяки механізму керування магнітними властивостями матеріалів (особливо наноструктурних) за допомогою електричного поля і навпаки [37, 39, 40, 48, 49], що є основною причиною незгасаючого інтересу до цього ефекту. Тут можна згадати проектування на основі магнетоелектриків носіїв інформації, які обходяться без електричних струмів [50], оптичних діодів на  $\text{BiFeO}_3$  [51] та інше. Останній приклад став можливим завдяки динамічному МЕЕ, який знаходить своє застосування в багатьох областях [52–54]. Так, під дією лазера у магнетоелектриках створюється спіновий струм, оскільки згідно з теорією Флоке сильні періодичні поля генерують у гамільтоніані додаткові взаємодії, які дозволяють динамічно контролювати магнетоелектричний зв'язок [52]. Такий спіновий струм можна виявити за допомогою оптикоспінтронних пристроїв. Іншим цікавим явищем є динамічні фазові переходи, спричинені ультракороткими періодичними пульсуваннями електричного поля [54].

Для магнетоелектричних систем є небагато строгих результатів і, наскільки нам відомо, всі вони стосуються одновимірних моделей [55–60], або двовимірних декорованих ґраток [61]. Квантовий спін-1/2  $XXZ$  ланцюжок із КНБ механізмом пов'язаності намагніченості з електричною поляризованістю було розв'язано в роботі [55], де, зокрема, досліджені намагніченість, електрична поляризація, магнетоелектричний тензор як функції електричних та магнітних полів. Було виявлено, що така проста модель не передбачає так званого нетривіального магнетоелектричного ефекту, коли лише електричне (магнітне) поле може індукувати намагніченість (електричну поляризацію). Це явище вдається описати лише, якщо додати до системи додаткові взаємодії. Так, у  $XX$  КНБ ланцюжку з триспіновими взаємодіями реалізується згаданий вище нетривіальний МЕЕ [56].

Цілоком нещодавно було досліджено точно ефект зміни геометрії у випадку  $XX$  магнетоелектрика з механізмом КНБ на зигзаг ланцюжку [57] та вплив анізотропії на магнетоелектричні властивості одновимірної  $XU$  моделі КНБ [58]. Окрім того, в роботі [59] отримано точні результати для магнетоелектрика КНБ на драбинці із взаємодіями Ізінґа та Гайзенберґа в ланцюжках та між ними

відповідно. Слід також окремо згадати про одновимірну модель квантового компасу, яку було узагальнено на випадок магнетоелектрика з КНБ механізмом та розв'язано точно [60].

### 1.3. Постановка задачі

У своєму дослідженні в рамках методу множника Лагранжа ми вивчимо вплив потоку енергії на характеристики одновимірної спін-1/2  $XX$  моделі магнетоелектрика в електричному та в поперечному магнітному полях, яка перебуває у нерівноважному стаціонарному стані. Пов'язаність локалізованих спінів із електричною поляризацією зв'язка у розглянутій моделі описується механізмом Кацури–Наґаосі–Балацького, а енергетичний струм може бути спричинений, наприклад, термостатами, з якими контактують краї ланцюжка. Основна увага у нашій праці буде зосереджена на аналізі фазових діаграм, а також залежностей електричної поляризації та сприйнятливостей (магнітної, електричної, магнетоелектричних) від полів та потоку енергії.

Нагадаємо, що метод множника Лагранжа доречно застосовувати для опису НРСС з постійним енергетичним струмом у випадку, коли краї системи під'єднані до термостатів із різними, достатньо низькими температурами. Цей метод базується на тому, що такий нерівноважний стан з постійним потоком енергії може бути описаний узагальненим розподілом Гібса  $e^{-\bar{\beta}(\mathcal{H}-\lambda\mathcal{J}^E)}$ , де  $\bar{\beta}$  – середнє значення обернених температур резервуарів, із якими контактують границі ланцюжка,  $\mathcal{H}$  – гамільтоніан ланцюжка,  $\mathcal{J}^E$  – оператор потоку енергії, а  $\lambda$  – генеруюче цей потік поле [14].

Слід зазначити, що модель магнетоелектрика, яку ми розглядаємо, є інтегрованою. А у інтегрованих моделях не виконується закон Фур'є і енергетичний струм не є пропорційним до градієнта температури всередині спінового ланцюжка [10, 62]. Це може бути пов'язане з тим, що у таких системах потік енергії є інтегралом руху і, як наслідок, коефіцієнти теплопровідності є аномальними [63, 64].

## 2. Одновимірний спін-1/2 $XX$ модель магнетоелектрика

Будемо розглядати одновимірну спін-1/2  $XX$  модель магнетоелектрика в електричному полі, перпендикулярному до осі  $z$  [ $\mathbf{E} = (E^x, E^y, 0)$ ] та в по-

перечному магнітному полі  $[\mathbf{h} = (0, 0, h^z)]$ , у якій пов'язаність електричної поляризації  $\mathbf{p}_{j,j+1}$  зв'язка, що з'єднує спіни  $\mathbf{S}_j$  та  $\mathbf{S}_{j+1}$ , із цими локалізованими магнітними моментами описується механізмом Кацури–Нагаоїси–Балацького [43]:

$$\mathbf{p}_{j,j+1} = \gamma \mathbf{e}_{j,j+1} \times \mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_{j+1}. \quad (1)$$

Тут  $\mathbf{e}_{j,j+1}$  – одиничний вектор, орієнтований від  $j$ -го до  $(j+1)$ -го вузла, а  $\gamma$  – коефіцієнт, який пов'язує електричну поляризацію із оператором спінового потоку. Надалі для простоти покладемо  $\gamma = 1$ . Оскільки ланцюжок лежить вздовж осі  $x$  [ $\mathbf{e}_{j,j+1} = (1, 0, 0)$ ], то вибрана конфігурація полів забезпечує інтегровність задачі (магнетоелектрик з потоком енергії, врахованим на основі методу множника Лагранжа).

Гамільтоніан одновимірного  $XX$  магнетоелектрика з вибраними нами  $\mathbf{h}$  та  $\mathbf{E}$  має вигляд [55–57, 65]:

$$\mathcal{H}^{\text{ME}} = \sum_{j=1}^N \left[ -hS_j^z + \mathcal{I}(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y) - E(S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y) \right], \quad (2)$$

де  $h = h^z$  – зовнішнє поперечне магнітне поле,  $\mathcal{I}$  – надобмінна взаємодія,  $E = E^y - y$  компонента зовнішнього електричного поля,

$$p_{j,j+1} = p_{j,j+1}^y \equiv S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y$$

оператор  $y$  компоненти електричної поляризації зв'язка.

Нагадаємо, що  $S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y \in z$  компонентою взаємодії Дзялошинського–Морія [66, 67] у операторній формі, різні моделі із якою досліджуються вже не одне десятиліття [68–75], у тому числі й, коли вона є регулярнозмінною [76, 77]. Слід зауважити, що для одновимірного спіну-1/2  $XY$  ланцюжка у поперечному полі з однорідною взаємодією Дзялошинського–Морія, напрямленою вздовж осі  $z$ , було отримано точний результат на основі одновимірного перетворення Йордана–Вігнера ще у 1965 році в роботі [68].

### 3. Нерівноважні стаціонарні стани

Для вивчення нерівноважних станів магнетоелектрика (2) із стаціонарним потоком енергії можна застосувати метод множника Лагранжа  $\lambda$  для квантових систем [8–14]. Так, при температурі

$T \rightarrow 0$  такий стаціонарний стан відповідає стану з найменшою енергією для моделі (2) із заданим енергетичним струмом. Тобто, потрібно розрахувати основний стан такого ефективного гамільтоніана:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{E}} = \mathcal{H}^{\text{ME}} - \lambda \mathcal{J}^{\mathcal{E}}. \quad (3)$$

Тут  $\mathcal{J}^{\mathcal{E}}$  – так званий макроскопічний потік енергії, а множник Лагранжа  $\lambda \in$  ефективним полем, яке керує цим потоком.

Локальний потік енергії  $J_j^{\mathcal{E}}$ , який вносить вклад від  $j$ -го спіна у “макроскопічний” потік ( $\mathcal{J}^{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^N J_j^{\mathcal{E}}$ ), отримується із рівняння неперервності для локальної енергії [8, 63, 64, 78–81]:

$$\dot{H}_j^{\text{ME}} = i[\mathcal{H}^{\text{ME}}, H_j^{\text{ME}}] = -\text{div} J_j^{\mathcal{E}} = J_{j-1}^{\mathcal{E}} - J_j^{\mathcal{E}}. \quad (4)$$

Тут  $H_j^{\text{ME}}$  – оператор цієї локальної енергії, причому ми поклали  $\hbar = 1$ .

У нашій задачі  $H_j^{\text{ME}}$  може бути вибраний так:

$$H_j^{\text{ME}} = \mathcal{I}(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y) - hS_j^z - E(S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y). \quad (5)$$

Зауважимо, по-перше, що це не єдиний спосіб вибору оператора локальної енергії, який забезпечує виконання рівняння неперервності (4), а також, по-друге, що вибір  $H_j^{\text{ME}}$ , якщо він коректний (забезпечує виконання (4)), не впливає на кінцевий результат для “макроскопічного” потоку енергії.

На основі (4) та (5) отримуємо оператор локального потоку енергії:

$$\begin{aligned} J_j^{\mathcal{E}} &= hE(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y) + \\ &+ h\mathcal{I}(S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y) + \\ &+ 2E\mathcal{I}(S_j^x S_{j+1}^z S_{j+2}^x + S_j^y S_{j+1}^z S_{j+2}^y) + \\ &+ (E^2 - \mathcal{I}^2)(S_j^x S_{j+1}^z S_{j+2}^y - S_j^y S_{j+1}^z S_{j+2}^x). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, гамільтоніан (3) можемо записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\mathcal{E}} &= \sum_{j=1}^N \left[ -hS_j^z + \tilde{\mathcal{I}}(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y) - \right. \\ &- \tilde{E}(S_j^y S_{j+1}^x - S_j^x S_{j+1}^y) + \\ &+ \tilde{K}(S_{j-1}^x S_j^z S_{j+1}^x + S_{j-1}^y S_j^z S_{j+1}^y) + \\ &\left. + \tilde{R}(S_{j-1}^x S_j^z S_{j+1}^y - S_{j-1}^y S_j^z S_{j+1}^x) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

де введені позначення

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} &= \mathcal{I} - \lambda h E, & \tilde{E} &= E + \lambda h \mathcal{I}, \\ \tilde{K} &= -2\lambda E \mathcal{I}, & \tilde{R} &= -\lambda(E^2 - \mathcal{I}^2). \end{aligned}$$

Треба сказати, що теоретичне дослідження спінових ланцюжків, в яких окрім двоспінових взаємодій між найближчими сусідами наявні триспінові між наступними після найближчих вузлами, триває вже декілька десятиліть. Однією із перших робіт, де розглядали так звану модифіковану  $XXZ$  модель з конкуруючими взаємодіями, гамільтоніан якої – сума двох інтегралів руху, є праця [82]. Перший із інтегралів руху є добре відомий  $XXZ$  ланцюжок, а другий – ланцюжок лише із триспіновими взаємодіями. Слід зауважити, що другий інтеграл руху є ніщо інше, як оператор потоку енергії для звичайної одновимірної  $XXZ$  моделі (дивись, наприклад, [83]). Подібні зигзаг драбинки з конкуруючими взаємодіями між найближчими та наступними після найближчих сусідами досліджували у роботах [83–87] та багатьох інших.

