

І.С. ГАНДЖА

Інститут фізики НАН України  
(Просп. Науки, 46, Київ 03028; e-mail: gandzha@iop.kiev.ua)

УДК 532.591

**ХВИЛЬОВИЙ РУХ ПОВЕРХНІ  
НЕВ'ЯЗКОЇ РІДИНИ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ТЯЖІННЯ**

Огляд присвячено аналізу хвильового руху поверхні рідини під дією сили тяжіння в межах канонічної моделі гідродинаміки, де рідину вважають нев'язкою і нестисливою, а рух рідини плоским і потенціалним (безвихровим). Предметом дослідження є двовимірні періодичні хвилі сталої форми, що поширюються у виділеному напрямку. Типовим прикладом таких хвиль є морські та океанські хвилі метрової і більшої довжини, коли ефекти поверхневого натягу не є визначальними. Основну увагу приділено властивостям нелінійних хвиль, відомих під назвою хвиль Стокса: формі поверхні, швидкості, амплітуді, енергії. Розглянуто питання нестійкостей і руйнування хвиль.

**Ключові слова:** хвилі на поверхні рідини, гравітаційні хвилі, хвилі Стокса, нелінійні хвилі, енергія хвиль.

**1. Вступ**

Аналіз хвильових явищ на межі поділу двох середовищ завжди був і залишається актуальним у багатьох розділах фізики. Даний огляд присвячений аналізу хвильового руху поверхні рідини, коли густина середовища над поверхнею набагато менша за густину самої рідини. Наочним прикладом такої системи є поверхня моря або океану. При цьому ми переважно розглядаємо властивості поверхневих хвиль, спричинених дією лише одного фактора – сили тяжіння. В гідродинаміці такі хвилі називають *гравітаційними*. Це хвилі з метровою довжиною і довші. На менших масштабах суттєву роль починають відігравати поверхневий натяг (відповідні хвилі називають *гравітаційно-капілярними*) і в'язкість. На великих масштабах цими ефектами можна нехтувати. Серед багатьох різновидів поверхневих хвиль ми цікавимося двовимірними періодичними хвилями сталої форми, що поширюються у виділеному напрямку. Двовимірність означає, що властивості хвиль незмінні вздовж їх фронту. Серед властивостей хвиль найбільш важливими є їх форма, амплітуда, швидкість (фазова і групова) і енергія. Фізичні ефекти, які важливі при поширенні хвиль, є нестійкість, модуляція і руйнування. Саме цим властивостям хвиль і фізичним ефектам, що виникають при їх поширенні, і присвячений даний огляд. При цьо-

му більшість хвильових явищ на поверхні рідини зумовлена нелінійними ефектами, на які в даній роботі зроблено основний акцент.

У загальній постановці моделі суцільного середовища рух рідини описують рівнянням Нав'є–Стокса [10]. В моделі *ідеальної рідини*, коли можна нехтувати ефектами в'язкості (і теплопереносу), рівняння Нав'є–Стокса вироджується в рівняння Ейлера для руху ідеальної рідини, яке є записом закону збереження імпульсу частинки рідини. Для руху рідини в полі сили тяжіння рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (1.1)$$

Тут  $\mathbf{v}$  – вектор розподілу швидкості частинок рідини,  $p$  – тиск всередині рідини,  $\rho$  – густина рідини,  $\mathbf{g}$  – вектор прискорення вільного падіння. Це рівняння суттєво нелінійне, оскільки містить доданок  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ , який входить у склад субстанціональної похідної  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)$ . Другим фундаментальним законом руху ідеальної рідини є рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (1.2)$$

яке є наслідком збереження кількості речовини.

Рівняння руху ідеальної рідини (1.1) і (1.2) є базовими для побудови рівнянь руху поверхні рідини, ці рівняння розглянуті в розділі 2. Там само

© І.С. ГАНДЖА, 2013

розглянуті властивості хвиль малої амплітуди (лінійних хвиль), коли в рівнянні Ейлера можна нехтувати нелінійним доданком. Подальші розділи присвячено опису властивостей нелінійних хвиль, відомих під назвою *хвиль Стокса*. Особливу увагу приділено найвищим хвилям (хвилям максимальної амплітуди), гребінь яких утворює кут  $120^\circ$  (гранична хвиля Стокса). В заключній частині огляду розглянуто питання нестійкостей хвиль та їх руйнування, а також окреслено деякі властивості гравітаційно-капілярних хвиль і так званих мандрівних хвиль або хвиль-вбивць.

