

Б.В. БАЦАК,¹ Ю.Ф. ЗАБАШТА,² В.І. КОВАЛЬЧУК,² О.С. СВЕЧНИКОВА,²
Л.А. БУЛАВІН²

¹ Національний інститут серцево-судинної хірургії ім. М.М. Амосова, НАМН України
(Вул. Амосова, 6, Київ 03038)

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет
(Вул. Володимирська, 64/13, Київ 01601)

НОРМАЛЬНІ ХВИЛІ, ЩО ВИНΙΚАЮТЬ ПРИ РУСІ КРОВІ В АРТЕРІЇ

УДК 539.2

Запропоновано модель поширення пульсових хвиль в артерії, що розглядається як циліндрична оболонка, оточена пружним середовищем. Визначена амплітуда і форма нормальних хвиль, що виникають при русі крові в артерії. Встановлено два типи таких хвиль: нульові, для яких амплітуда не змінює знак по перерізу артерії, і ненульові, для яких така зміна спостерігається. Показано, що пульсова хвиля являє собою хвильовий пакет, утворений нульовими нормальними хвилями. Встановлено, що ненульові нормальні хвилі локалізовані поблизу вхідного перерізу артерії, утворюючи перехідну зону з розміром порядку радіуса артерії. Показано, що ненульові нормальні хвилі підсилюють процес дезагрегації еритроцитів у перехідній зоні.

Ключові слова: артерія, нормальні хвилі, пульсова хвиля.

1. Вступ

У механіці кровообігу – гемодинаміці [1] впродовж вже багатьох років актуальною є задача про поширення повільних пульсових хвиль, що виникають в момент викиду порції крові з лівого шлуночка серця в аорту і які супроводжують подальший процес руху крові по судинах. Вивчення закономірностей формування, розвитку, поширення і трансформації таких хвиль є важливим з точки зору як фізіології, так і можливості діагностики стану судинного русла.

Особливості поведінки пульсової хвилі в артеріях досліджуються в даній роботі.

Своїм існуванням пульсова хвиля зобов'язана пружності судинних стінок, які деформуються при проходженні хвилі. Відповідно, традиційною розрахунковою моделлю судини є циліндрична оболонка з пружними стінками, яка оточена пружним середовищем і заповнена рідиною.

При використанні цієї моделі для опису руху крові в судині, як правило, припускають [2–5], що тиск в поперечному перерізі судини є сталим. Оскільки в такому наближенні фронт хвилі виявляється плоским, пульсова хвиля є юнгівською

хвилею [6], яка поширюється по судині, не змінюючи своєї форми. Відповідно, в цьому випадку хвильова задача про рух крові в судині стає одновимірною. Нижче нами розглянуто тривимірний варіант цієї задачі.

Одним з центральних питань гемодинаміки і судинної діагностики є питання про артеріальний тиск – про механізм кровообігу, який утворює поле тисків в артерії. Це поле є суперпозицією нормальних хвиль [6]. Відповідно, властивості нормальних хвиль визначають той чи інший механізм кровообігу. Тому нормальні хвилі були вибрані за об'єкт дослідження в даній статті, мета якої – встановити вид нормальних хвиль, що виникають при русі крові в артерії, та визначити, з якими формами руху крові пов'язаний той чи інший вид таких хвиль.

2. Розрахункова модель артерії

Будемо розглядати кров як ідеальну рідину. Відповідно, рівнянням її руху є рівняння Ейлера [7]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = - \text{grad } p, \quad (1)$$

де ρ – густина, \mathbf{u} – вектор зміщення, t – час, p – тиск.

За своїм змістом, величина p є різницею між систолічним і діастолічним тисками.

© Б.В. БАЦАК, Ю.Ф. ЗАБАШТА, В.І. КОВАЛЬЧУК,
О.С. СВЕЧНИКОВА, Л.А. БУЛАВІН, 2020

Деформаційні властивості стінок циліндричної оболонки і навколишнього пружного середовища будемо вважати однаковими, що дозволяє розглядати артерію як циліндричну порожнину в суцільному середовищі. Відповідно, введемо циліндричні координати, направивши z -вісь уздовж осі циліндра і позначивши через r радіальну компоненту. Радіус циліндра позначимо через b , а поздовжню і поперечну компоненти вектора \mathbf{u} – через u_z та u_r .

