А.А. ГУРИН

Інститут ядерних досліджень НАН України
(Просп. Науки, 47, Київ 03680; e-mail: aagurin@ukr.net)

УДК 539

КВАНТОВА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОНА З САМОУЗГОДЖЕНИМ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИМ ПОЛЕМ

Розглянуто можливість побудови теорії електрона на основі рівняння Дірака, у якому потенціали електромагнітного поля визначаються як такі, що створюються самим електроном. Показано, що для сукупного електромагнітного і біспінорного поля ізольованого електрона виконується закон збереження енергії. Сформульовано стаціонарну квазілінійну систему рівнянь для сукупного електростатичного і біспінорного поля в термінах алгебри кватерніонів. Виконано аналіз квазілінійної задачі для електростатичної моделі електрона; показано відсутність сингулярності компонент біспінорного поля та густини електричного заряду, розподіленого в межах центральної області радіусом порядку комптонівської довжини.

Ключові слова: рівняння Дірака, рівняння Клейна–Гордона, закон збереження заряду, електромагнітне поле, біспінор, кватерніон.

1. Вступ

Електрон є головним об'єктом квантової електродинаміки, яка своїми основними успіхами зобов'язана релятивістичному рівнянню Дірака [1]. Теорія Дірака виявилася достатньою для опису всіх спінових електронних ефектів у заданих електромагнітних полях і надала основу для формування лептонної групи в теорії елементарних частинок. Але для більш важких частинок – баріонів – рівняння Дірака виявилося недостатнім. Дірак пояснював це тим, що електрон не має внутрішньої структури, і вважав, що створена ним теорія пристосована виключно для міжчастинкової взаємодії з участю електрона. Його точка зору утвердилася в сучасній квантовій електродинаміці [1, 2]. Можливо, цим табу пояснюється брак публікацій у сучасній літературі щодо теорії, яка позбавила б електрон точкового, безструктурного характеру. Усі спроби пов'язати параметри електрона з особливостями просторового розподілу його заряду в обмеженій області відійшли в минуле. Невизнаною залишилася й борнівська нелінійна модифікація рівнянь Максвелла, яка обмежує поле електрона й енергію цього поля, але зберігає точковий електрон для теорії поля і релятивістичної механіки [3]. Коментуючи цей та інші приклади значних зусиль створити картину електрона з ненульовими розмірами області локалізації електронного заряду без проблем для теорії поля, Р. Фейнман емоційно оцінив ситуацію в цілому як драматичну [4]. Саме цей огляд проблеми теорії електрона дозволяє вважати актуальними дослідження польових не сингулярних структур, локалізованих у класичних межах центральної області електрона.

Головна ідея даної роботи полягає в ототожненні рівняння безперервності, що випливає з рівняння Дірака, та закону збереження заряду в рівняннях електромагнітного поля, створюваного електроном. Тобто дійсна величина $\bar{\psi}\psi$, нормованої на 1 для біспінорного поля ψ в теорії Дірака, трактується як густина заряду ρ, нормована на заряд електрона: $\rho = e\bar{\psi}\psi$. Це припущення дозволяє поєднати біспінорне й електромагнітне поля електрона в замкнену систему, яка характеризується своїм законом збереження енергії. Такий підхід дозволяє сформулювати квазілінійне рівняння Дірака з самоузгодженим полем, в якому електромагнітні потенціали розглядаються не як потенціали зовнішнього поля, як це стандартно постулюється, а як такі, що створюються просторово розподіленим зарядом $e\bar{\psi}\psi$ і струмом електрона.

У цих термінах сформульовано електростатичну модель вільного, ізольованого від зовнішніх впливів електрона з центрально симетричним біспінорним та електричним полем і виконано аналіз структури його компонент, який доводить обмеженість величини ρ та її локалізацію в центральній зоні розміром порядку комптонівської довжини $r_e\hbar/mc = 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ см. На більших відстанях електронне поле відповідає класичному закону Кулона. Самоузгоджене електромагнітне та біспінорне поля електрона розглядається в одночастинковому фазовому просторі, де дійсне електромагнітне поле задається у шредінгерівському координатному представленні і є квазікласичним з погляду квантової електродинаміки ферміонного і фотонного полів.