## 2. Канонічна модель гідродинаміки

### 2.1. Наближення моделі та рівняння руху

Канонічна модель гідродинаміки є найбільш спрощеною моделлю опису руху рідини, при цьому ця модель в повній мірі зберігає нелінійність рівнянь руху. Рідину вважаємо ідеальною і нестисливою ( $\rho = \text{const}$ ), а рух рідини потенціальним (безвихровим). Умова потенціальності  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  означає, що можна ввести потенціал швидкості  $\Phi$  так, що  $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ . Тоді рівняння неперервності (1.2) для швидкості  $\mathbf{v}$  перетворюється в *рівняння Лапласа*

$$\Delta\Phi = 0 \tag{2.1}$$

для потенціалу швидкості. Рівняння Лапласа описує рух рідини в усій області потоку. Дане рівняння слід доповнити граничними умовами на кожній границі, виходячи з геометрії задачі:

$$\nabla F \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{2.2}$$

де  $F(\mathbf{r}, t) = 0$  – рівняння границі,  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  – радіус-вектор. Умова (2.2) є умовою непроникності частинок рідини крізь границю. Такі умови називають кінематичними.

Вважатимемо область потоку рідини необмеженою в горизонтальній площині  $xz$ , а в вертикальній площині  $xy$  обмеженою плоским дном знизу і вільною поверхнею згори (рис. 1). Тоді кінематичні граничні умови на рухомій вільній поверхні  $y = \eta(x, t)$  й нерухомому дні  $y = -h$  набувають вигляду

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y = 0, \quad y = \eta(x, t); \tag{2.3}$$

$$\Phi_y = 0, \quad y = -h. \tag{2.4}$$

При цьому ми вважаємо рух рідини плоским (двовимірним), тобто таким, що властивості хвиль незмінні вздовж їх фронту паралельно осі  $z$ . Форму вільної поверхні задано невідомою функцією горизонтальної координати і часу  $y = \eta(x, t)$ . Її можна визначити з рівняння Ейлера, яке у випадку нестисливої рідини і безвихрового руху можна звести інтегруванням до рівняння Бернуллі:

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \frac{p}{\rho} + gy = C(t), \tag{2.5}$$

де  $C(t)$  є сталою інтегрування, а тиск  $p$  вважають сталим і вносять в сталу інтегрування, яку знаходять з початкових умов залежно від вибору положення нульового рівня  $y = 0$ . Рівняння (2.5), записане на границі  $y = \eta(x, t)$ , носить назву динамічної граничної умови. Рівняння Лапласа (2.1) з граничними умовами (2.3), (2.4) і (2.5) є замкненою системою рівнянь канонічної моделі гідродинаміки. Наближення і рівняння канонічної моделі більш детально проаналізовані в монографії [3].

### 2.2. Періодичні хвилі сталої форми

У консервативній системі (якою є ідеальна рідина) після завершення перехідних процесів може встановитись *стаціонарний* рух рідини, коли властивості поверхневих хвиль та їх форма не змінюються з часом. Умова стаціонарності для прогресивних хвиль встановлює однозначний зв'язок між координатою  $x$ , вздовж якої поширюється хвиля, і часом  $t$  через фазу хвилі:

$$\theta = kx - \omega t,$$

де  $k$  – хвильове число,  $\omega = ck$  – частота хвилі,  $c$  – фазова швидкість хвилі, причому

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.6}$$

В цьому випадку зовнішнє початкове збурення означає лише довжину хвилі  $\lambda$  та її енергію, що відіграють роль початкових умов і є параметрами задачі. Часто замість енергії хвилі вибирають більш зручний параметр – висоту хвилі  $H$  (висота хвилі від впадини до гребеня, див. рис. 1).

З усіх можливих стаціонарних хвиль будемо розглядати лише періодичні хвилі. Умова періодичності означає, що для будь-якої функції  $f$ , котра описує просторові й часові характеристики рідини, ви-

кликані хвильовим рухом, справедливе співвідношення

$$f(x, y, t) = f(x + \lambda, y, t) = f(x, y, t + T), \quad (2.7)$$

де  $\lambda = 2\pi/k$  – довжина хвилі (її просторовий період),  $T$  – часовий період, причому за умови (2.6)  $\lambda = cT$  і  $f(x, y, t) = f(\theta, y)$ .