Векторне рівняння (1) у компонентах має вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial r}. \quad (3)$$

Ідеальну рідину, що моделює кров, будемо вважати стисливою, вводячи у розгляд реологічне рівняння

$$p = -\rho c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (4)$$

де c_0 – швидкість звуку в рідині.

Підставляючи (4) у (1), отримуємо рівняння руху крові в артерії

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} p. \quad (5)$$

Існування пружного середовища, яке оточує артерію, врахуємо, записавши співвідношення

$$p(r=b) = \alpha u_r(r=b), \quad (6)$$

де α – коефіцієнт пружності середовища.

У літературі [1,8] наводяться такі значення густини крові, радіуса артерії і швидкості звуку в крові: $\rho = 1,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $b \leq 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $c_0 = 1540 \text{ м/с}$. Значення коефіцієнта α експериментально визначено в роботі [4]: $\alpha \approx 10^7 \text{ Н/м}^3$.

3. Розкладання функцій, що описують рух крові в артерії, у ряди

За визначенням, функція $p(t)$ є періодичною з періодом T , який дорівнює тривалості серцевого циклу, що дозволяє записати функцію $p(t)$ у вигляді ряду Фур'є:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(z, r) \exp(-i\omega_n t), \quad (7)$$

де

$$\omega_n = 2\pi n/T, \quad (8)$$

причому $T \approx 1 \text{ с}$.

Підставляючи рівняння (7) у (5), отримуємо

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p_n + k_n^2 p_n = 0, \quad (9)$$

де прийнято позначення

$$k_n = \omega_n/c_0. \quad (10)$$

Розкриваючи зміст операторів $\operatorname{div} \operatorname{grad}$, перепишемо рівняння (9) у вигляді

$$\frac{\partial^2 p_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_n}{\partial r} + k_n^2 p_n = 0. \quad (11)$$

Як відомо [6], розв'язок рівняння (11) має вигляд

$$p_n = \sum_{j=0}^{\infty} p_{nj}, \quad (12)$$

де p_{nj} – нормальні хвилі, які представляються у вигляді добутку двох функцій

$$p_{nj} = p_{0nj} R_{nj}(r) \exp(i\xi_{nj} z). \quad (13)$$

Величина p_{0nj} тут є амплітудою коливань, яка визначається граничними умовами на торцях циліндра, функція $R_{nj}(r)$ є радіальним розподілом тисків, а $\exp(i\xi_{nj} z)$ відповідає хвильовому характеру збудження. Величина ξ_{nj} відіграє роль хвильового числа.

Підставляючи (13) у рівняння (11), одержуємо

$$\frac{\partial^2 R_{nj}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{nj}}{\partial r} + \eta_{nj}^2 R_{nj} = 0, \quad (14)$$

де прийнято позначення

$$\eta_{nj}^2 = k_n^2 - \xi_{nj}^2. \quad (15)$$

Індекс j дорівнює числу змін знака, які зазнають функції $R_{nj}(r)$ на відріжку $r \leq b$. Нормальну хвилю, для якої індекс j дорівнює нулеві, і для якої згадані зміни знака не спостерігаються, називають нульовою. Домовимося називати ненульовими нормальні хвилі з індексами $j = 1, 2, \dots$ (натуральні числа, починаючи з 1), вводячи для них позначення p_{nq} і переписуючи рівність (12) у вигляді

$$p_n = p_{n0} + \sum_{q=1}^{\infty} p_{nq}. \quad (16)$$

4. Ненульові нормальні хвилі в артерії

Розв'язком рівняння (14), як відомо [9], є функція Бесселя нульового порядку:

$$R_{nq} = J_0(\eta_{nq}r). \quad (17)$$

Відповідно для величин p_{nq} маємо формулу

$$p_{nq} = p_{0nq} J_0(\eta_{nq}r) \exp\left(iz\sqrt{k_n^2 - \eta_{nq}^2}\right). \quad (18)$$

Оскільки функція u_r , як і p , також є періодичною, розкладемо її в ряд Фур'є:

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{nr} \exp(-i\omega_n t). \quad (19)$$

Підставляючи рівності (18) і (19) у рівняння (3), отримуємо

$$u_{nr} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{p_{0nq}}{\rho \omega_n^2} \frac{d}{dr} J_0(\eta_{nq}r) \exp\left(iz\sqrt{k_n^2 - \eta_{nq}^2}\right). \quad (20)$$