#### 4. Результат ферміонізації Йордана–Вігнера

Ефективний гамільтоніан (7) з потоком енергії має такі самі дво- та триспінові доданки, як і у роботі [56]. Тому можемо зразу записати остаточний результат, який отримується після одновимірного перетворення Йордана–Вігнера (див. [65, 88–90]) та після переходу до імпульсного простору:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{E}} = \sum_{-\pi \leq k < \pi} \Lambda_k \left( n_k - \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

Тут  $k$  належить першій зоні Бріллюена,  $n_k = c_k^\dagger c_k$ ,  $c_k^\dagger$  та  $c_k$  – оператори народження та знищення безспінових ферміонів, а спектр визначається таким чином:

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= -h + \tilde{\mathcal{I}} \cos k - \tilde{E} \sin k - \frac{\tilde{K}}{2} \cos(2k) + \\ &+ \frac{\tilde{R}}{2} \sin(2k). \end{aligned} \quad (9)$$

У термодинамічній границі на основі (8) легко обчислити енергію основного стану з розрахунку на один вузол:

$$e_0 = \frac{\langle \mathcal{H}^{\mathcal{E}} \rangle}{N} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk |\Lambda_k|, \quad (10)$$

а на основі (10) – потік енергії при  $T \rightarrow 0$ :

$$\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = \frac{\langle \mathcal{J}^{\mathcal{E}} \rangle}{N} = -\frac{\partial e_0}{\partial \lambda} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{sgn}(\Lambda_k) g_k, \quad (11)$$

де введене позначення

$$\begin{aligned} g_k &= hE \cos k + h\mathcal{I} \sin k - \\ &- E\mathcal{I} \cos(2k) + \frac{E^2 - \mathcal{I}^2}{2} \sin(2k). \end{aligned} \quad (12)$$

Намагніченість та електричну поляризацію (з розрахунку на вузол) при нульовій температурі можна отримати зокрема таким чином:

$$\begin{aligned} m &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle S_j^z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left( \langle n_k \rangle - \frac{1}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{sgn}(\Lambda_k), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} p &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle p_{j,j+1} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \langle n_k \rangle \sin k = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{sgn}(\Lambda_k) \sin k. \end{aligned} \quad (14)$$

У нашому дослідженні незалежними параметрами задачі є потік енергії (а не  $\lambda$ ; дивись, наприклад, працю [9], а також Додаток), надобмінна взаємодія та магнітне й електричне поля. У такому разі спектр елементарних збуджень (9) є заданим параметрично:  $\Lambda_k = \Lambda(k, \lambda, \mathcal{I}, h, E)$ , де  $\lambda = \lambda(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, \mathcal{I}, h, E)$  – функція задана неявно (див. (11)). Відповідно параметрично заданими будуть також і інші фізичні характеристики.

Числовий аналіз спектра (9) показує, що в залежності від значень параметрів  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $h$  та  $E$  може бути дві або чотири точки Фермі  $k_\nu^F$ . Нагадаємо (див., наприклад, [85, 90, 91]), що точками  $k_\nu^F$  є значення квазіімпульсу, при яких спектр елементарних збуджень  $\Lambda_k$  дорівнює нулю. Зауважимо, що коли незалежними параметрами є  $\lambda$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $h$  та  $E$ , то також може бути дві або чотири точки Фермі, але можливий і випадок, коли у спектрі буде щільна [65].

На основі співвідношень (9) та (11)–(14), приймаючи до уваги наявність точок Фермі  $k_\nu^F(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, \mathcal{I}, h, E) = k_\nu^F(\lambda(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, \mathcal{I}, h, E), \mathcal{I}, h, E)$ ,

отримаємо магнітну ( $\frac{\partial m}{\partial h}$ ), електричну ( $\frac{\partial p}{\partial E}$ ) та дві магнетоелектричні ( $\frac{\partial m}{\partial E}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial h}$ ) сприйнятливості при  $T \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial m}{\partial \xi} = \zeta \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{\partial k_{\nu}^F}{\partial \xi}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \zeta \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \sin k_{\nu}^F \frac{\partial k_{\nu}^F}{\partial \xi}. \quad (16)$$

Тут підсумовування проводиться по індексах усіх точок Фермі, введено позначення  $\zeta = \text{sgn}(\Lambda_{k=\pi}) / (2\pi)$ , а  $\xi = h, E$  (і тут, і нижче). Приведемо також необхідні для розрахунку сприйнятливостей (15) та (16) вирази у явному вигляді:

$$\frac{\partial k_{\nu}^F}{\partial \xi} = - \left( \frac{\partial \Lambda_{k_{\nu}^F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Lambda_{k_{\nu}^F}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right) / \left( \frac{\partial \Lambda_k}{\partial k} \Big|_{k=k_{\nu}^F} \right), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = & - \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{sgn}(\Lambda_k) \frac{\partial g_k}{\partial \xi} + \right. \\ & \left. + \zeta \sum_{\nu} (-1)^{\nu} g_{k_{\nu}^F} \left( \frac{\partial \Lambda_{k_{\nu}^F}}{\partial \xi} \right) / \left( \frac{\partial \Lambda_k}{\partial k} \Big|_{k=k_{\nu}^F} \right) \right] \times \\ & \times \left[ \zeta \sum_{\nu} (-1)^{\nu} g_{k_{\nu}^F} \left( \frac{\partial \Lambda_{k_{\nu}^F}}{\partial \lambda} \right) / \left( \frac{\partial \Lambda_k}{\partial k} \Big|_{k=k_{\nu}^F} \right) \right]^{-1}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Lambda_k}{\partial h} = -1 - \lambda(E \cos k + \mathcal{I} \sin k),$$

$$\frac{\partial \Lambda_k}{\partial E} = \lambda[\mathcal{I} \cos(2k) - E \sin(2k) - h \cos k] - \sin k,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \lambda} = & -h(E \cos k + \mathcal{I} \sin k) + \mathcal{I}E \cos(2k) - \\ & - (E^2 - \mathcal{I}^2) \sin(2k)/2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Lambda_k}{\partial q} = -\tilde{\mathcal{I}} \sin k - \tilde{E} \cos k + \tilde{K} \sin(2k) + \tilde{R} \cos(2k),$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial h} = E \cos k + \mathcal{I} \sin k,$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial E} = h \cos k - \mathcal{I} \cos(2k) + E \sin(2k).$$

## 5. Результати числових досліджень

У даному розділі зупинимося на дослідженні залежностей намагніченості, електричної поляризації та сприйнятливостей від магнітного й електричного полів, а також від потоку енергії. Оскільки:

- поля  $h$  та  $E$  можна масштабувати абсолютним значенням взаємодії  $|\mathcal{I}|$ , потік енергії  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = \frac{1}{N} \langle \mathcal{J}^{\mathcal{E}} \rangle$  – значенням  $\mathcal{I}^2$ , множник Лагранжа  $\lambda$  – значенням  $1/|\mathcal{I}|$ ;

- $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  є парною функцією обох полів та взаємодії, намагніченість – парною функцією  $E$  та  $\mathcal{I}$  і непарною функцією  $h$ , а для поляризації при фіксованому потоці енергії мають місце властивості

$$p(\mathcal{I}, h, E) = p(-\mathcal{I}, -h, E) = -p(\mathcal{I}, -h, -E),$$

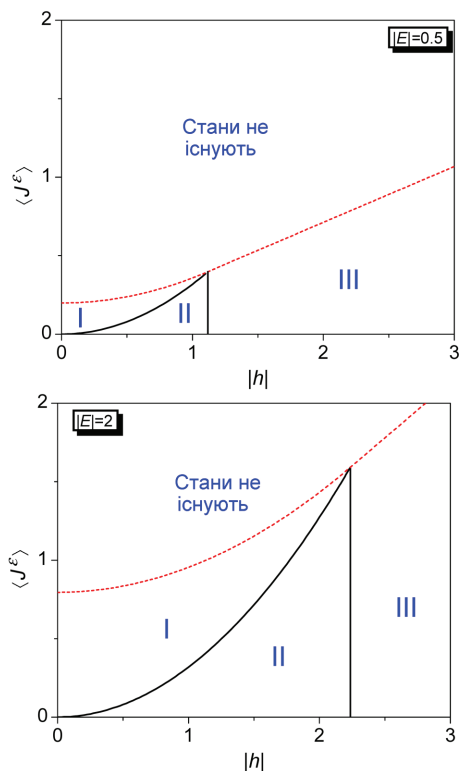
то не втрачаючи всеохопності покладемо  $\mathcal{I} = -1$  та можемо обмежуватись додатними магнітними полями  $h \geq 0$  при довільному  $E$ , або ж навпаки – додатними електричними полями  $E \geq 0$  при довільному  $h$ .

Зазначимо, що ми проводимо теоретичне дослідження впливу енергетичного струму в рамках методу множника Лагранжа на характеристики спіні-1/2 XX моделі магнетоелектрика з КНБ механізмом. Тому для повноти картини будемо розглядати значення  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  у досить широкому діапазоні.

### 5.1. Фазові діаграми

Аналогічно, як і у роботі [9], будемо розрізняти три різні фази безщільної спінової рідини: I – немагнітна ( $m = 0$ ) фаза з чотирма точками Фермі; II та III – магнітовпорядковані ( $m \neq 0$ ) фази з чотирма та двома точками Фермі відповідно. Фазові переходи між цими фазами можуть бути лише другого роду. Більш детально різницю між магнітовпорядкованими фазами II та III буде висвітлено при аналізі польових залежностей намагніченості та електричної поляризації, а також сприйнятливостей.