Задача про поширення двовимірних хвиль сталої форми має два граничні випадки залежно від співвідношення між глибиною рідини і довжиною хвилі [157]: (а)  $h/\lambda \rightarrow \infty$  – хвилі на глибокій воді (нескінченна глибина); (б)  $h/\lambda \rightarrow 0$  – поодинокі хвилі<sup>1</sup> – хвилі, що складаються з поодинокого гребеня. Поодинокі хвилі не є періодичними (їх довжина нескінченна), вивчення таких хвиль виходить за межі обсягу даного огляду.

Визначимо значення сталої інтегрування  $C$  в рівнянні Бернуллі (2.5). Внаслідок стаціонарності руху ця стала не залежить від часу, і її можна визначити усередненням рівняння Бернуллі на дні. Для цього знайдемо масу стовпчика рідини між вільною поверхнею і дном з розміром основи, рівним довжині хвилі  $\lambda$  вздовж осі  $x$  і довжині  $L$  вздовж осі  $z$  паралельно фронту хвилі:

$$\begin{aligned} M &= L \int_0^\lambda \int_{-h}^{\eta(\theta)} \rho \, dx \, dy = L \int_0^\lambda \rho (h + \eta(\theta)) \, dx = \\ &= \rho S h + \rho S \bar{\eta}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

де  $S = L\lambda$  – площа основи стовпчика,

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \eta \, dx \quad (2.9)$$

означає усереднення за просторовим періодом. Зауважимо, що  $\bar{\eta} = 0$ , якщо  $y = 0$  – середній рівень хвилі, який розділяє гребені й впадини на дві рівновеликі області. Якщо вважати, що збудження хвиль відбувалося без притоку маси, то маса  $M$  має бути сталою під час всієї еволюції хвилі. Таким чином,  $h + \bar{\eta}$  є глибиною *спокійної води*, коли немає хвиль і потоків. Оскільки відносно середнього рівня хвилі  $\bar{\eta} = 0$ , то за умови збереження повної маси рідини середній рівень стаціонарної хвилі збігається з рівнем *спокійної води*.

<sup>1</sup> solitary waves (англ.).

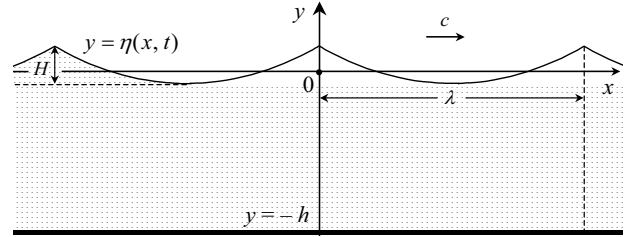


Рис. 1. Лабораторна система координат

Визначимо тиск на дні. У випадку нескінченної глибини  $h = \infty$  рух хвиль на поверхні не викликає потоків на дні. Тоді  $\Phi_x|_{y=-\infty} = 0$ , а  $\Phi_y|_{y=-\infty} = 0$  з граничної умови (2.4), отже, з рівняння Бернуллі (2.5) випливає, що на нескінченній глибині тиск сталий. Для скінченної глибини рух хвиль на поверхні в тій чи іншій мірі викликає рух всієї рідини, хоча він і затухає з глибиною. Швидкість рідини на дні (як і на будь-якому іншому горизонтальному рівні, що повністю належить області, зайнятій рідиною) є періодичною функцією з просторовим періодом  $\lambda$ , тому

$$\overline{\Phi_x}|_{y=\text{const}} = 0, \quad (2.10)$$

але неусереднена швидкість  $\Phi_x|_{y=-h} \neq \text{const}$ . Тому тиск на дні також не є сталим, проте його усереднене значення за просторовим періодом є сталим на всьому дні і має визначатись масою рідини над дном і середнім атмосферним тиском  $p_0$  на поверхні, а саме, враховуючи (2.8):

$$\bar{p}|_{y=-h} = p_0 + \frac{Mg}{S} = p_0 + \rho g(h + \bar{\eta}). \quad (2.11)$$

Тоді, усереднивши рівняння Бернуллі (2.5) на дні за просторовим періодом з врахуванням умов (2.4), (2.10) і (2.11), одержимо значення сталої  $C$ :

$$C = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} \overline{\Phi_x^2}|_{y=-h} + g\bar{\eta}. \quad (2.12)$$

Вважаючи атмосферний тиск сталим на всій поверхні й рівним середньому значенню  $p_0$  і враховуючи, що  $\Phi_t = -c\Phi_x$ , динамічну граничну умову можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( (c - \Phi_x)^2 + \Phi_y^2 \right) + gy = \\ &= \frac{c^2}{2} + \frac{\overline{\Phi_x^2}|_{y=-h}}{2} + g\bar{\eta} = B, \quad y = \eta(x, t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