Використовуючи для (18)–(20) граничну умову (6) і враховуючи, що

$$\frac{d}{dr} J_0(\eta r) = -\eta J_1(\eta r), \quad (21)$$

де $J_1(\eta r)$ – функція Бесселя першого порядку, одержуємо дисперсійне рівняння

$$J_0(\eta_{nq}b) = -\frac{\alpha \eta_{nq}}{\rho \omega_n^2} J_1(\eta_{nq}b). \quad (22)$$

Дійсні корені цього рівняння визначають значення параметра η_{nq} для відповідних ненульових нормальних хвиль.

Як уже згадувалося, перенесення крові в судині здійснюється пульсовою хвилею. Чи може перенесення крові в артерії здійснюватися за рахунок ненульових нормальних хвиль? Іншими словами, чи можуть ці хвилі входити до складу пульсової хвилі?

Як видно з формули (18), така можливість реалізується за умови $k_n^2 - \eta_{nq}^2 > 0$. В іншому випадку, коли $k_n^2 - \eta_{nq}^2 < 0$, нормальна хвиля перетворюється у синфазне коливання, амплітуда якого зменшується за експоненціальним законом $p_{nq} \sim \exp\left(-z\sqrt{\eta_{nq}^2 - k_n^2}\right)$.

Такі хвилі, як відомо [6], називають неоднорідними у протигагу однорідним – хвилям, що поширюються. Хвиля стає однорідною, коли ω_n перевищує деяку критичну частоту Ω , яка визначається з умови $k_n^2 - \eta_{nq}^2 = 0$, що у зв'язку з формулою (10) записується у вигляді

$$(\Omega/c_0)^2 - \eta_{nq}^2 = 0. \quad (23)$$

Як уже згадувалося, для функції $R_{nq}(r)$ характерна зміна знака. При цьому уздовж радіуса r спостерігається чередування інтервалів, в яких R_{nq} має різні знаки. Єдиний параметр цієї функції, який має розмірність довжини, містить величину η_{nq}^{-1} . Звідси, з міркувань розмірності [10], можна стверджувати, що величина зазначених інтервалів по порядку величини дорівнює η_{nq}^{-1} , з чого, в свою чергу, випливає нерівність $\eta_{nq}^{-1} < b$, яка з урахуванням співвідношення (23) набуває вигляду

$$\Omega > c_0/b. \quad (24)$$

Використовуючи рівність (8), запишемо для Ω вираз $\Omega = 2\pi n_\Omega/T$, підстановка якого в умову (24) призводить до результату $n_\Omega > c_0 T/(2\pi b)$.

З урахуванням наведених вище числових оцінок для c_0 , T і b , отримуємо $n_\Omega > 8 \cdot 10^4$. Оскільки амплітуди фур'є-компонент зменшуються зі збільшенням їх номера n , то очевидно, що амплітуди з номерами, які визначаються одержаною нерівністю, виявляються знехтовно малими. Це означає, що ненульові хвилі в артерії є неоднорідними, тобто ці хвилі в перенесенні крові участі не приймають.

5. Нульові нормальні хвилі в артерії

Крім дійсних коренів, рівняння (22) має також корінь, який є уявним числом $\eta_{n0} = i\eta_n$, що призводить до нерівності $k_n^2 - \eta_{n0}^2 > 0$, яка забезпечує однорідність нульової нормальної хвилі.

В даному випадку рівняння (22) може бути переписано у вигляді

$$I_0(\eta_n b) = \frac{\alpha \eta_n}{\rho \omega_n^2} I_1(\eta_n b), \quad (25)$$

а вираз (17) як

$$R_{n0} = I_0(\eta_n r), \quad (26)$$

де $I_0(\eta_n r)$ і $I_1(\eta_n r)$ – модифіковані функції Бесселя нульового і першого порядку.