На рис. 1–3 наведено фазові діаграми в площинах  $(|h|, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$ ,  $(|E|, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$  та  $(|E|, |h|)$  відповідно. Рисунок 1 демонструє, як змінюються  $(|h|, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$  діаграми зі зміною електричного поля. Вони є якісно однаковими при будь-яких значеннях  $E$  і мають топологію, аналогічну до приведеної і проаналізованої в роботі [9] для XX моделі в поперечному магнітному полі. На цих фазових діаграмах наявні усі три фази. Границя між фазами II та III є вертикальним відрізком. Окрім ліній, які відповідають фазовим переходам I  $\rightarrow$  II та II  $\rightarrow$  III, і які сходяться у свого роду “потрійній точці” (ТР), на фазових діаграмах наявні криві максимально досяжного потоку енергії  $\langle J_{\text{max}}^{\mathcal{E}}(|h|, |E|) \rangle$  (див. [9]). Вище цих кривих не існує станів (стани із потоком енергії більшим від  $\langle J_{\text{max}}^{\mathcal{E}} \rangle$  при заданих магнітних та електричних полях не можуть бути реалізованими (див. [65] та Додаток)). Слід зауважити, що

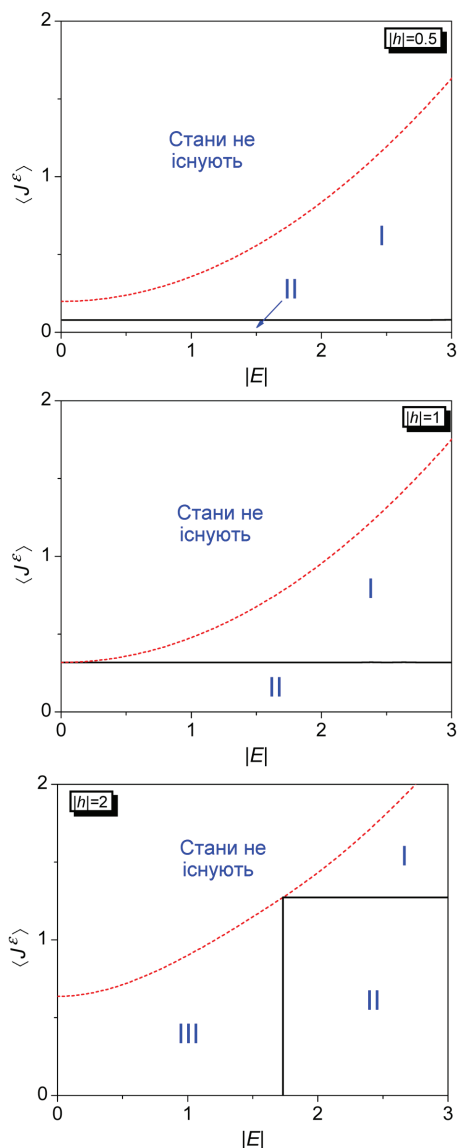


**Рис. 1.** Фазові діаграми в площині модуль магнітного поля – потік енергії при різних значеннях модуля електричного поля ( $|E| = 0,5, 2$ ). Тут також наведено криві, які відповідають максимально досяжному потоку енергії  $\langle J_{\max}^E \rangle$ , вище яких не існує станів. Діаграму при  $E = 0$  можна подивитись у роботі [9], де видно, що перехід між магнітовпорядкованими фазами II та III відбувається при  $|h_c^{II \rightarrow III}| = 1$

“потрійна точка” у даній задачі не є класичною потрійною точкою, оскільки лежить на кривій, що окреслює область, де стани не існують.

Варто звернути увагу також на те, що на  $(|h|, \langle J^E \rangle)$  діаграмах лінії, які відповідають фазовим переходам  $I \rightarrow II$ , накладаються одна на одну при різних значеннях електричного поля. Притому чим меншим є  $|E|$ , тим “коротшою” буде ця лінія. Таким чином, координати точок переходу  $(h_c^{I \rightarrow II}, \langle J^E \rangle_c^{I \rightarrow II})$  між фазами I та II не залежать від значення електричного поля.

Для фазових діаграм у площині  $(|E|, \langle J^E \rangle)$  існують три різні топології (див. рис. 2). Так, на діаграмах при  $|h| < 1$  лінія (границя) між фазами I та II не перетинається із лінією максимально досяжного потоку, а при  $|h| = 1$  ці лінії сходяться в точці  $E = 0, \langle J^E \rangle = 1/\pi$ . При  $|h| > 1$  на фазо-



**Рис. 2.** Фазові діаграми в площині модуль електричного поля – потік енергії при різних значеннях модуля магнітного поля ( $|h| = 0,5, 1, 2$ ). Тут також наведено криві, які відповідають максимально досяжному потоку енергії  $\langle J_{\max}^E \rangle$ , вище яких не існує станів

вих діаграмах, на відміну від розглянутих вище випадків  $|h| \leq 1$ , наявними є фаза III та “потрійна точка”. Ця ТР зі збільшенням  $|h|$  зміщується у напрямку більших  $|E|$  та  $\langle J^E \rangle$ . Слід зауважити, що лінії, які відповідають фазовим переходам між фазами II та I (III) є горизонтальними (вертикальними).

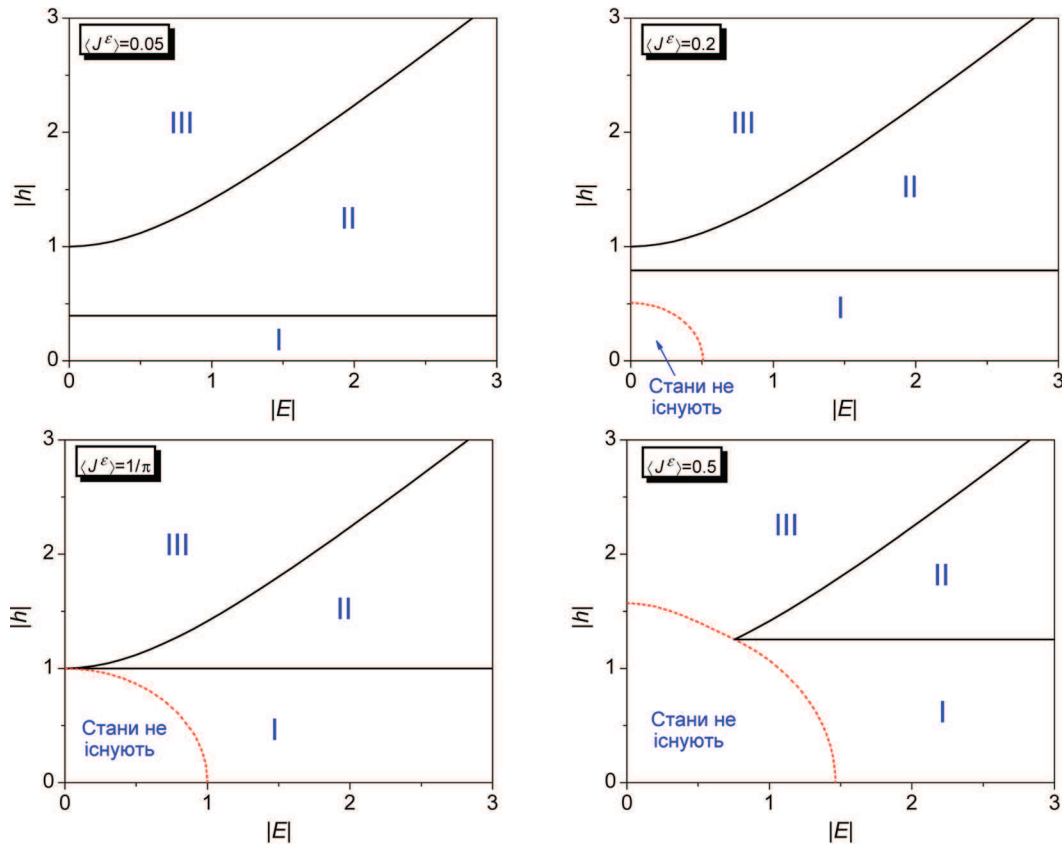


Рис. 3. Фазові діаграми в площині модуль електричного поля – модуль магнітного поля при різних значеннях потоку енергії ( $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,05, 0,2, 1/\pi, 0,5$ ). Тут також наведено лінії, в кожній точці яких максимально досяжний потік енергії  $J_{\max}^{\mathcal{E}}$  дорівнює відповідним заданим потокам  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,2, 1/\pi, 0,5$ . Нижче цих ліній не існує станів

Фазові діаграми у площині ( $|E|$ ,  $|h|$ ) можуть мати чотири різні топології (див. рис. 3). При  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle < 1/\pi$  лінії, які розділяють фази I, II та III, не перетинаються, причому лише при  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle < 1/(2\pi)$  на діаграмах немає областей, де не існують стани. У випадку ж  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 1/\pi$  вже існує “потрійна точка” з координатами ( $E_{\text{ТР}} = 0, |h_{\text{ТР}}| = 1$ ). Із збільшенням потоку енергії ця “потрійна точка” зміщується в напрямку більших як  $|E|$ , так і  $|h|$  (див. рис. 3 для  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 1/\pi$  та  $0,5$ ). Слід зауважити, що координати точки переходу ( $E_c^{\text{II} \rightarrow \text{III}}, h_c^{\text{II} \rightarrow \text{III}}$ ) між фазами II та III не залежать від  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  за виключенням того, що при  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle > 1/\pi$  лінія переходів між згаданими фазами бере початок з “потрійної точки”. Іншими словами, лінія, яка відповідає фазовим переходам  $\text{II} \rightarrow \text{III}$  при  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,5$ , накладається на відповідні лінії при  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,05, 0,2$  та  $1/\pi$  (що можна побачити на рис. 3).

## 5.2. Намагніченість та електрична поляризація

Розглянемо тепер, як поводять себе намагніченість  $m$  та електрична поляризація  $p$  зі зміною параметрів моделі  $h$ ,  $E$  та  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ . На рис. 4 – 6 наявні майже усі можливі з точки зору якісної різниці залежності  $m$  та  $p$  від магнітного та електричного полів, а також від потоку енергії. Слід зразу сказати, що у своєму дослідженні ми не розглядали випадки, коли хоча б один із параметрів  $|h|$ ,  $|E|$  або  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  є безмежно великим. З рисунків добре видно, що у точках фазових переходів і намагніченість, і електрична поляризація мають злами. Лише злами  $p(h)$  при переході між фазами II та III у випадках електричних полів близьких до нуля є слабо вираженими (див. рис. 4). Слід зауважити, що у ефективному гамільтоніані (7) наявні триспінові взаємодії  $XZY - YZX$  та  $XZX + YZY$ , які при-