де стала  $B$  носить назву *константи Бернуллі*. Якщо  $y = 0$  – середній рівень хвилі, то  $\bar{\eta} = 0$ . Тоді у випадку нескінченної глибини  $B = c^2/2$ . Часто це саме значення константи Бернуллі залишають і у випадку скінченної глибини. Для цього необхідно покласти  $\bar{\eta} = -\frac{1}{2g} \overline{\Phi_x^2}|_{y=-h}$ , що означає підняття початку відліку  $y = 0$  на відстань  $\frac{1}{2g} \overline{\Phi_x^2}|_{y=-h}$  відносно середнього рівня хвилі.

### 2.3. Густина енергії, густина імпульсу і потужність хвилі

Енергія одиниці об'єму рідини складається з суми об'ємних густин кінетичної і потенціальної енергій:

$$\mathcal{E} = \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon,$$

де  $\epsilon$  – внутрішня енергія одиниці маси рідини [10]. У зовнішньому полі тяжіння  $\epsilon = gy$ . Знайдемо повну енергію стовпчика рідини між вільною поверхнею хвилі й дном з розміром основи, рівним довжині хвилі  $\lambda$  вздовж осі  $x$  і довжиною  $L$  вздовж осі  $z$ :

$$\mathcal{H}_{\text{повна}} = L \int_0^\lambda \int_{-h}^{\eta(\theta)} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho gy \right) dx dy.$$

За відсутності хвильового руху енергія цього ж стовпчика рідини дорівнює

$$\mathcal{H}_{\text{спокою}} = L \int_0^\lambda \int_{-h}^{\bar{\eta}} \rho gy dx dy.$$

Отже, внесок хвилі в енергію стовпчика рідини, що розглядається, становить

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{хвилі}} &= \mathcal{H}_{\text{повна}} - \mathcal{H}_{\text{спокою}} = \\ &= L \int_0^\lambda \int_{-h}^{\eta(\theta)} \frac{\rho v^2}{2} dx dy + L \int_0^\lambda \int_{\bar{\eta}}^{\eta(\theta)} \rho gy dx dy. \end{aligned}$$

Відношення цієї величини до площі  $L \cdot \lambda$  основи стовпчика і прийнято називати *густиною енергії хвилі* (енергія на одиницю горизонтальної площі):

$$\begin{aligned} E = \frac{\mathcal{H}_{\text{хвилі}}}{\lambda L} &= K + U = \frac{\rho}{2\lambda} \int_0^\lambda \int_{-h}^{\eta(\theta)} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) dx dy + \\ &+ \frac{\rho g}{2\lambda} \int_0^\lambda (\eta^2(\theta) - \bar{\eta}^2) dx, \end{aligned} \quad (2.14)$$

де  $K$  і  $U$  – відповідно густини кінетичної і потенціальної енергій хвилі.

Імпульс одиниці об'єму рідини (густина потоку рідини) є  $\rho \mathbf{v}$  [10]. Тоді густина потоку рідини, що переноситься в напрямі поширення хвилі, є  $\rho v_x$ . Відповідно до густини енергії хвилі *густиною імпульсу хвилі* (імпульс на одиницю горизонтальної площі) визначають як

$$I = \frac{\rho}{\lambda} \int_0^\lambda \int_{-h}^{\eta(\theta)} \Phi_x dx dy. \quad (2.15)$$

Надалі, коли будемо говорити про енергію й імпульс хвилі, слова “на одиницю горизонтальної площі” опускаємо.

Потік енергії, що переносить хвиля, визначають як похідну від повної енергії за часом:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{d}{dt} \iiint_V \mathcal{E} dV. \quad (2.16)$$

Можна показати [158], що

$$\mathcal{P}(t) = \rho c L \int_{-h}^{\eta(\theta)} \Phi_x^2 dy. \quad (2.17)$$

Потужність хвилі визначимо як усереднений за періодом потік енергії, який будемо записувати в перерахунку на одиницю довжини фронту хвилі:

$$P = \frac{1}{LT} \int_0^T \mathcal{P} dt. \quad (2.18)$$

### 2.4. Загальний розв'язок рівняння Лапласа

Шукатимемо частинний розв'язок рівняння Лапласа (2.1) методом розділення змінних:

$$\Phi(x, y, t) = X(x-ct) Y(y) \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\kappa^2.$$