Несуперечливість підходу ілюструється в п. 2 доведенням закону збереження енергії в сукупній системі електромагнітного та біспінорного полів електрона. У п. 3 сформульована стаціонарна задача у вигляді системи рівнянь другого порядку для спінорів, що виникає в результаті розщеплення біспінорної задачі методом лінійного перетворення. Цей метод дозволяє представити спінори кватерніонами з дійсними параметрами та скористатися тією ж алгеброю гіперкомплексних чисел, яка використовується в теорії матриць Дірака. У п. 4 остаточно формулюється інваріантна щодо інверсії координат центрально симетрична задача, у якій електростатичне поле є визначальним, а ефекти магнітного поля нехтуються. Система має вигляд диференціальних рівнянь другого порядку для скалярної і радіальної компонент кватерніонів та рівняння Пуассона для електростатичного потенціалу. Рівняння дещо подібні до тих, що відомі в теорії атома водню. Асимптотичний аналіз показує регулярність електронних полів у центрі системи координат, де густина заряду насичується, а електричне поле зникає. Таким чином досягається оцінка радіуса області локалізації електронного заряду величиною порядку комптонівської довжини r_e.

2. Закон збереження енергії електромагнітного і квантового полів електрона

Корисним вступом до самоузгодженої моделі електрона буде доведення закону збереження енергії електромагнітного і квантового полів ізольованого електрона, що випливає з рівняння Дірака для біспінорів ψ:

$$
\begin{aligned}
&i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi,\\
&H = e\varphi + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P} - \varepsilon_0\beta, \quad \varepsilon_0 = mc^2,\\
&\mathbf{P} = -ic\hbar\nabla - e\mathbf{A}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

та рівняння другого порядку, яке є безпосереднім наслідком цього рівняння й узагальнює скалярне рівняння Клейна–Гордона [1, 5]:

$$
\begin{aligned}
&K\psi = i\hbar e\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{E} + i\iota\,\mathbf{H})\,\psi,\\
&K = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2 - \mathbf{P}^2 - \varepsilon_0^2,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

K – скалярний оператор Клейна–Гордона. В (1), (2) використовуються дещо змінені позначення для 4-рядних матриць в теорії Дірака, які звично записуються у вигляді дворядних матриць, елементами яких є дворядні матриці 0, I та матриці Паулі $\boldsymbol{\sigma}$ і визначають алгебру множення лінійних форм $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a} = \sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z$ для будь-яких векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \iota = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\\
&(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b},\\
&(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\iota\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}.
\end{aligned}
$$

Потенціали електромагнітного поля в рівнянні Дірака визначаються зовнішніми електричними зарядами і струмом у рамках електродинаміки:

$$
\begin{aligned}
&\Box\varphi = -4\pi\rho, \quad \Box\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}/c,\\
&\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial}{c\partial t}\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

де $\Box$ – оператор Даламбера. При цьому значення біспінорів ψ можуть позначатися на величинах φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ тільки в рамках додаткового описання зовнішніх джерел поля ρ, $\mathbf{j}$. Система рівнянь (3) доповнюється законом збереження розподіленого у просторі заряду

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{4}$$

Теорія Дірака також породжує рівняння безперервності (4), якщо позначенням ρ, $\mathbf{j}$ надати квантового змісту:

$$\rho = e\bar{\psi}\psi, \quad \mathbf{j} = ce\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi. \tag{5}$$

Риска позначає діраківське спряження біспінорів. Але в квантовій теорії йдеться про одну частинку, а величина $\bar{\psi}\psi$ в (4) інтерпретується як густина ймовірності присутності електрона у фізичному просторі, інтегральна величина якої дорівнює 1: $\int d\mathbf{r}\bar{\psi}\psi = 1$. Величина $e\bar{\psi}\psi$ має розмірність густини заряду, а (4) є квантовим розширенням закону його збереження.