Відповідно для величини p_{n0} маємо вираз

$$p_{n0} = p_{0n0} I_0(\eta_n r) \exp\left(iz\sqrt{k_n^2 + \eta_n^2}\right). \quad (27)$$

Нульовою хвилею, як уже згадувалося, прийнято називати таку хвилю, для якої на відрізку $r < b$ зміни знака не спостерігаються, з чого випливає $\eta_n^{-1} > b$. Враховуючи цю нерівність, розкладемо функції Бесселя у виразі (25) в ряд за ступенями $\eta_n b$, обмежуючись членом четвертого ступеня,

$$1 - \frac{(\eta_n b)^2}{4} + \frac{(\eta_n b)^4}{64} = \frac{\alpha \eta_n^2 b}{2\rho \omega_n^2} \left[1 - \frac{(\eta_n b)^2}{8}\right]. \quad (28)$$

Розв'язок рівняння (28), з урахуванням наведених вище числових оцінок, має вигляд

$$\eta_n = \frac{\omega_n}{c} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\omega_n b}{c}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (29)$$

$$\text{де } c = \left(\frac{\alpha b}{2\rho}\right)^{1/2}. \quad (30)$$

Як випливає з формули (13), швидкість поширення нульової нормальної хвилі дорівнює

$$c_n = \omega_n \xi_n^{-1} = \omega_n \left[k_n^2 + \eta_n^2\right]^{-1/2}. \quad (31)$$

Підставляючи у формулу (31) вирази (10) і (29), маємо

$$c_n = \left\{c_0^{-2} + c^{-2} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\omega_n b}{c}\right)^2\right]\right\}^{-1/2}. \quad (32)$$

Використовуючи раніше наведені числові оцінки, переконуємося, що доданок $(\omega_n b/c)^2/8$ є набагато більшим за одиницю за умови $n > 10^2$, що дозволяє записати наближено $c_n \approx c$, вважаючи швидкість поширення нульових нормальних хвиль в артерії практично однаковою.

Як видно із порівняння з одновимірним варіантом [2–5], механізм перенесення крові при переході до тривимірної задачі змінюється. Якщо для одновимірної задачі перенесення крові здійснюється однією хвилею типу юнгівської, то тепер цю роль виконує безліч гармонічних нульових нормальних хвиль, так що в цілому пульсова хвиля є сумою цих хвиль – хвильовим пакетом. При своєму русі по судині хвильовий пакет не розмивається завдяки тому, що швидкості поширення нормальних хвиль, які складають його, практично не відрізняються одна від одної.

6. Нормальні хвилі у перехідній зоні

Розглянемо механізм утворення ненульових нормальних хвиль.

Підставляючи в формулу (16) вирази (18) і (27), отримуємо

$$p_n = p_{0n0} I_0(\eta_n r) \exp\left(iz\sqrt{k_n^2 + \eta_n^2}\right) + \sum_{q=1}^{\infty} p_{0nq} J_0(\eta_{nq} r) \exp\left(iz\sqrt{k_n^2 - \eta_{nq}^2}\right). \quad (33)$$

Розташуємо початок циліндричної системи координат у центрі вхідного перерізу артерії, так що тиск у вхідному перерізі p_n дорівнюватиме

$$p_n = p_{0n0} I_0(\eta_n r) + \sum_{q=1}^{\infty} p_{0nq} J_0(\eta_{nq} r). \quad (34)$$

Нехай потік крові, що входить до артерії, утворює у вхідному перерізі зовнішній тиск

$$p'_n = f(r) \exp(-i\omega_n t). \quad (35)$$

Відповідно, умовою неперервності тиску у вхідному перерізі артерії є вираз

$$f(r) = p_{0n0} I_0(\eta_n r) + \sum_{q=1}^{\infty} p_{0nq} J_0(\eta_{nq} r). \quad (36)$$

Припускаючи, як і раніше, $\eta_n b \ll 1$, можна прийняти, що $I_0(\eta_n r) \approx 1$, і переписати вираз (36) у вигляді

$$f(r) = p_{0n0} + \sum_{q=1}^{\infty} p_{0nq} J_0(\eta_{nq} r). \quad (37)$$

Помноживши обидві частини рівності (37) на rdr і інтегруючи отримані вирази від 0 до b , маємо

$$\int_0^b f(r) r dr = p_{0n0} \frac{b^2}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} p_{0nq} \frac{b}{\eta_{nq}} J_1(\eta_{nq} r). \quad (38)$$