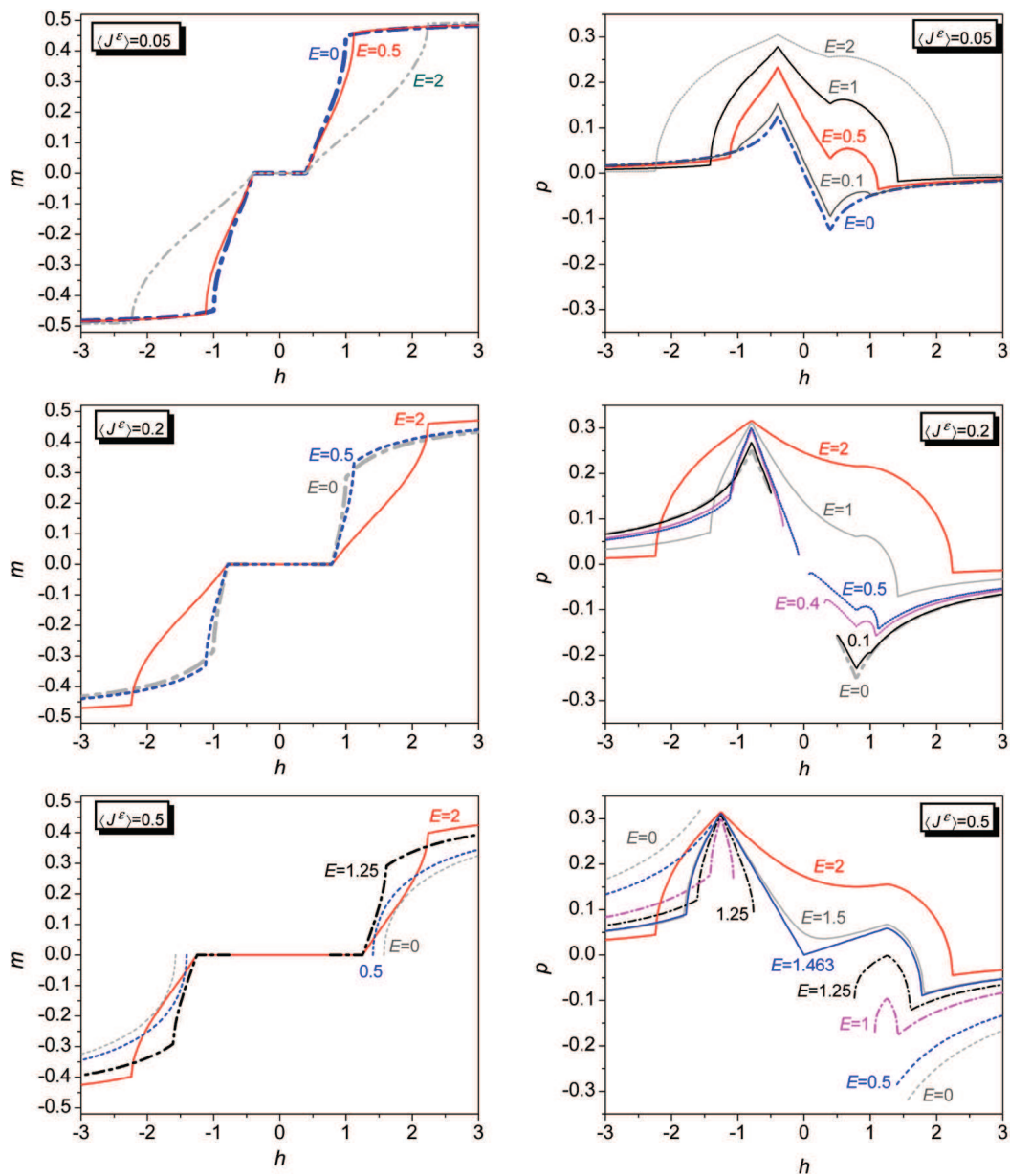


Рис. 4. Залежності намагніченості  $m$  та електричної поляризації  $p$  від магнітного поля при різних значеннях потоку енергії та електричного поля. Верхні, середні та нижні рисунки відповідають  $\langle J^E \rangle = 0,05, 0,2$  та  $0,5$  відповідно

водять до виникнення спонтанної намагніченості у моделях, що розглядалися у роботах [56, 85, 92], навіть при відсутньому магнітному полі; а також спонтанної електричної поляризації у моделі, що досліджувалась у праці [56], навіть при нульовому електричному полі. Внаслідок цих ефектів, а також того, що в нашій задачі  $h$  та  $E$  входять у  $\tilde{K}$ ,

$\tilde{R}$ ,  $\tilde{I}$  та  $\tilde{E}$  певним чином, має місце асиметрія в залежностях  $p(h)$  та  $p(E)$ . Водночас  $m(h)$  та  $m(E)$  є симетричними (див. рис. 4 та 5).

При достатньо малих значеннях потоку енергії (наприклад,  $\langle J^E \rangle = 0,05$ ; див. рис. 1, 3 та 4) в системі зі зміною  $h$  має місце каскад чотирьох фазових переходів  $\text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III}$  при будь-яких

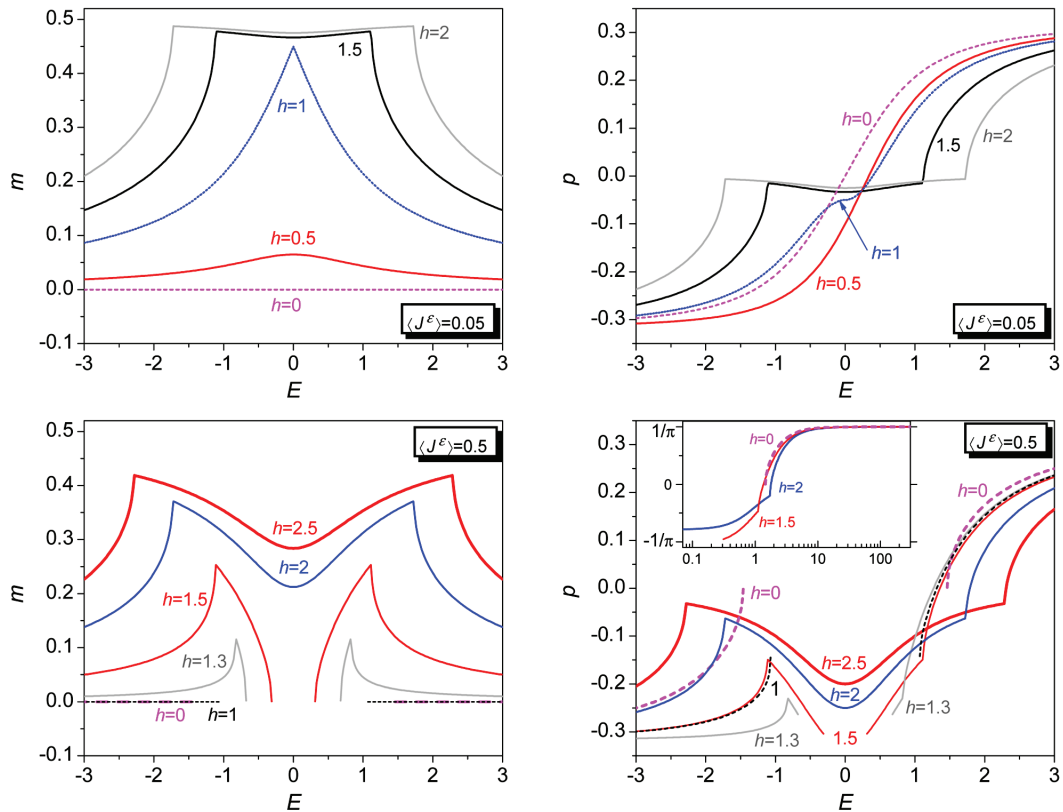


Рис. 5. Залежності намагніченості  $m$  та електричної поляризації  $p$  від електричного поля при різних значеннях потоку енергії та магнітного поля. Верхні та нижні рисунки відповідають  $\langle J^E \rangle = 0,05$  та  $0,5$  відповідно

$E$ , причому поведінка  $p(h)$  у фазі II є кардинально різною у випадках додатних та від'ємних  $h$ . Так, при додатних значеннях магнітного поля електрична поляризація у фазі II може бути немонотонною функцією  $h$  з одним максимумом, або монотонно зростаючою (у випадку, коли електричне поле є близьким до нуля). А от при  $h < 0$  у фазі II  $p(h)$  може бути лише монотонно зростаючою функцією при будь-яких значеннях електричного поля. Слід також зауважити, що при  $\langle J^E \rangle = 0,05$  у магнітонепорядкованій фазі I електрична поляризація може бути лише спадною функцією  $h$ .

При  $\langle J^E \rangle = 0,2$  (див. рис. 1, 3 та 4) на відміну від випадку  $\langle J^E \rangle = 0,05$  при малих полях  $h$  та  $E$  задане значення потоку енергії ( $\langle J^E \rangle = 0,2$ ) не може бути досягнутим (як вже говорилося вище), тобто є область, де не існує станів. Тому зі збільшенням  $h$  в системі має місце каскад чотирьох фазових переходів III  $\rightarrow$  II  $\rightarrow$  I  $\rightarrow$  II  $\rightarrow$  III лише при  $E > 0,5066$ , а при менших значеннях еле-

ктричного поля маємо два каскади по два переходи III  $\rightarrow$  II  $\rightarrow$  I та I  $\rightarrow$  II  $\rightarrow$  III. У фазі II залежності  $p(h)$  при різних  $E$  є аналогічними до відповідних залежностей для  $\langle J^E \rangle = 0,05$ : електрична поляризація у фазі II при додатних  $h$  може бути зростаючою, або ж немонотонною функцією магнітного поля, в той час як при  $h < 0$  вона може бути лише монотонно зростаючою. У фазі I поведінка  $p(h)$  у випадку  $\langle J^E \rangle = 0,2$  відрізняється від відповідної поведінки при  $\langle J^E \rangle = 0,05$ . Так, лише при великих та дуже малих значеннях електричного поля електрична поляризація є спадною функцією  $h$  у цій магнітонепорядкованій фазі. А от, наприклад, при  $E = 0,1, 0,4, 0,5$  вона є спадною функцією магнітного поля у немагнітній фазі лише при  $h < 0$ , тоді як при  $h > 0$   $p(h)$  є немонотонною функцією із одним максимумом.

У випадку великих значень потоку енергії, наприклад,  $\langle J^E \rangle = 0,5$  (див. рис. 1, 3 та 4), зі збільшенням  $h$  в системі відбувається каскад чоти-

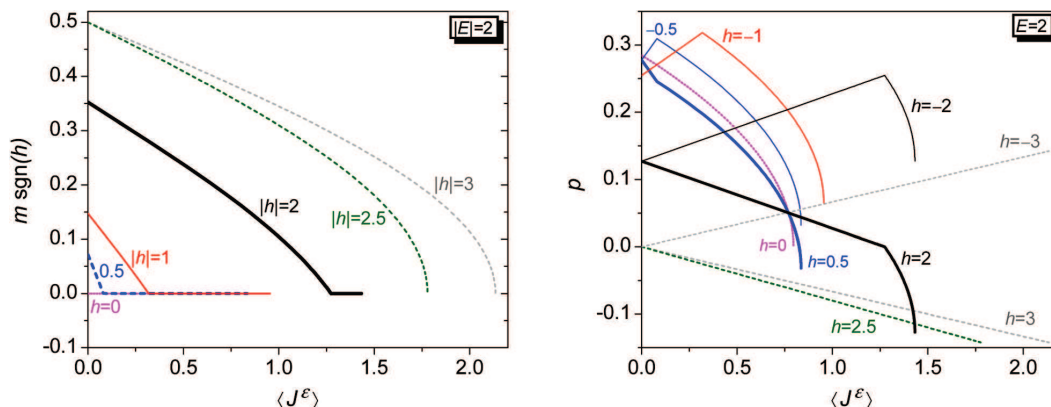


Рис. 6. Залежності намагніченості  $m$  та електричної поляризації  $p$  від потоку енергії при різних значеннях магнітного поля. Рисунок для  $m$  та  $p$  відповідають випадкам  $|E| = 2$  та  $E = 2$  відповідно

рьох фазових переходів  $\text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III}$  при  $E > 1,4634$ , два каскади переходів  $\text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I}$  та  $\text{I} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{III}$  при  $E_{\text{ТР}} < E < 1,4634$  ( $E_{\text{ТР}} = 0,7555$ ), а при  $E < E_{\text{ТР}}$  система може знаходитись лише у фазі III. Електрична поляризація у фазі II при від'ємних  $h$  є монотонно зростаючою функцією магнітного поля при довільних  $E$  (аналогічно, як у описаних вище випадках  $\langle J^E \rangle = 0,05$  та  $0,2$ ). В той самий час, на відміну від випадків  $\langle J^E \rangle = 0,05$  та  $0,2$ , при великих значеннях потоку енергії поляризація  $p(h)$  у фазі II при  $h > 0$  може бути лише монотонно спадною функцією. У магніто-непорядкованій фазі I поведінка поляризації при  $\langle J^E \rangle = 0,5$  також відрізняється від відповідної поведінки як при  $\langle J^E \rangle = 0,05$ , так і при  $\langle J^E \rangle = 0,2$ . Зокрема, при  $E = 2, 1,5, 1,463$  поляризація  $p(h)$  є немонотонною функцією з одним мінімумом, а при  $E = 1,25, 1$  вона є монотонно спадною (зростаючою) у областях I при  $h$  меншому (більшому) від нуля.