З рівняння (2) випливає ще один закон збереження:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\bar{\psi}\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\psi\right) + e\varphi\bar{\psi}\psi\right] - \\ - c\nabla\cdot\left[\frac{i\hbar}{2}c(\bar{\psi}\nabla\psi - \nabla\bar{\psi}\psi) + e\mathbf{A}\bar{\psi}\psi\right] = \\ = ce\mathbf{E}\cdot\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi. \tag{6}$$

Аналогічне рівняння обговорюється для ілюстрації непридатності скалярного рівняння Клейна–Гордона служити основою для релятивістської квантової теорії, оскільки величина під знаком похідної по часу в (6) не може бути визнана густиною ймовірності [6]. Але можна надати іншого змісту рівнянню (6). Природно трактувати його як рівняння балансу енергії, що очевидно зі спостереження розмірності його складових. Важливим результатом біспінорного аналізу є наявність правої частини в (6), яка визначається внеском електричного поля. Якщо вираз під знаком похідної по часу трактувати як щільність енергії квантового поля електрона, то останній член являє собою джерело енергії, що передається електронному струму електричним полем в одиниці об'єму за одиницю часу: $ce\,\mathbf{E}\cdot\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$.

Таке ж джерело присутнє в законі збереження електромагнітної енергії, яке витікає з рівнянь Максвела, куди воно входить із протилежним знаком:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi}(H^2+E^2)\right] + \operatorname{div}\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}. \tag{7}$$

Для ізольованого електрона джерелом енергії його власного електромагнітного поля виступає електронний заряд, і природно допустити, що джерелом цього поля в рівнянні (7) виступає електричний струм, визначений квантовою теорією: $\mathbf{j} = ce\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi$. Просте складання рівнянь (6) і (7) породжує закон збереження сумарної енергії квантового і електромагнітного поля електрона:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{8\pi}(H^2+E^2) - \frac{\hbar}{2i}\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - e\varphi\psi\bar{\psi}\right\} + \\ + \operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} + \frac{\hbar c^2}{2i}(\bar{\psi}\nabla\psi - \nabla\bar{\psi}\psi) - \\ - ce\mathbf{A}\psi\bar{\psi}\right\} = 0. \tag{8}$$

У такому вигляді цей результат відповідає рівнянню Дірака, якщо електромагнітні потенціали виразити безпосередньо через білінійні форми біспінорів: $\Box\varphi = -4\pi e\bar{\psi}\psi$, $\Box\mathbf{A} = -4\pi e\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi$ за умови нормування $\int d\mathbf{r}\bar{\psi}\psi = 1$. Таким чином рівняння Дірака перетворюється на квазілінійне диференціальне рівняння з самоузгодженим полем усамітненого електрона.

Природно розглядати задачу описання електронного поля в квантово стаціонарному наближенні, беручи хвильову функцію $\psi(t,\mathbf{r})$ у вигляді $\exp\{-i\varepsilon t/\hbar\}\psi(\mathbf{r})$, у нерухомій системі координат, зв'язаною умовно з центром електрона. При цьому густина енергії в рівнянні (8) дається формулою $(H^2+E^2)/(8\pi) - \rho\varphi + \varepsilon\bar{\psi}\psi$, яка ілюструє евристичний аспект запропонованого підходу до можливості інтерпретації позитивної величини $\bar{\psi}\psi$ для квантово-релятивістської моделі електрона.