Помножимо обидві частини рівності (37) на $J_0(\eta_{nk} r) r dr$ і проінтегруємо отримані вирази від 0 до b :

$$\int_0^b f(r) J_0(\eta_{nk} r) r dr = p_{0n0} \int_0^b J_0(\eta_{nk} r) r dr + \sum_{q=1}^{\infty} p_{0nq} \int_0^b J_0(\eta_{nq} r) J_0(\eta_{nk} r) r dr. \quad (39)$$

Використовуючи [9]:

$$\int_0^b J_0(\eta_{nq}r)J_0(\eta_{nk}r)rdr = 0, \quad q \neq k,$$

перепишемо рівність (39) у вигляді

$$\int_0^b f(r)J_0(\eta_{nk}r)rdr = p_{0n0} \frac{b}{\eta_{nk}} J_1(\eta_{nk}b) + p_{0nk} \int_0^b J_0^2(\eta_{nk}r)rdr. \quad (40)$$

Введемо позначення:

$$F(b) = \frac{2}{b^2} \int_0^b f(r)rdr,$$

$$G_{nk}(b) = \int_0^b f(r)J_0(\eta_{nk}r)rdr, \quad (41)$$

$$H_{nk}(b) = \int_0^b J_0^2(\eta_{nk}r)rdr.$$

У нульовому наближенні за малим параметром $b\eta_{nk}^{-1}$ формули (38) і (40) набувають вигляду

$$p_{0n0} = F(b), \quad (42)$$

$$p_{0nk} = G_{nk}(b)H_{nk}^{-1}(b). \quad (43)$$

Підставляючи співвідношення (42), (43) у формулу (33), з урахуванням наближеної рівності $I_0(\eta_n r) \approx 1$, для тиску p_n отримаємо вираз

$$p_n = F(b) \exp\left(iz\sqrt{k_n^2 + \eta_n^2}\right) + \sum_{q=1}^{\infty} G_{nq}(b)H_{nq}^{-1}(b)J_0(\eta_{nq}r) \exp\left(iz\sqrt{k_n^2 - \eta_{nq}^2}\right). \quad (44)$$

Як можна бачити з цієї формули, далеко від вхідного перерізу артерії (коли $z \rightarrow \infty$), тиск визначається першим доданком і являє собою гармонійні коливання, що відповідають нульовій хвилі, яка поширюється вздовж артерії. Крім цього,

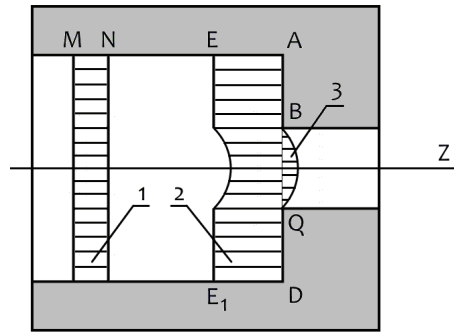


Рис. 1. Формування розподілу тисків у вхідному перерізі артерії

поблизу вхідного перерізу утворюються ненульові нормальні хвилі, що експоненційно затухають зі збільшенням відстані. Завдяки цьому поблизу вхідного перерізу виникає тиск, додатковий до тиску, який утворюється нульовою хвилею. Цей додатковий тиск визначається другим доданком у правій частині виразу (44). Назвемо область накладення нульових і ненульових хвиль в артерії перехідною зоною.

Визначимо вигляд функції $f(r)$, яка описує розподіл тиску у вхідному перерізі артерії.

Нехай вхідний переріз BQ артерії лежить в площині $ABQD$, в якій відбувається зміна діаметра судини (рис. 1).

Як вже згадувалось, поширюватись у судинах можуть лише нульові нормальні хвилі. Йшлося також про те, що з таких хвиль складається пульсова хвиля і що в наближенні $I_0(\eta r) \approx 1$, яке виконується для судин, в даному перерізі пульсової хвилі тиск є сталою величиною. Отже, нехай на площину $ABQD$ падає пульсова хвиля.

Позначимо через p' тиск у падаючій хвилі. Графік залежності $p'(r)$ наведено на рис. 1 і позначено цифрою 1. Для цього графіка, як і для інших графіків рис. 1, вісь тисків направлена паралельно z -осі. Як було зазначено, в даному випадку тиск p' залишається незмінним для всіх точок перерізу, його значення визначається рівністю $p' = MN$ (рис. 1).