Усе, що було сказано вище про залежності поляризації від магнітного поля у немагнітній I та магнітопорядкованій II фазах стосується лише випадків скінченних  $E \geq 0$ . А те, як буде себе поводити  $p(h)$  при скінченних від'ємних  $E$  можна бачити із властивості  $p(\mathcal{I}, h, E) = -p(\mathcal{I}, -h, -E)$ , яка має місце при фіксованому потоці енергії.

У магнітопорядкованій ж фазі III, на відміну від фаз I та II, залежність поляризації від магнітного поля при будь-яких скінченних значеннях потоку енергії  $\langle J^E \rangle$  та електричного поля  $E$  (байдуже від його знака) є однозначною:  $p(h)$  – монотонно зростаюча функція як при до-

датних  $h$ , так і при від'ємних. Слід відзначити, що лише у цій магнітній фазі III електрична поляризація є парною функцією електричного поля ( $p(\langle J^E \rangle, \mathcal{I}, h, E) = p(\langle J^E \rangle, \mathcal{I}, h, -E)$ ). Це можна побачити на рис. 4, пам'ятаючи про властивість  $p(\langle J^E \rangle, \mathcal{I}, h, E) = -p(\langle J^E \rangle, \mathcal{I}, -h, -E)$ . Але більш наочно це буде видно далі при аналізі залежностей  $p$  від  $E$  (рис. 5).

Зауважимо, що при заданих електричному полі та потоці енергії на границі області, де не існують стани,  $p(h) = -p(-h)$ . Це можна побачити на рис. 4 для  $\langle J^E \rangle = 0,2$  при  $E = 0, 0,1, 0,4, 0,5$  та для  $\langle J^E \rangle = 0,5$  при  $E = 0, 0,5, 1, 1,25$ . У випадку, коли система знаходиться у фазі III ( $\langle J^E \rangle = 0,5, E = 0$  та  $0,5$ ), це можна пояснити зокрема властивістю  $p(\langle J^E \rangle, \mathcal{I}, h, E) = -p(\langle J^E \rangle, \mathcal{I}, -h, -E)$  та тим, що у цій фазі III поляризація є парною функцією електричного поля.

Залежності намагніченості від магнітного поля при будь-яких  $\langle J^E \rangle$  є достатньо тривіальними. У магнітопорядкованих фазах II та III  $m(h)$  є зростаючою функцією. Варто звернути увагу на залежності намагніченості у випадку великих  $\langle J^E \rangle$  при значеннях електричного поля, коли система може перебувати лише у фазі III (див. рис. 4;  $\langle J^E \rangle = 0,5, E = 0$  та  $0,5$ ). При великих  $|h|$  із його збільшенням намагніченість поступово прямує до насиченого значення. Поблизу ж границі області, де не існує станів,  $m(h)$  різко зростає із ростом  $h$ , причому на границі цієї області вона прямує до нуля. Забігаючи наперед відзначимо, що те, що на границі області неіснуючих станів  $m \rightarrow 0$ , можна також бачити як на рис. 5 (при  $\langle J^E \rangle = 0,5, h = 1,3, 1,5$ ),

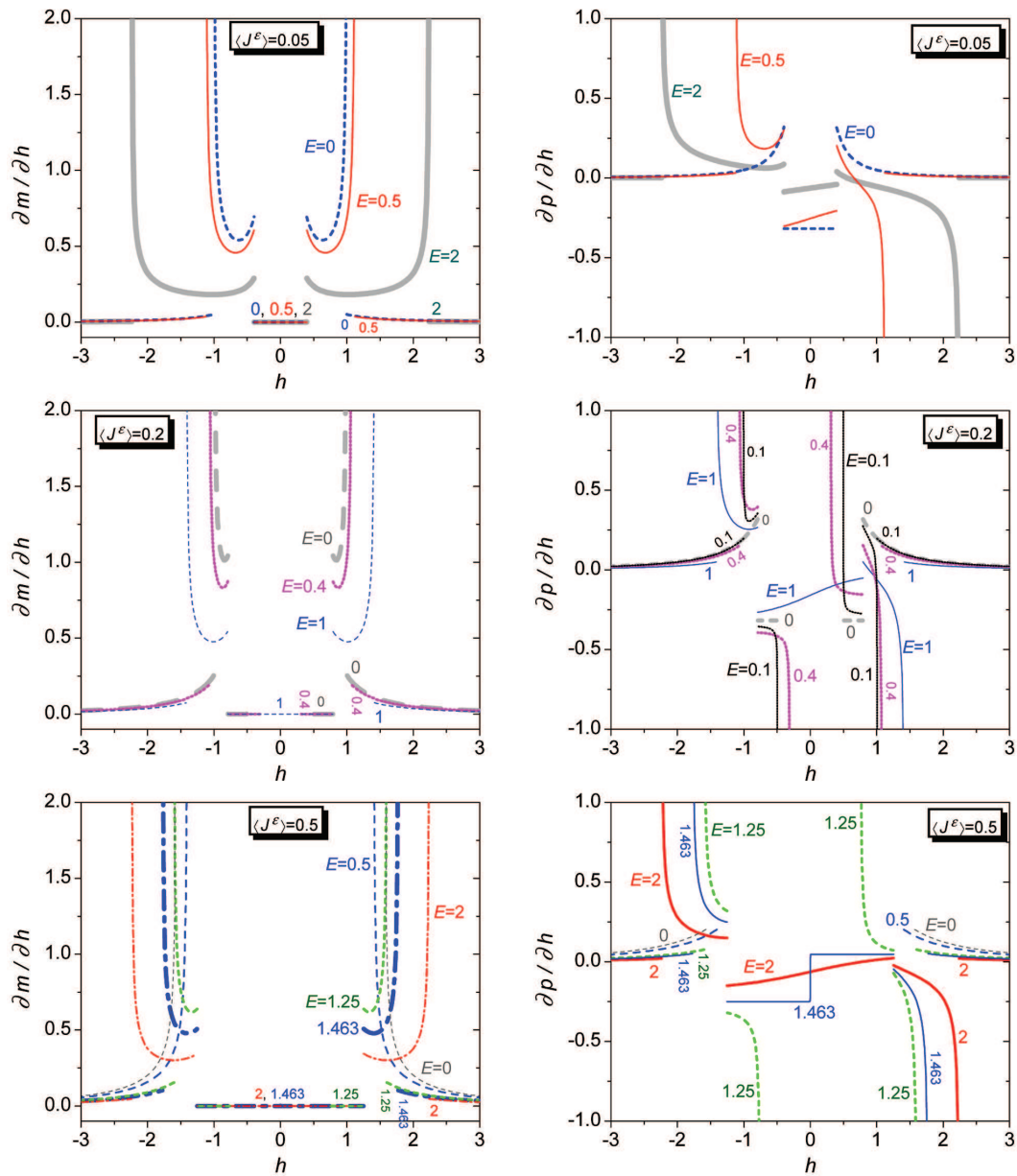


Рис. 7. Залежності магнітної  $\partial m / \partial h$  та магнетоелектричної  $\partial p / \partial h$  сприйнятливостей від магнітного поля при різних значеннях потоку енергії та електричного поля. Верхні, середні та нижні рисунки відповідають  $\langle J^E \rangle = 0,05, 0,2$  та  $0,5$  відповідно

так і на рис. 6 (при  $|E| = 0,5, |h| = 1,5, 2$  та при  $|E| = 2, |h| = 2,5, 3$ ).

Поведінка  $m(E)$  та  $p(E)$  у різних фазах та різних фазових переходах продемонстрована на рис. 5 (див. також рисунки 2 і 3). У немагнітній фазі I та у магнітвпорядкованій фазі II електрична поляризація зростає зі збільшенням електричного по-

ля як при від'ємних, так і при додатних  $E$  (причому  $p \rightarrow \pm 1/\pi$  при  $E \rightarrow \pm\infty$  і скінченних всіх решта параметрах моделі). В той же час у фазі III  $p(E)$  є спадною функцією при  $E < 0$ , тоді як при  $E > 0$  – зростаючою (оскільки поляризація у фазі III є парною функцією  $E$ ). Із сказаного вище зрозуміло, що у точці фазового переходу II  $\rightarrow$  III при

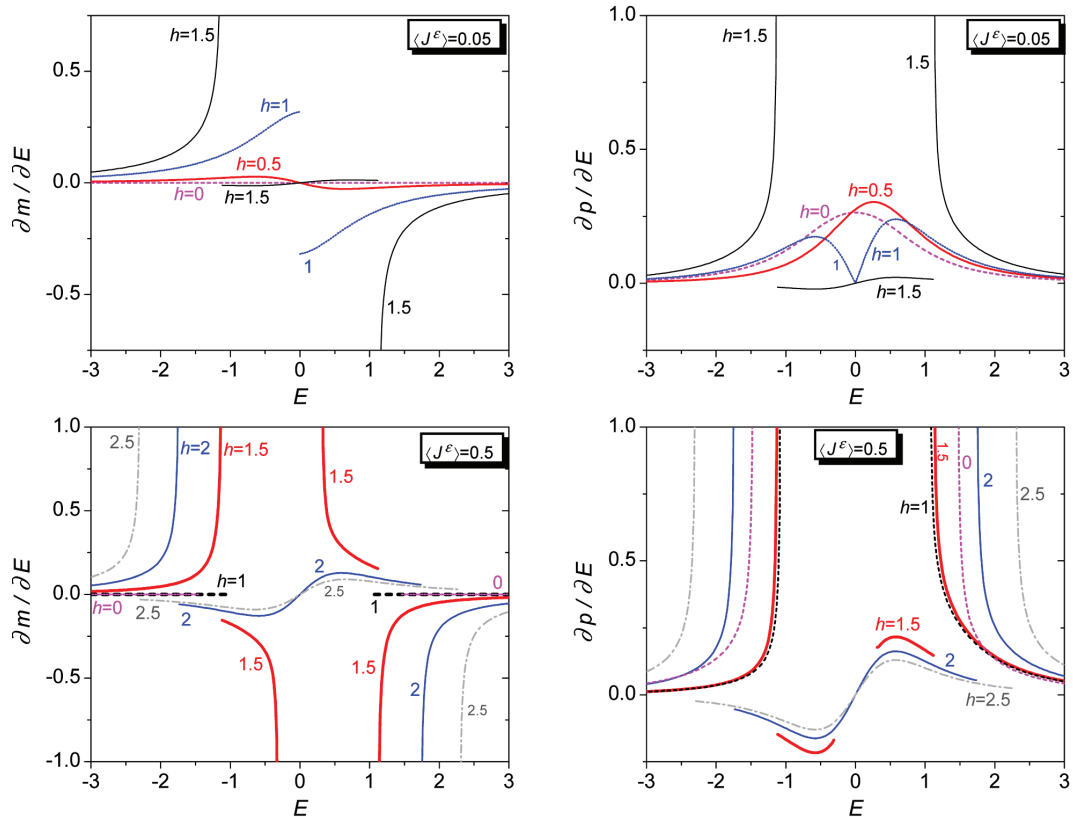


Рис. 8. Залежності магнетоелектричної  $\partial m / \partial E$  та електричної  $\partial p / \partial E$  сприйнятливостей від електричного поля при різних значеннях потоку енергії та магнітного поля. Верхні та нижні рисунки відповідають  $\langle J^E \rangle = 0,05$  та  $0,5$  відповідно

від’ємних значеннях електричного поля  $p(E)$  має злам і максимум, а у точці переходу III  $\rightarrow$  II при додатних полях  $E$  поляризація має злам, проте не має екстремуму. Цікавим є факт, що при заданих магнітному полі та потоці енергії на границі області, де не існують стани,  $p(E) = p(-E)$  не лише, коли система перебуває у фазі III (де поляризація є парною функцією  $E$ ), а й у фазі I (див. рис. 5 для  $\langle J^E \rangle = 0,5$  при  $h = 1,3, 1,5$  та  $h = 0, 1$ ).