3. Квазілінійна система рівнянь з самоузгодженим полем

Рівняння другого порядку (2) подвоює з 4 до 8 число комплексних параметрів, що підлягають визначенню, тому розв'язок цього рівняння має бути якось зумовлений. Ця проблема розв'язується переходом до спінорів $\psi_\pm$, які визначаються через спінорні складові ψ_1, ψ_2 біспінора ψ: $\psi_\pm = \psi_1 \pm \psi_2$, і висновком, що можна обмежитися спінорним рівнянням другого порядку для одного з них. Процедура, яка вводить нові спінорні компоненти та розщеплює рівняння (2), найпростіше реалізується за допомогою унітарного дійсного перетворення U:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad U^2 = 1,$$
$$U\psi = U\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

U діагоналізує матриці симетричного типу, зокрема:

$$U\boldsymbol{\alpha}U = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Застосовуючи ліве множення на U до рівняння (2), одержуємо два спінорні рівняння другого порядку:

$$[K - ice\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\pm\mathbf{E} + i\mathbf{H})]\psi_\pm = 0. \qquad (11)$$

Формули (5) переписуються в термінах $\psi_\pm$:

$$\rho = e\bar\psi\psi = e\bar\psi U^2\psi = e(\bar\psi_+\psi_+ + \bar\psi_-\psi_-)/2,$$
$$\mathbf{j} = ce\bar\psi\boldsymbol{\alpha}\psi = ce\bar\psi U^2\boldsymbol{\alpha}U^2\psi = \qquad (12)$$
$$= ce(\bar\psi_+\boldsymbol{\sigma}\psi_+ - \bar\psi_-\boldsymbol{\sigma}\psi_-)/2.$$

Оператори в лівій частині рівнянь (11) відрізняються тільки знаком електричного поля і переводяться одне в одне інверсією координат, оскільки оператор K містить квадрат імпульсу **P**-полярного вектора у вихідних рівняннях. Тобто відмінність операторів у рівняннях (11) можна пов'язати із застосуванням перетворення інверсії системи координат. Інверсію операторів можна забезпечити множенням рівняння (11) на β, скористатися комутаторами $\beta\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}\beta$, $\beta\iota\boldsymbol{\alpha} = \iota\boldsymbol{\alpha}\beta$ і одержати рівняння для $\beta\psi$. Множник β забезпечує, як відомо [2,6], інваріантність рівняння Дірака щодо інверсії координат, а застосування процедури розщеплення (9), (10) до $\gamma_0\psi$ веде до перестановки $\psi_+ \leftrightarrow \psi_-$. Тому для побудови інверсійно інваріантної моделі достатньо обмежитися розв'язком одного з рівнянь у будь-який спосіб та виконати інверсійне перетворення результату й одержати тим самим розв'язок другого рівняння.

Попередній аналіз оперує формулами у занадто загальному вигляді; у стаціонарному наближенні: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ при цьому існує можливість нерівності $\mathbf{j} \neq 0$. Хоча задачі (11) еквівалентні у вказаному смислі, завжди має місце нерівність $\psi_+ \neq \psi_-$. Це означало би необхідність включення ефектів власного магнітного поля в самоузгоджену модель електрона. Не виключаючи в принципі такої можливості, нижче наведемо спрощену електростатичну модель, у якій магнітне поле не є визначальним. Головною метою цієї роботи є демонстрація можливості опису картини самоузгодженого електричного і квантового поля електрона в межах центральної області.

4. Аналіз електростатичної моделі

Найпростіше представлення електростатичної моделі досягається використанням кватерніонів замість спінорів у рівняннях (11) при відсутності магнітного поля, що досягається підстановкою

$$\psi_\pm \prec W_\pm\sigma_0,\quad W_\pm = (w_{\pm0} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_\pm),\quad \sigma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Ця операція доповнює спінори до дворядних матриць нульовими спінорами, при цьому знак рівняння замінюється знаком $\prec$. Кватерніони $W_\pm$ як гіперкомплексні числа визначаються чотирма дійсними параметрами $(w_{\pm0}, \mathbf{w}_\pm)$. Дворядна матриця σ_0 забезпечує однозначну відповідність параметрів кватерніона двом комплексним числам – компонентам спінора [7]:

$$\psi_\pm = \begin{pmatrix}a_\pm + ib_\pm\\ c_\pm + id_\pm\end{pmatrix} \prec (w_{0\pm} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_\pm)\sigma_0 =$$
$$= \begin{pmatrix}w_{0\pm} + iw_{z\pm} & 0\\ -w_{y\pm} + iw_{x\pm} & 0\end{pmatrix}. \qquad (13a)$$