Коли пульсова хвиля досягає перерізу $ABQD$, народжуються відбита та прохідна хвилі. Тиск у відбитій хвилі позначатимемо через p'' . Тиск у прохідній хвилі раніше було позначено через f .

Зліва на переріз $ABQD$ діє сумарний тиск $p^* = p' + p''$. Залежність $p^*(r)$ на рис. 1 наведена

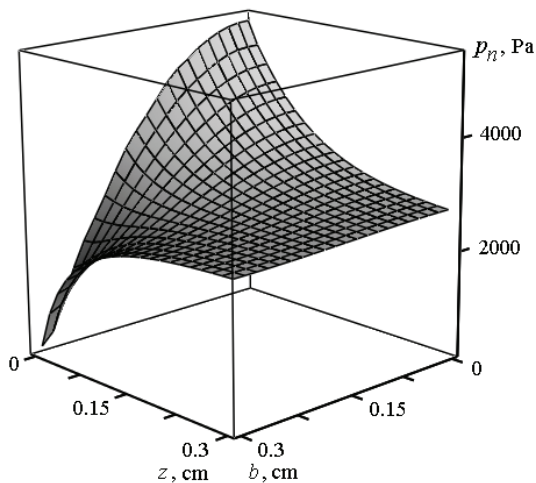


Рис. 2. Розподіл тисків у перехідній зоні артерії

графіком 2. Для ділянок AB та QD , тобто при $r > b$, прохідна хвиля відсутня. Відповідно, для них $p' = p''$, так що $p^* = 2p'$ і $EA = E_1D = 2MN$.

На ділянці BQ , тобто при $r < b$, у зв'язку з наявністю прохідної хвилі тиск p'' повинен поступово зменшуватись із зменшенням r , досягаючи мінімального значення при $r = 0$. Але на цій ділянці мусить зберігатись неперервність тисків, тобто повинна виконуватись рівність $p' + p'' = f$. Відповідно, залежність $f(r)$ має такий характер (рис. 1, графік 3): $f(r) = 0$ при $r = b$, із зменшенням r значення f мусить зростати, досягаючи максимуму при $r = 0$. Найпростіша гладка функція, що відповідає таким вимогам, це – парабола

$$f(r) = f_0(1 - (r/b)^2). \quad (45)$$

Було домовлено вважати початком відліку діастолічний тиск. Відповідно, середнє значення функції (45) по перерізу артерії

$$\frac{1}{\pi b^2} \int_0^b 2\pi f(r)r dr = \frac{f_0}{2}$$

ототожнимо з пульсовим тиском. Як відомо [1], останній є різницею між систолічним і діастолічним тиском. Припускаючи, що їх відношення дорівнює 120/80 мм рт. ст. (нормі для дорослої людини), одержуємо $f_0 \approx 10^4$ Па.

Використовуючи це значення, а також наведені раніше числові значення інших параметрів, за допомогою формули (44) розрахуємо тиск, що діє в

перехідній зоні. Результати обчислень наведені на рис. 2.

Як видно з цього рисунка, розмір перехідної зони по порядку величини дорівнює радіусу артерії. Розрахунки виконані для значення $n = 1$. Очевидно, що зі збільшенням n (збільшенням частоти) розмір перехідної зони буде зменшуватись.

7. Вплив ненульових нормальних хвиль на дезагрегацію еритроцитів

Як відомо [11], рух крові по судині супроводжується процесами агрегації і дезагрегації еритроцитів. При описі руху еритроцита скористаємося однією з моделей гідродинаміки, наближено розглядаючи плазму крові як ідеальну рідину [7], а еритроцит як частинку, що не деформується, нехтуючи при цьому змінами швидкості течії плазми на відстанях порядку розміру частинки.

При поширенні нормальних хвиль у артерії еритроцит здійснює коливальні рухи разом із плазмою крові. При цьому швидкість переміщення еритроцита менша за швидкість руху плазми. В рамках такої моделі рівняння руху еритроцита має вигляд [7]:

$$\rho_e \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{1}{\beta} \mathbf{M} \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right), \quad (46)$$

де ρ_e , \mathbf{w} , β і \mathbf{M} – густина, швидкість, об'єм і тензор приєднаних мас еритроцита.