Тепер дуже коротко про  $m(E)$ . Оскільки вона є парною функцією електричного поля, то достатньо обмежитися при розгляді лише додатними значеннями  $E$ . У цьому випадку зі збільшенням електричного поля намагніченість спадає у фазі II, а у фазі III – навпаки, зростає.

Усе сказане вище про залежності намагніченості та поляризації від електричного поля стосується лише випадків скінченних  $h \geq 0$ . А те, як буде себе поводити  $m(E)$  та  $p(E)$  при скінченних від’єм-

них  $h$  можна бачити із властивостей  $m(\mathcal{L}, h, E) = -m(\pm\mathcal{L}, -h, \pm E)$  та  $p(\mathcal{L}, h, E) = -p(\mathcal{L}, -h, -E)$ , які мають місце при фіксованому потоці енергії.

Насамкінець розглянемо залежності намагніченості  $m(\langle J^E \rangle)$  та електричної поляризації  $p(\langle J^E \rangle)$  при скінченних  $h$  та  $E$  (див. рис. 6, а також рис. 1 та 2). При достатньо великих значеннях модуля магнітного поля (наприклад, при  $|h| > 2,236$  для  $|E| = 2$ ) система перебуває у магнітовпорядкованій фазі III на всьому проміжку  $\langle J^E \rangle \in [0, \langle J^E_{\max} \rangle]$ , де існують стани. При менших ж значеннях  $|h|$  із збільшенням потоку енергії при  $\langle J^E \rangle < \langle J^E_{\max} \rangle$  відбувається фазовий перехід з магнітовпорядкованої фази II у магнітонепорядковану I. У фазах II та III  $p(\langle J^E \rangle)$  є практично лінійною функцією, причому при додатних магнітних полях – спадною, а при від’ємних – зростаючою. У цих магнітовпорядкованих фазах при фіксованому електричному полі має місце така властивість для поляри-

зації:  $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, h) = -p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, -h) + 2p(0, |h|)$ , причому  $p(0, h) = p(0, -h)$  є більшим від нуля (дорівнює нулю) у фазі II (III). У немагнітній фазі I поляризація є спадною функцією потоку енергії як при додатних, так і при від'ємних  $h$ .

Усе, що було сказано про залежності поляризації  $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$  стосується лише випадків скінченних  $E \geq 0$ . Як же себе буде поводити поляризація при скінченних від'ємних  $E$  можна бачити із властивості  $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, \mathcal{I}, h, E) = -p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle, \mathcal{I}, -h, -E)$ .

Намагніченість  $m(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$  у магнітовпорядкованих фазах є, природно, спадною (зростаючою) функцією при додатних (від'ємних) значеннях магнітного поля. Слід зауважити, що похідна  $\partial m / \partial \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  у фазі II в околі переходу  $II \rightarrow I$  є скінченною величиною, а у фазі III при  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle \rightarrow \langle J_{\max}^{\mathcal{E}} \rangle$  є безмежно великою.

### 5.3. Сприйнятливості

Проаналізуємо тепер коротко залежності магнітної  $\partial m / \partial h$ , електричної  $\partial p / \partial E$ , а також магнетоелектричних  $\partial m / \partial E$  та  $\partial p / \partial h$  сприйнятливостей від магнітного й електричного полів (див. рис. 7, 8). На цих рисунках наведені усі якісно різні польові залежності вищезгаданих сприйнятливостей.

Зауважимо, що із властивостей симетрії намагніченості й електричної поляризації легко бачити, що  $\partial m / \partial h$  є парною функцією надобмінної взаємодії та обох полів. У той же час  $\partial m / \partial E$  – непарна функція як  $h$ , так і  $E$ , і парна функція  $\mathcal{I}$ . Для сприйнятливості  $\partial p / \partial h$  при заданому потоці енергії має місце властивість: одночасна зміна напрямку обох полів не міняє цієї сприйнятливості, тоді як при зміні знака надобмінної взаємодії і напрямку одного із полів міняється знак  $\partial p / \partial h$  на протилежний. Електрична ж сприйнятливості не змінюється при заміні знаків будь-яких двох параметрів із трьох ( $\mathcal{I}$ ,  $h$  та  $E$ ).

З рисунків 7 та 8 видно, що усі сприйнятливості розбігаються у магнітовпорядкованій фазі II на границі із іншою магнітовпорядкованою фазою III. Винятком є лише випадок  $|E| \rightarrow 0$  для  $\partial p / \partial h$  (див. рис. 7 при  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,05, 0,2$ ). Потрібно сказати, що механізм вищезгаданих розбіжностей сприйнятливостей є відомим і аналогічним до того, що й у системах, розглянутих, наприклад, у роботах [57, 90]. Окрім того, в околі області, у якій не існують стани, мають місце розбіжності сприйня-

тливостей  $\partial m / \partial h$  та  $\partial m / \partial E$  у фазі III, а також  $\partial p / \partial E$  та  $\partial p / \partial h$  у немагнітній фазі I (за виключенням випадку  $|E| \rightarrow 0$ ; див. рис. 7 при  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,2$ ).

У фазі II магнітна сприйнятливості як функція  $h$  обов'язково є немонотонною, в той час як  $\partial p / \partial h$  може бути і монотонною, і немонотонною функцією магнітного поля в залежності від параметрів моделі (див. рис. 7). Електрична ж сприйнятливості в свою чергу має немонотонну залежність від електричного поля з двома екстремумами у фазі III. Це саме можна сказати і про  $\partial m / \partial E$  у цій же фазі, але лишень для таких значеннях  $h$ , коли заданий потік енергії є досяжним навіть при  $E = 0$  (див. рис. 8 для  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,05, h = 1,5$  та для  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = 0,5, h = 2, 2,5$ ).

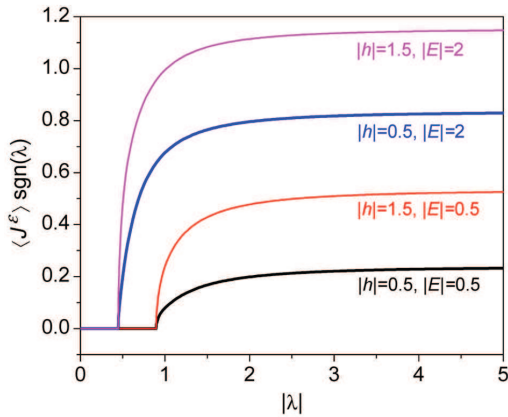
Важливо звернути увагу на те, що електричні сприйнятливості у магнітовпорядкованій фазі з двома точками Фермі можуть бути від'ємними (див. рис. 8). На нашу думку, це пов'язано із тим, що у нерівноважних стаціонарних станах можливі несподівані ефекти, наприклад, від'ємна теплоємність [93, 94].

## 6. Висновки

В роботі було отримано точні результати для ряду характеристик одновимірної спін-1/2  $XX$  моделі магнетоелектрика із стаціонарним потоком енергії, для врахування якого застосовано метод множника Лагранжа для квантових систем у випадку низьких температур. У цьому методі нерівноважний стаціонарний стан наближено розглядають як основний стан системи, що описується ефективним гамільтоніаном  $\mathcal{H}^{\mathcal{E}} = \mathcal{H}^{\text{ME}} - \lambda \mathcal{J}^{\mathcal{E}}$ .

Побудовано фазові діаграми у площинах магнітне поле – потік енергії ( $h, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ ), електричне поле – потік енергії ( $E, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ ), а також у площині ( $E, h$ ). Встановлено відмінності в поведінках у різних фазах електричної поляризації  $p$ , а також намагніченості  $m$ . Коротко перелічимо основні висновки, які можна зробити із проведеного дослідження при скінченному додатному  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ , та як додатних, так і від'ємних скінченних надобмінній взаємодії  $\mathcal{I}$  та полях  $h, E$ .

- Фазові діаграми в  $h - \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  площині мають однакову топологію при будь-яких значеннях електричного поля. В той самий час як ( $E, \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ ), так і ( $E, h$ ) діаграми можуть бути якісно відмінними при різних значеннях  $h$  та  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  відповідно. Так,



**Рис. 9.** Залежності потоку енергії  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  від керуючого ним поля  $\lambda$  при  $\mathcal{I} = |\lambda|$  та різних значеннях  $h$  і  $E$

на діаграмах в площині  $E - \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  магнітовпорядкована фаза з двома точками Фермі наявна при великих абсолютних значеннях магнітного поля і відсутня при малих його значеннях. На  $(E, h)$  фазових діаграмах область, де не існують стани, наявна лише при достатньо великих значеннях потоку енергії. Окрім того, при малих  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  лінії, які відповідають переходам між різними фазами, не перетинаються, а при великих значеннях потоку сходяться в одну точку, яка лежить на границі, нижче якої не існує станів.

- У фазах з чотирма точками Фермі (як магнітоневпорядкованій I, так і магнітовпорядкованій II) поляризація  $p(E)$  є зростаючою функцією. У магнітовпорядкованій ж фазі III з двома точками Фермі  $p$  зі збільшенням електричного поля зростає при  $hEI < 0$  та спадає при  $hEI > 0$ , причому лише у цій фазі вона є парною функцією  $E$ .

- Намагніченість  $m(E)$  у фазі II спадає при  $hE > 0$  та зростає при  $hE < 0$ . А у фазі III навпаки:  $m$  є зростаючою (спадною) функцією поля  $E$  при додатному (від'ємному) значенню добутку полів.

- У немагнітній фазі I поляризація є спадною функцією потоку енергії при  $E > 0$ , та зростаючою при від'ємному  $E$ . У магнітовпорядкованих фазах II та III  $p(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$  є практично лінійною функцією, причому спадною при  $h\mathcal{I} < 0$  та зростаючою при  $h\mathcal{I} > 0$ .

- Залежність  $m(\langle J^{\mathcal{E}} \rangle)$  у магнітовпорядкованій фазі II є досить близькою до лінійної. Похідна  $\partial m / \partial \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  у фазі II в околі переходу II  $\rightarrow$  I є скінченною величиною.

- У фазах з чотирма точками Фермі (I та II) поляризація може бути зростаючою, спадною або ж немонотонною (з одним екстремумом) функцією магнітного поля як при додатних, так і від'ємних значеннях надобмінної взаємодії. В той же час у магнітовпорядкованій фазі III з двома точками Фермі  $p$  із ростом  $h$  може лише зростати при  $\mathcal{I} < 0$  та спадати при  $\mathcal{I} > 0$ .