Спряжений спінор визначається аналогічною формулою

$$\bar\psi_\pm \prec \sigma_0\bar W_\pm,\quad \bar W_\pm = (w_{\pm0} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_\pm).$$

Тобто діраківське спряження забезпечується класичним спряженням кватерніона. Коректність використання кватерніонів замість спінорів та бікватерніонів замість біспінорів можна показати на прикладі обчислення чисел Дірака – білінійних форм типу ρ, $\mathbf{j}$. Наприклад, для струму j_z (12) треба скористатися правилами алгебри множення (3). При цьому слід взяти до уваги спрощення лінійних форм, які є результатом множення кватерніонів, під дією проективних множників σ_0: $\sigma_0\sigma_x\sigma_0 = \sigma_0\sigma_y\sigma_0 = 0$. Тобто $\sigma_0\boldsymbol{\sigma}\sigma_0 = \sigma_0\sigma_z\sigma_0\mathbf{e}_z$,

$$j_z = ce\sigma_0(\bar W_+\sigma_z W_+ - \bar W_-\sigma_z W_-)\sigma_0/2 =$$
$$= ce\sigma_0[(w_{+0} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_+)\sigma_z(w_{+0} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_+) -$$
$$-(w_{-0} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_-)\sigma_z(w_{-0} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_-)]\sigma_0/2 =$$

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2020. Т. 65, № 12

$$= ce\sigma_0\sigma_z\sigma_0\{[(w_{+0}^2 + \mathbf{w}_+^2) + \\ + 2\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{w}_+ \times (w_{+y}\mathbf{e}_x - w_{+x}\mathbf{e}_y)] - \\ - [(w_{-0}^2 + \mathbf{w}_-^2) + 2\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{w}_- \times (w_{-y}\mathbf{e}_x - w_{-x}\mathbf{e}_y)]\}/2.$$

Зрештою, оскільки $\sigma_0\sigma_z\sigma_0 = \sigma_0$, легко одержати остаточний вираз для j_z, який збігається зі спінорним визначенням цієї величини (12), якщо взяти до уваги зіставлення (13а) дійсних параметрів $w_{\pm 0}$, $\mathbf{w}_\pm$ та a, b, c, d:

$$j_z = \frac{ce}{2}\sigma_0\{[w_{+0}^2 + w_{+z}^2 - w_{+x}^2 - w_{+y}^2] - \\ - [w_{-0}^2 + w_{-z}^2 - w_{-x}^2 - w_{-y}^2]\} = \\ = \sigma_0\left\{\frac{ce}{2}(\bar{\psi}_+\sigma_z\psi_+ - \bar{\psi}_-\sigma_z\psi_-)\right\}.$$

Числа Дірака розташовуються у верхньому лівому куті матриці, інші елементи якої дорівнюють нулю. Головною перевагою використання кватерніонів є можливість упорядкування восьми параметрів спінорів у вигляді двох векторних наборів і двох скалярів подібно до векторного формулювання рівнянь Максвелла, які, як добре відомо [7], теж зручно формулюються в термінах кватерніонів.

Використання кватерніонів для аналізу задачі (2) обмежується тим, що оператори в лівій частині рівнянь (2) або (11) не можуть бути визначені у полі кватерніонів з дійсними параметрами при врахуванні ефектів магнітного потенціалу навіть у стаціонарній задачі. Можливі тотожні модифікації рівняння Дірака, які знімають перешкоди для формалізму кватерніонів [7], але у спрощеному електростатичному наближенні використання кватерніонів не має перешкод і дозволяє скористатися алгеброю гіперкомплексних чисел (3) при написанні системи рівнянь для скалярних і векторних компонент усіх полів, виражених дійсними числами. Рівняння (11) зручно записати у безрозмірному вигляді, вимірюючи величини $\mathbf{r}$, φ, ψ, ε в одиницях $\hbar/mc$, $e(\hbar/mc)^{-1}$, $(\hbar/mc)^{-3/2}$, mc^2 відповідно:

$$[K \pm i\delta_e\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi](w_{\pm 0} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{w}_\pm) = 0, \\ K = \Delta + (\varepsilon - \delta_e\varphi)^2 - 1,$$