Підставляючи в формулу (46) вираз (1), отримуємо

$$\left(\rho_e + \frac{1}{\beta} \mathbf{M} \right) \frac{d\mathbf{w}}{dt} = - \left(1 + \frac{1}{\beta \rho} \mathbf{M} \right) \nabla p. \quad (47)$$

Як видно з рівняння (47), амплітуда коливального руху еритроцита зростає зі збільшенням амплітуди коливальних величин $(-\nabla p)$. Як впливає значення амплітуди коливальних на здатність еритроцитів до агрегації?

Відомо [11], що нормальний еритроцит людини має двояковогнуту дискоїдну форму (“дискоцит”). Будемо наближено вважати, що еритроцит має форму круглої пластинки (рис. 3, *a*).

При агрегації еритроцити утворюють ланцюги (“монетні стовпчики”) (рис. 3, *b*), які є структурними одиницями агрегатів більшого розміру. Утримуються еритроцити в ланцюгові “містками”, що складаються з молекул фібріногена.

Розглянемо елементарний акт приєднання еритроцита до ланцюга. Еритроцит 4 (див. рис. 3, c), знаходячись від ланцюга 5 на відстані, достатній для утворення містка, коливається в площині, перпендикулярній осі ланцюга. Відповідно, зміщення еритроцита 4 відносно осі ланцюга визначається рівністю

$$X = A \sin \omega t, \quad (48)$$

де A – амплітуда коливань.

На зовнішній мембрані еритроцита існують ділянки специфічної структури, до яких можуть приєднуватися молекули фібрिनгену. Місток між еритроцитами виникає, коли такі ділянки обох еритроцитів розташовуються одна навпроти одної. Нехай час, необхідний для утворення містка, дорівнює τ . Розмір згаданої ділянки позначимо через h .

Утворення містка стає неможливим, коли одна із вказаних ділянок зміститься відносно іншої на величину h .

Відраховувати значення X будемо від центра ділянки, так що ліва границя ділянки відповідатиме точці з координатою $X_1 = -h/2$. При зміщенні ділянки як цілого ця точка перейде в положення $X_2 = h/2$. Нехай при коливальному русі одного еритроцита відносно іншого згадана границя знаходиться в точці X_1 в момент часу $t_1 = -\Delta t$, а в точці X_2 – в момент часу $t_2 = \Delta t$. Відповідно до формули (48) маємо

$$h = X_2 - X_1 = 2A \sin \omega \Delta t. \quad (49)$$

Припускаючи, що $h \ll 2A$, отримуємо

$$2\Delta t = h/(A\omega). \quad (50)$$

Виникнення містка між обома ділянками можливе, допоки виконується умова

$$t_2 - t_1 \geq \tau, \quad (51)$$

тобто тоді, коли ще можна вважати, що обидві ділянки знаходяться одна навпроти одної.

Підставляючи рівність (50) у вираз (51), одержуємо

$$A \leq h/(\omega\tau), \quad (52)$$

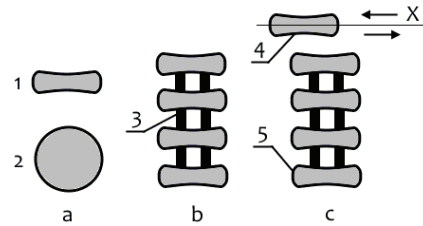


Рис. 3. Схема агрегації еритроцитів: a – наближена форма еритроцита (1 – вигляд збоку, 2 – вигляд зверху), b – ланцюг еритроцита (3 – фібриногеновий місток), c – приєднання еритроцита до ланцюга

впевнюючись в існуванні деякого критичного значення амплітуди $A_c = h/(\omega\tau)$, при перевищенні якого здатність еритроцитів до агрегації втрачається.

Наведені вище міркування для $n = 1$ ведуть до оцінок $|\nabla p_n| \sim p_n/b$ при $z < b$ і $|\nabla p_n| \sim p_n/(cT)$ при $z > b$. Підставляючи раніше наведені числові значення параметрів, можна бачити, що перша оцінка істотно перевищує другу. Це означає, що коливальний рух еритроцита в перехідній зоні значно інтенсивніший, ніж поза цією зоною, і відповідно процес дезагрегації в перехідній зоні більш інтенсивний завдяки наявності в цій зоні ненульових нормальних коливань.