- У випадку, коли в ролі параметра задачі розглядається потік енергії  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ , а не поле  $\lambda$ , яке генерує цей потік, електрична поляризація  $p(E)$  при безмежно великих  $E$  виходить на насичення  $\pm 1/\pi$  при будь-яких значеннях  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ . Коли ж незалежною змінною є генеруюче потік енергії поле  $\lambda$  (див. [65]), то  $p(E) \rightarrow 0$  при  $E \rightarrow \pm\infty$  (за виключенням випадку  $\lambda \rightarrow 0$ , коли  $p(E) \rightarrow \pm 1/\pi$  при  $E \rightarrow \pm\infty$ ).

- Магнітна, електрична та магнетоелектричні сприйнятливості розбігаються у фазі II на границі із іншою магнітовпорядкованою фазою III. Винятком є лише випадок  $|E| \rightarrow 0$  для сприйнятливості  $\partial p / \partial h$ .

- Магнітна сприйнятливості завжди є немонотонною функцією  $h$  у фазі II, тоді як  $\partial p / \partial E$  обов'язково є немонотонною функцією електричного поля у фазі III.

*Висловлюю подяку Т.М. Верхоляку за інтерес до цієї роботи, допомогу, поради та корисні дискусії.*

#### ДОДАТОК

##### Залежності потоку енергії від поля, яке його генерує

В рамках методу множника Лагранжа потік енергії  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$  є зростаючою і, природно, непарною функцією поля  $\lambda$ , яке ним керує (див. рис. 9). Притім  $\langle J_{\max}^{\mathcal{E}} \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle J^{\mathcal{E}}(\lambda) \rangle$  є скінченною величиною, яка залежить від надобмінної взаємодії та магнітного й електричного полів. Тобто в застосованому нами методі система не може досягнути потоку більшого від  $\langle J_{\max}^{\mathcal{E}}(\mathcal{I}, h, E) \rangle$  за жодних обставин.

У тому, що енергетичний струм для моделі магнетоелектрика при заданих  $\mathcal{I}$ ,  $h$  та  $E$  є обмеженим, можна переконатись, окрім того, і аналітично, виходячи із виразу для локального потоку енергії (6) у операторній формі. Оскільки енергетичний струм на кожному вузлі ланцюжка є однаковим ( $\langle J_j^{\mathcal{E}} \rangle = \langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ ), то на основі (6) після ферміонізації легко отримати:

$$\langle J^{\mathcal{E}} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left[ hE \cos k + h\mathcal{I} \sin k - E\mathcal{I} \cos(2k) + \frac{E^2 - \mathcal{I}^2}{2} \sin(2k) \right] \langle n_k \rangle.$$

Важливо також зазначити, що  $\langle J^{\mathcal{E}}(\lambda, \mathcal{I}, h, E) \rangle$  є однозначною функцією керуючого ним поля (див. рис. 9). Тому в якості незалежної змінної зазвичай (з фізичних міркувань) розглядають не  $\lambda$ , а спряжений параметр  $\langle J^{\mathcal{E}} \rangle$ .

1. C.-Y. Hsieh, J. Liu, C. Duan, J. Cao. A Nonequilibrium Variational Polaron Theory to Study Quantum Heat Transport. *J. Phys. Chem. C* **123**, 17196 (2019).
2. S. Saryal, H.M. Friedman, D. Segal, B.K. Agarwalla. Thermodynamic uncertainty relation in thermal transport. *Phys. Rev. E* **100**, 042101 (2019).
3. K.W. Becker, H. Fehske, V.N. Phan. Projector-based renormalization approach to electron-hole-photon systems in their nonequilibrium steady state. *Phys. Rev. B* **99**, 035304 (2019).
4. H. Ness. Nonequilibrium density matrix in quantum open systems: Generalization for simultaneous heat and charge steady-state transport. *Phys. Rev. E* **90**, 062119 (2014).
5. D.S. Kosov. Lagrange multiplier based transport theory for quantum wires. *J. Chem. Phys.* **120**, 7165 (2004).
6. G. Rastelli, W. Belzig. Ground state cooling of nanomechanical resonators by electron transport. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **227**, 1885 (2019).
7. D. Karevski, T. Platini. Quantum nonequilibrium steady states induced by repeated interactions. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 207207 (2009).
8. T. Antal, Z. Rácz, L. Sasvári. Nonequilibrium steady state in a quantum system: One-dimensional transverse Ising model with energy current. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 167 (1997).
9. T. Antal, Z. Rácz, A. Rákos, G.M. Schütz. Isotropic transverse XY chain with energy and magnetization currents. *Phys. Rev. E* **57**, 5184 (1998).
10. Z. Rácz. Presence of energy flux in quantum spin chains: an experimental signature. *J. Stat. Phys.* **101**, 273 (2000).
11. V. Eisler, Z. Rácz, F. van Wijland. Magnetization distribution in the transverse Ising chain with energy flux. *Phys. Rev. E* **67**, 056129 (2003).
12. V. Eisler, Z. Zimborás. Entanglement in the XX spin chain with an energy current. *Phys. Rev. A* **71**, 042318 (2005).
13. J. Hide. A steady state entanglement witness. arXiv: 1102.0220
14. D. Karevski, R.J. Harris. Defect production in quench from a current-carrying non-equilibrium state. *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, 033204 (2016).
15. C. Mejía-Monasterio, T. Prosen, G. Casati. Fourier's law in a quantum spin chain and the onset of quantum chaos. *Europhys. Lett.* **72**, 520 (2005).
16. W.H. Aschbacher, C.-A. Pillet. Non-equilibrium steady states of the XY chain. *J. Stat. Phys.* **112**, 1153 (2003).
17. Y. Ogata. Nonequilibrium properties in the transverse XX chain. *Phys. Rev. E* **66**, 016135 (2002).
18. D.L. González-Cabrera, Z. Rácz, F. van Wijland. Casimir effect in the nonequilibrium steady state of a quantum spin chain. *Phys. Rev. A* **81**, 052512 (2010).
19. M.O. Lavrentovich. Steady-state properties of coupled hot and cold Ising chains. *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 085002 (2012).
20. X. Xu, K. Choo, V. Balachandran, D. Poletti. Transport and energetic properties of a ring of interacting spins coupled to heat baths. *Entropy* **21**, 228 (2019).
21. T. Antal, Z. Rácz, A. Rákos, G.M. Schütz. Transport in the XX chain at zero temperature: Emergence of flat magnetization profiles. *Phys. Rev. E* **59**, 4912 (1999).
22. M. Brenes, E. Mascarenhas, M. Rigol, J. Goold. High-temperature coherent transport in the XXZ chain in the presence of an impurity. *Phys. Rev. B* **98**, 235128 (2018).
23. J.L. Lancaster, J.P. Godoy. Persistence of power-law correlations in nonequilibrium steady states of gapped quantum spin chains. *Phys. Rev. Research* **1**, 033104 (2019).
24. V. Popkov, T. Prosen, L. Zadnik. Exact nonequilibrium steady state of open XXZ/XYZ spin-1/2 chain with Dirichlet boundary conditions. *Phys. Rev. Lett.* **124**, 160403 (2020).
25. M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, M. Olshanii. Relaxation in a completely integrable many-body quantum system: An ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1D lattice hard-core bosons. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 050405 (2007).
26. E. Ilievski, J. De Nardis, B. Wouters, J.-S. Caux, F.H.L. Essler, T. Prosen. Complete generalized Gibbs ensembles in an interacting theory. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 157201 (2015).
27. D. Liu, Y. Zhang, Y. Liu, G.-L. Long. Entanglement in the ground state of an isotropic three-qubit transverse XY chain with energy current. *Chin. Phys. Lett.* **24**, 8 (2007).
28. B.-Q. Liu, B. Shao, J. Zou. Entanglement of two qubits coupled to an XY spin chain: Role of energy current. *Phys. Rev. A* **80**, 062322 (2009).
29. Z.-M. Wang, B. Shao, P. Chang, J. Zou. Quantum state transfer in a Heisenberg XY chain with energy current. *Physica A* **387**, 2197 (2008).
30. Y.-C. Qiu, Q.-Q. Wu, W.-L. You. Energy dynamics in a generalized compass chain. *J. Phys.: Condens. Matter* **28**, 496001 (2016).
31. M. Fiebig. Revival of the magnetoelectric effect. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **38**, R123 (2005).
32. M. Fiebig, T. Lottermoser, D. Meier, M. Trassin. The evolution of multiferroics. *Nat. Rev. Mater.* **1**, 16046 (2016).
33. K.F. Wang, J.-M. Liu, Z.F. Ren. Multiferroicity: The coupling between magnetic and polarization orders. *Adv. Phys.* **58**, 321 (2009).
34. Y. Tokura, Sh. Seki, N. Nagaosa. Multiferroics of spin origin. *Rep. Prog. Phys.* **77**, 076501 (2014).
35. D.I. Khomskii. *Transition Metal Compounds* (Cambridge University Press, 2014) 487 p.
36. I.V. Solovyev, T.V. Kolodiaznyi. Experimental and first-principles studies of magnetism and magnetoelectric effect in Co<sub>4</sub>Nb<sub>2</sub>O<sub>9</sub> and Co<sub>4</sub>Ta<sub>2</sub>O<sub>9</sub>. *Phys. Rev. B* **94**, 094427 (2016).
37. *Multiferroic Materials: Properties, Techniques, and Applications (Series in Materials Science and Engineering)*. Edited by J. Wang (CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017) 392 p. [ISBN: 9781482251531].