або для дійсних величин

$$\begin{cases} Kw_{\pm 0} \mp \delta_e\nabla\varphi\cdot\mathbf{w}_\pm = 0, \\ K\mathbf{w}_\pm \pm \delta_e\nabla\varphi w_{\pm 0} \mp \delta_e\nabla\varphi\times\mathbf{w}_\pm = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta\varphi = 2\pi(w_{+0}^2 + w_{-0}^2 + \mathbf{w}_+^2 + \mathbf{w}_-^2), \\ \int d\mathbf{r}(w_{+0}^2 + w_{-0}^2 + \mathbf{w}_+^2 + \mathbf{w}_-^2)/2 = 1, \end{cases} \quad (14)$$

де $\delta_e = e^2/c\hbar = 1/137$. До системи долучено також рівняння Пуассона та умова нормування в нових термінах. У сформульованій квазілінійній задачі параметр визначається стандартною вимогою існування повного розв'язку системи (14).

Можна задовольнити систему рівнянь припущенням про колінеарність векторного поля $\mathbf{w}_\pm$ і градієнта $\nabla\varphi$. У сферичних координатах, у центрально симетричному наближенні, вибір $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r)$, $\mathbf{w}_\pm(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r w_{\pm r}(r)$, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r = \nabla r$ дозволяє сформулювати систему рівнянь, інваріантну щодо інверсії координат, простою підстановкою $w_{0+} = w_{0-}$, $\mathbf{w}_+ = -\mathbf{w}_-$. З урахуванням результату $\Delta\mathbf{e}_r w_{\pm r}(r) = \mathbf{e}_r(\Delta_r - 2r^{-2})w_{\pm r}$ цей вибір веде до системи скалярних рівнянь тільки для двох величин $w_r = w_{+r} = -w_{-r}$, $w_0 = w_{+0} = w_{-0}$. У цих термінах у відповідності з визначеннями (13), (14), формула для густини заряду набуває такого вигляду: $\rho = w_0^2 + w_r^2$. Зрештою, зручно скористатися заміною $w_r = \chi/r$, $w_0 = \eta/r$, $\varphi = q/r$, $\tilde{\rho} = \rho/r^2$, позбутися радіальних лапласіанів: $\Delta_r w_r = r^{-2}(r^2 w_r')' = \chi''/r$, $\Delta_r w_0 = \eta''/r$, $\Delta_r\varphi = q''/r$ й остаточно переписати рівняння (14):

$$\begin{cases} q'' = 4\pi\dfrac{\tilde{\rho}}{r}, \quad \tilde{\rho} = \chi^2 + \eta^2, \\ 4\pi\displaystyle\int_0^\infty dr\tilde{\rho} = 1. \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \eta'' + [(\varepsilon - \delta_e\varphi)^2 - 1]\eta - \delta_e\varphi'\chi = 0, \\ \chi'' + \left[(\varepsilon - \delta_e\varphi)^2 - 1 - \dfrac{2}{r^2}\right]\chi + \delta_e\varphi'\eta = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Граничне значення потенціалу φ при $r \to \infty$ можна вибрати рівним нулю, що відповідає класичному визначенню – довільний вибір потенціалу гарантується градієнтною інваріантністю рівняння Дірака [2]. Інтегрування рівняння Пуассона (15) в межах довільного інтервалу $(0, R)$ при $R \to \infty$ з урахуванням нормування густини заряду $\tilde{\rho}$ дає класичну відповідь для асимптоти електричного поля і його потенціалу: $\int_0^R r dr q'' = Rq'(R) - q(R) = R^2\varphi'(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} -1$, тобто $\varphi(r) = \dfrac{1}{r}$, $q(r) = 1$ при $r \to \infty$ за умови $q = 0$ та диференційованості функції $q(r)$ при $r = 0$. Рівняння Пуассона в термінах q показує опосередковано, яким має бути характер розподілу потенціалу й густини заряду в регулярній картині електрона. Функція $q(r) = r\varphi(r)$ є опуклою, зростаючою монотонно в проміжку $(0, \infty)$