8. Заключення

Виконані в даній статті розрахунки дозволяють зробити такі висновки про механізм кровообігу в артерії, які, на думку авторів, могли б бути використані в гемодинаміці і судинної діагностиці:

1) під час руху крові в артерії виникають нормальні хвилі; це – гармонійні хвилі, які характеризуються частотами $\omega_n = 2\pi n/T$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), де T – тривалість серцевого циклу; реалізуються два види таких хвиль – нульові, для яких амплітуда коливань не змінює знак по перерізу артерії, і ненульові, для яких така зміна спостерігається;

2) нульові нормальні хвилі – це хвилі, які поширюються вздовж судини, забезпечуючи тим самим перенесення крові; існуюче в гемодинаміці уявлення про пульсову хвилю як хвилю типу юнгівської є наближеним – насправді пульсова хвиля являє собою хвильовий пакет, який складається з нульових нормальних хвиль; швидкості поширення цих хвиль практично однакові, що запобігає розмивання хвильового пакета;

3) ненульові нормальні хвилі не поширюються по судині і, відповідно, не беруть участі в перенесенні крові; ці хвилі локалізовані поблизу входу в артерію, утворюючи перехідну зону, де рух крові має характер синфазних коливань; амплітуда останніх експоненціально зменшується зі збільшенням відстані від входу в артерію; характерна довжина згасання амплітуди не перевищує значення радіуса артерії; величиною того самого порядку є її розмір перехідної зони;

4) під впливом ненульових нормальних хвиль у перехідній зоні посилюється дезагрегація еритроцитів.

1. C.G. Caro, T.J. Pedley, R.C. Schroter, W.A. Seed. *The Mechanics of the Circulation* (Cambridge Univ. Press, 2012) [ISBN: 978-1-13-901340-6].
2. Л.А. Булавин, Г.В. Кнышов, Ю.Ф. Забашта, Б.В. Бацак, С.В. Северилов. Возмущение потока при инвазивном измерении давления крови. *Рос. журн. биомех.* **17**, 29 (2013).
3. Л.А. Булавин, Г.В. Кнышов, Ю.Ф. Забашта, Б.В. Бацак, Е.М. Трёмбовецкая. Ультразвуковой метод измерения пульсового артериального давления. *Техн. жив. сист.* **3**, 56 (2016).
4. L.A. Bulavin, Yu.F. Zabashta, B.V. Batsak, E.M. Trembovets'ka. Evaluation of Arterial Wall Elasticity During Ultrasound Diagnostics. *Ukr. J. Phys.* **62**, 378 (2017).
5. K.Azer, Ch.S. Peskin. A One-dimensional Model of Blood Flow in Arteries with Friction and Convection Based on the Womersley Velocity Profile. *Cardiovasc. Eng.* **7**, 51 (2007).
6. М.А. Исакович. *Общая акустика* (Наука, 1973).

7. L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics, Vol. 6: Fluid Mechanics* (Elsevier, 2013) [ISBN: 978-0-750-62767-2].
8. L.A. Bulavin, Yu.F. Zabashta. *Ultrasonic Diagnostics in Medicine: Physical Foundations* (CRC Press, 2007) [ISBN: 978-9-067-64446-4].
9. A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov. *Special Functions of Mathematical Physics* (Birkhäuser Basel, 1988) [ISBN: 978-1-4757-1595-8].
10. Л.И. Седов. *Механика сплошной среды* (Наука, 1970).
11. В.А. Левтов, С.А. Регирер, Н.Х. Шадрин. *Реология крови* (Медицина, Москва, 1982).

Одержано 15.12.19

B. V. Batsak, Yu. F. Zabashta,
V. I. Kovalchuk, O. S. Svechnikova, L. A. Bulavin

NORMAL WAVES ARISING WHEN BLOOD MOVES THROUGH AN ARTERY

S u m m a r y

A model is proposed of the pulse wave propagation through an artery is proposed. The artery is considered as a cylindrical shell surrounded by an elastic medium. The amplitude and shape of normal waves arising, when blood flows through the artery are determined. Two types of such waves are revealed: zero waves, whose amplitude does not change its sign over the arterial cross-section, and non-zero ones, for which such a change does take place. It is shown that the pulse wave is a wave packet formed by zero normal waves. The non-zero normal waves are found to be localized near the entrance section of the artery, by creating a transition zone whose size is about the arterial radius. The non-zero normal waves are shown to enhance the process of erythrocyte disaggregation in the transition zone.