38. E.A. Eliseev, A.N. Morozovska, M.D. Glinchuk, B.Y. Zaulychny, V.V. Skorokhod, R. Blinc. Surface-induced piezomagnetic, piezoelectric, and linear magnetoelectric effects in nanosystems. *Phys. Rev. B* **82**, 085408 (2010).
39. M.D. Glinchuk, E.A. Eliseev, Y. Gu, L.-Q. Chen, V. Gopalan, A.N. Morozovska. Electric-field induced ferromagnetic phase in paraelectric antiferromagnets. *Phys. Rev. B* **89**, 014112 (2014).
40. М.Д. Глинчук, В.В. Хіст, Г.М. Морозовська. Відновлення інтересу до магнітоелектричного ефекту у нанодієлектриках. *Укр. фіз. журн.* **13**, 26 (2018).
41. I.E. Dzyaloshinskii. On the magneto-electrical effect in antiferromagnets. *Sov. Phys. JETP* **10**, 628 (1960).
42. D.N. Astrov. The magnetoelectric effect in antiferromagnets. *Sov. Phys. JETP* **11**, 708 (1960).
43. H. Katsura, N. Nagaosa, A.V. Balatsky. Spin current and magnetoelectric effect in noncollinear magnets. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 057205 (2005).
44. I.A. Sergienko, E. Dagotto. Role of the Dzyaloshinskii–Moriya interaction in multiferroic perovskites. *Phys. Rev. B* **73**, 094434 (2006).
45. S. Seki, T. Kurumaji, S. Ishiwata, H. Matsui, H. Murakawa, Y. Tokunaga, Y. Kaneko, T. Hasegawa, Y. Tokura. Cupric chloride  $\text{CuCl}_2$  as an  $S = 1/2$  chain multiferroic. *Phys. Rev. B* **82**, 064424 (2010).
46. S. Seki, Y. Yamasaki, M. Soda, M. Matsuura, K. Hirota, Y. Tokura. Correlation between spin helicity and an electric polarization vector in quantum-spin chain magnet  $\text{LiCu}_2\text{O}_2$ . *Phys. Rev. Lett.* **100**, 127201 (2008).
47. F. Schrettle, S. Krohns, P. Lunkenheimer, J. Hemberger, N. Büttgen, H.-A. Krug von Nidda, A.V. Prokofiev, A. Loidl. Switching the ferroelectric polarization in the  $S = 1/2$  chain cuprate  $\text{LiCuVO}_4$  by external magnetic fields. *Phys. Rev. B* **77**, 144101 (2008).
48. Y. Wang, J. Li, D. Viehland. Magnetoelectrics for magnetic sensor applications: status, challenges and perspectives. *Materials Today* **17**, 269 (2014).
49. N. Ortega, A. Kumar, J.F. Scott, R.S. Katiyar. Multifunctional magnetoelectric materials for device applications. *J. Phys.: Condens. Matter* **27**, 504002 (2015).
50. F. Matsukura, Y. Tokura, H. Ohno. Control of magnetism by electric fields. *Nature Nanotechnology* **10**, 209 (2015).
51. I. Kézsmárki, U. Nagel, S. Bordács, R.S. Fishman, J.H. Lee, H.T. Yi, S.-W. Cheong, T. Rőöm. Optical diode effect in the room-temperature multiferroic  $\text{BiFeO}_3$ . *Phys. Rev. Lett.* **115**, 127203 (2015).
52. M. Sato, Sh. Takayoshi, T. Oka. Laser-driven multiferroics and ultrafast spin current generation. *Phys. Rev. Lett.* **117**, 147202 (2016).
53. D.M. Juraschek, M. Fechner, A.V. Balatsky, N.A. Spaldin. Dynamical multiferroicity. *Phys. Rev. Materials* **1**, 014401 (2017).
54. M. Azimi, M. Sekania, S.K. Mishra, L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, J. Berakdar. Pulse and quench induced dynamical phase transition in a chiral multiferroic spin chain. *Phys. Rev. B* **94**, 064423 (2016).
55. M. Brockmann, A. Klümper, V. Ohanian. Exact description of magnetoelectric effect in the spin-1/2  $XXZ$  chain with Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *Phys. Rev. B* **87**, 054407 (2013).
56. O. Menchyshyn, V. Ohanian, T. Verkholyak, T. Krokholmalskii, O. Derzhko. Magnetism-driven ferroelectricity in spin- $\frac{1}{2}$   $XY$  chains. *Phys. Rev. B* **92**, 184427 (2015).
57. O. Baran, V. Ohanian, T. Verkholyak. Spin-1/2  $XY$  chain magnetoelectric: Effect of zigzag geometry. *Phys. Rev. B* **98**, 064415 (2018).
58. V. Ohanian. Influence of  $XY$  anisotropy on a magnetoelectric effect in spin-1/2  $XY$  chain in a transverse magnetic field. *Condens. Matter Phys.* **23**, 43704 (2020).
59. J. Strečka, L. Gálisová, T. Verkholyak. Enhanced magnetoelectric effect near a field-driven zero-temperature quantum phase transition of the spin-1/2 Heisenberg-Ising ladder. *Phys. Rev. E* **101**, 012103 (2020).
60. W.-L. You, G.-H. Liu, P. Horsch, A.M. Oleś. Exact treatment of magnetism-driven ferroelectricity in the one-dimensional compass model. *Phys. Rev. B* **90**, 094413 (2014).
61. H. Čenčariková, J. Strečka. Enhanced magnetoelectric effect of the exactly solved spin-electron model on a doubly decorated square lattice in the vicinity of a continuous phase transition. *Phys. Rev. E* **98**, 062129 (2018).
62. K. Saito, S. Takesue, S. Miyashita. Thermal conduction in a quantum system. *Phys. Rev. E* **54**, 2404 (1996).
63. X. Zotos, F. Naef, P. Prelovšek. Transport and conservation laws. *Phys. Rev. B* **55**, 11029 (1997).
64. A. Klümper, K. Sakai. The thermal conductivity of the spin- $\frac{1}{2}$   $XXZ$  chain at arbitrary temperature. *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 2173 (2002).
65. О.Р. Баран. Ефект потоку енергії у одновимірній спин-1/2  $XX$  моделі магнетоелектрика. Метод множника Лагранжа. Препринт ICMP-20-06U, Львів, 2020, 27 с.
66. I.E. Dzyaloshinskii. Thermodynamic theory of “weak” ferromagnetism in antiferromagnetic substances. *Sov. Phys. JETP* **5**, 1259 (1957).
67. T. Moriya. Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism. *Phys. Rev.* **120**, 91 (1960).
68. V.M. Kontorovich, V.M. Tsukernik. Spiral structure in a one-dimensional chain of spins. *Sov. Phys. JETP* **25**, 960 (1967).
69. V.N. Krivoruchko. Magnon bound-states in an anisotropic chain of spin with the Dzyaloshinskii interaction. *Fiz. Nizk. Temp.* **12**, 872 (1986).
70. A.A. Zvyagin. The ground-state structure of a spin chain with the Dzyaloshinsky type interaction. *Fiz. Nizk. Temp.* **15**, 977 (1989).
71. O.V. Derzhko, A.Ph. Moina. Statistical mechanics of one-dimensional  $s = 1/2$  anisotropic  $XY$  model in transverse field with Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *Condens. Matter Phys.* No. 3, 3 (1994).
72. O. Derzhko, A. Moina.  $1D$   $S = 1/2$  anisotropic  $XY$  model in transverse field with Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *Ferroelectrics* **153**, 49 (1994).

73. O. Derzhko, T. Verkholyak. Effects of Dzyaloshinskii–Moriya interaction in the dynamics of  $s = 1/2$   $XX$  chain. *Czech. J. Phys.* **54**, D531 (2004).
74. O. Derzhko, T. Verkholyak, T. Krokhmalkii, H. Büttner. Dynamic probes of quantum spin chains with the Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *Phys. Rev. B* **73**, 214407 (2006).
75. O. Derzhko, T. Verkholyak. Dynamic structure factors of the spin- $1/2$   $XX$  chain with Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 104711 (2006).
76. N. Avalishvili, B. Beradze, G.I. Japaridze. Magnetic phase diagram of a spin  $S = 1/2$  antiferromagnetic two-leg ladder with modulated along legs Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *Eur. Phys. J. B* **92**, 262 (2019).
77. F.K. Fumani, B. Beradze, S. Nemati, S. Mahdavifar, G.I. Japaridze. Quantum correlations in the spin- $1/2$  Heisenberg  $XXZ$  chain with modulated Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *J. Magn. Magn. Mater.* **518**, 167411 (2021).
78. F. Heidrich-Meisner, A. Honecker, D.C. Cabra, W. Brenig. Zero-frequency transport properties of one-dimensional spin- $1/2$  systems. *Phys. Rev. B* **68**, 134436 (2003).
79. M. Michel, O. Hess, H. Wichterich, J. Gemmer. Transport in open spin chains: A Monte Carlo wave-function approach. *Phys. Rev. B* **77**, 104303 (2008).
80. L.-A. Wu, D. Segal. Energy flux operator, current conservation and the formal Fourier’s law. *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 025302 (2009).
81. R. Steinigeweg, J. Gemmer, W. Brenig. Spin and energy currents in integrable and nonintegrable spin- $1/2$  chains: A typicality approach to real-time autocorrelations. *Phys. Rev. B* **91**, 104404 (2015).
82. A.M. Tsvelik. Incommensurate phases of quantum one-dimensional magnetics. *Phys. Rev. B* **42**, 779 (1990).
83. A.A. Zvyagin, A. Klümper. Quantum phase transitions and thermodynamics of quantum antiferromagnets with next-nearest-neighbor couplings. *Phys. Rev. B* **68**, 144426 (2003).
84. H. Frahm. Integrable spin- $1/2$   $XXZ$  Heisenberg chain with competing interactions. *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 1417 (1992).
85. I. Titvinidze, G.I. Japaridze. Phase diagram of the spin  $S = 1/2$  extended  $XY$  model. *Eur. Phys. J. B* **32**, 383 (2003).
86. T. Krokhmalkii, O. Derzhko, J. Stolze, T. Verkholyak. Dynamic properties of the spin- $1/2$   $XY$  chain with three-site interactions. *Phys. Rev. B* **77**, 174404 (2008).
87. M. Topilko, T. Krokhmalkii, O. Derzhko, V. Ohanyan. Magnetocaloric effect in spin- $1/2$   $XX$  chains with three-spin interactions. *Eur. Phys. J. B* **85**, 278 (2012).
88. E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis. Two Soluble Models of an Antiferromagnetic Chain. *Ann. Phys. (N.Y.)* **16**, 407 (1961).
89. O. Derzhko. Jordan–Wigner fermionization for spin- $1/2$  systems in two dimensions: A brief review. *J. Phys. Studies* **5** No. 1, 49 (2001).
90. T. Krokhmalkii, T. Verkholyak, O. Baran, V. Ohanyan, O. Derzhko. Spin- $1/2$   $XX$  chain in a transverse field with regularly alternating  $g$  factors: Static and dynamic properties. *Phys. Rev. B* **102**, 144403 (2020).
91. M. Fabrizio. Superconductivity from doping a spin-liquid insulator: A simple one-dimensional example. *Phys. Rev. B* **54**, 10054 (1996).
92. A.A. Zvyagin. Quantum phase transitions in low-dimensional quantum spin systems with incommensurate magnetic structures. *Phys. Rev. B* **72**, 064419 (2005).
93. R.K.P. Zia, E.L. Praestgaard, O.G. Mouritsen. Getting more from pushing less: Negative specific heat and conductivity in nonequilibrium steady states. *Am. J. Phys.* **70**, 384 (2002).
94. E. Boksenbojm, C. Maes, K. Netočný, J. Pešek. Heat capacity in nonequilibrium steady states. *Europhys. Lett.* **96**, 40001 (2011).

Одержано 26.02.21

O.R. Baran

ENERGY FLUX EFFECT  
IN THE ONE-DIMENSIONAL SPIN- $1/2$   
 $XX$  MODEL OF MAGNETOELECTRIC.  
LAGRANGE MULTIPLIER METHOD

The Lagrange multiplier method is applied to study a nonequilibrium steady state with energy flux in the one-dimensional spin- $1/2$   $XX$  model of a magnetoelectric with the Katsura–Nagaosa–Balatsky mechanism at sufficiently low temperatures. With the help of the Jordan–Wigner transformation, the problem is reduced to that with the Hamiltonian for spinless noninteracting fermions and can be solved exactly. A number of phase diagrams are plotted, and the dependences of the magnetization, electric polarization, and various susceptibilities on the magnetic and electric fields, as well as on the energy flux, are calculated.

*Keywords:* one-dimensional  $XX$  model, magnetoelectric, nonequilibrium steady states, energy flux, Lagrange multiplier method.