від нуля до одиниці, при цьому похідна q' зменшується від максимального позитивного значення $q'(0) = \varphi(0) = \varphi_0$ до нуля. Приведена густина заряду $\tilde{\rho}$ позначається нульовим значенням не тільки при $r \to \infty$, а й у центрі електрона. Регулярні амплітуди η, χ теж характеризуються поведінкою η, $\chi \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, тому $\tilde{\rho}$ є малою величиною, симетричною при формальній заміні $r \to -r$, порядку принаймні r^2 при $r \to 0$, тоді як для q рівнянням Пуассона має бути $q/r \approx \varphi_0 + ar^2$, $a < 0$. Ці загальні висновки щодо вимог регулярності амплітуд мають бути підтверджені аналізом рівнянь (16).

Коефіцієнти операторів, виражені через φ, як і коефіцієнт $2/r^2$, є малими зникаючими при $r \to \infty$ порівняно з 1 , внесок останніх може бути скомпенсований тільки диференціальним оператором. Поведінка амплітуд η, χ визначається однаковими рівняннями; наприклад: $\eta'' - (1- \ -\varepsilon^2)\eta = 0$. Прийнятним розв'язком є експоненціальний закон просторового затухання:

$$\eta, \chi \sim e^{-\kappa_\varepsilon r}, \quad \kappa_\varepsilon = \sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{17}$$

Одержана відповідь є модифікацією відомого результату Юкави для скалярного розв'язку рівняння Клейна–Гордона [4, 6], $\psi \sim e^{-r}/r$, вираженого в комптонівській шкалі. Проведений аналіз обмежує висновок про експоненціальну локалізацію амплітуд квантового поля електрона критичною вимогою: $1 > \varepsilon^2$.

Система (16) подібна до рівнянь для радіальних функцій у теорії атома водню, тому подібний аналіз можна застосувати у центрі ($r \to 0$). Поведінка радіальної амплітуди радіальних функцій визначається умовою анігіляції сингулярного коефіцієнта $-2/r^2$ диференціальним оператором: $\chi'' - 2\chi/r^2 = 0$ звідки для асимптоти $\chi = r^s$ випливає позитивна відповідь: $s = 2$. Оператор у рівнянні для скалярної амплітуди η не містить сингулярних складових при $r = 0$, але з урахуванням малості внеску електричного поля і радіальної функції χ асимптотичне рівняння має вигляд $\eta'' + [(\varepsilon - \delta_e\varphi_0)^2 - 1]\eta = 0$. Відповідь залежить від знака різниці $(\varepsilon - \delta_e\varphi_0)^2 - 1$, тобто від співвідношення параметрів ε, δ_e, φ_0. Відповідь має вигляд $\eta \sim \sin\left(r\sqrt{(\varepsilon - \delta_e\varphi_0)^2 - 1}\right)$, якщо $(\varepsilon - \delta_e\varphi_0)^2 > 1$. У протилежному випадку, $1 > (\varepsilon - \delta_e\varphi_0)^2$, асимптота, яка відповідає вимозі $\eta(0) = 0$, має вигляд $\eta \sim \mathrm{sh}\left(r\sqrt{1 - (\varepsilon - \delta_e\varphi_0)^2}\right)$. У підсумку виправдовуються наведені вище ознаки регулярності аналітичної моделі розподілу полів в електростатичній моделі електрона. Головна вимога другого порядку малості $\tilde{\rho} \sim r^2$ задовольняється відповідною поведінкою скалярної амплітуди: $\eta \sim r$.

5. Висновки

Розглянута центрально симетрична модель електрона відповідає фізичній картині, у якій закон Кулона реалізується за межами центральної області електрона, всередині якої гладко розподіляється заряд електрона. Оцінка розмірів цієї області в масштабі комптонівської одиниці довжини відрізняється від класичної оцінки радіуса електрона $r_c = e^2/mc^2$, розмір області локалізації електронного заряду виявляється проміжним між радіусом електрона r_c та радіусом орбіти Бора $r_{\rm B} = \hbar^2/me^2$ відповідно до пропорції $r_c : r_e : r_{\rm B} = \delta_e : 1 : \delta_e^{-1}$, $\delta_e = 1/137$.

Остаточна відповідь щодо змістовності викладеної моделі може бути одержана в результаті чисельного розв'язку системи (15), (16). Зокрема, надзвичайний інтерес становить обчислення величини ε, яка визначає біспінорну складову повної енергії електрона. Зауважимо, що згідно з формулою (8) щільність повної енергії стаціонарного сукупного поля визначається сумою $(H^2{+}E^2)/(8\pi) - \rho\varphi + \varepsilon\bar{\psi}\psi$. Значення параметра ε є критично важливим для запропонованої моделі. Визначення цієї величини не можна вважати прикладом застосування стандартної спектральної теорії квантової механіки. У рівнянні Дірака з самоузгодженим полем гамільтоніан не є лінійним оператором, і тому породжує обмежений спектр. Важливо оцінити величину інтегрального значення енергії $\varepsilon + \int d\mathbf{r}\left(E^2/(8\pi) - \rho\varphi\right)$ для електростатичної моделі порівняно з 1 – енергією спокою електрона. Задача обчислення спектра величини для стаціонарного квазілінійного рівняння Дірака споріднена з проблемою пошуку умов існування солітонів, які розглядаються в теорії плазми та нелінійній оптиці. Можна ставити питання про обмежений спектр цієї величини, зважаючи на те, що теоретично припускається існування мюона як збудженого стану електрона.

Використаний підхід може бути випробуваний при більш широкому дослідженні електронної польової структури з урахуванням внутрішніх струмів та магнітостатичних ефектів, без чого запро-

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2020. Т. 65, № 12

понована теорія не є вичерпною. Визначення магнітного моменту електрона потребує більш складного аналізу, модифікованого в термінах бікватерніонів рівняння Дірака.

1. П. Дирак. *Принципы квантовой механики* (Наука, 1960).
2. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. *Квантовая электродинамика* (Наука, 1981).
3. Я. Френкель. *Собрание избранных трудов, т. 1. Электродинамика* (Изд-во АН СССР, 1956).
4. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. *Фейнмановские лекции по физике, т. 6.* (Наука, 1966).
5. R.P. Feynman, M. Gell-Mann. Theory of the Fermi Interaction. *Phys. Rev.* **109** (1), 193 (1958).
6. В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин. *Курс теоретической физики, т. 2* (Наука, 1962).
7. Г. Казанова. *Векторная алгебра* (Наука, 1979).

Одержано 12.05.20

A.A. Guryn

QUANTUM-MECHANICAL MODEL
OF AN ELECTRON WITH SELF-CONSISTENT
ELECTROSTATIC FIELD

S u m m a r y

A possibility to construct a theory for an electron on the basis of the Dirac equation, where the electromagnetic field potentials are defined as those created by the electron itself, has been analyzed. It is shown that the energy conservation law is obeyed for the combined electromagnetic + bispinor field of an isolated electron. A stationary quasilinear system of equations for the electrostatic + bispinor field is formulated in terms of the quaternion algebra. The quasilinear problem for the electrostatic model of an electron is analyzed. The absence of singularities in the bispinor field components and the density of the electric charge distributed within electron's central region whose radius is about the Compton length is demonstrated.