Тоді маємо

$$X(x-ct) = X_1 e^{i\kappa(x-ct)} + X_2 e^{-i\kappa(x-ct)},$$

$$Y(y) = Y_1 e^{\kappa y} + Y_2 e^{-\kappa y}.$$

Оскільки розв'язок має бути періодичним за координатою  $x$  з періодом  $\lambda = 2\pi/k$ , то  $\kappa = nk$ , де  $n$  – натуральне число. При цьому мають виконуватись:

1. Гранична умова на дні (2.4), звідки маємо

$$Y_1 e^{-nkh} - Y_2 e^{nkh} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_1 = Y_2 e^{2nkh}.$$

2. Граничний перехід при  $h \rightarrow \infty$ . Для цього функція  $Y(y)$  має бути обмеженою ( $Y_2 \rightarrow 0$ ) і не залежати від глибини  $h$  ( $Y_1 \neq f(h)$ ) при  $h \rightarrow \infty$ . Ці умови задовольняються, якщо зробити нормування:

$$Y_2 = \frac{A_2 e^{-nkh}}{e^{nkh} + e^{-nkh}} \Rightarrow Y_1 = \frac{A_2 e^{nkh}}{e^{nkh} + e^{-nkh}}.$$

Сталу  $A_2$  включимо в функцію  $X$ , перепозначивши  $C_1 = X_1 A_2$  і  $C_2 = X_2 A_2$ .

3. Умова дійсності потенціалу  $\Phi$

$$\Phi^* = \Phi \quad \Rightarrow \quad C_1^* = C_2.$$

Таким чином,

$$\Phi(x, y, t) = X(x - ct) Y(y);$$

$$X(x) = C_n e^{in kx} + C_n^* e^{-in kx} =$$

$$= 2(\operatorname{Re} C_n \cos(n kx) - \operatorname{Im} C_n \sin(n kx));$$

$$Y(y) = T_n e^{nky} + T_{-n} e^{-nky} = \frac{\operatorname{ch}(n k(y+h))}{\operatorname{ch}(n kh)};$$

$$T_n = \frac{e^{nkh}}{e^{nkh} + e^{-nkh}} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th}(nkh)). \quad (2.19)$$

Загальний розв'язок рівняння Лапласа є лінійною комбінацією всіх частинних розв'язків ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{in k(x-ct)} + C_n^* e^{-in k(x-ct)}) \times \\ &\times (T_n e^{nky} + T_{-n} e^{-nky}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для симетричних хвиль має виконуватись співвідношення  $\Phi_y(\theta) = -\Phi_y(-\theta)$ , що приводить до такої умови симетричності хвилі:

$$C_n^* = -C_n, \quad (2.21)$$

тобто коефіцієнти  $C_n$  мають бути уявними.

## 2.5. Хвилі малої амплітуди (лінійне наближення)

Знайдемо, коли можна знехтувати нелінійністю граничних умов. Оцінимо порядок величини доданків у рівнянні Ейлера (1.1):

$$|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| \simeq \frac{v\delta v}{\delta r}, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| \simeq \frac{\delta v}{\delta t},$$

де  $\delta v$ ,  $\delta r$ ,  $\delta t$  – характерні зміни відповідно швидкості, відстані й часу. Для оцінки руху хвиль можна вважати  $\delta r \simeq \lambda$  – довжина хвилі,  $\delta t \simeq T$  – період хвилі. Тоді

$$\frac{|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|}{\left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|} \simeq \frac{vT}{\lambda} = \frac{v}{c} \simeq \frac{H}{\lambda} \equiv A.$$

Таким чином, нелінійний доданок  $|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|$  малий порівняно з лінійним доданком  $\left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|$ , якщо  $H \ll \lambda$  ( $A \ll 1$ ), тобто амплітуда хвиль значно менша за їх довжину. Хвилі, для яких внесок нелінійності знехтовно малий (це досягається при  $A \rightarrow 0$ ), називаються *лінійними* або *хвилями нескінченно малої амплітуди*. Розглянемо основні властивості лінійних хвиль.

Швидкість  $c$  і профіль хвилі знаходимо з граничних умов на вільній поверхні. В лінійному наближенні всі похідні на вільній поверхні  $y = \eta(x, t)$  записують на нульовому рівні  $y = 0$  (оскільки наступні члени відповідного розкладу в ряд Тейлора навколо незбуреного рівня  $y = 0$  мають вищий порядок малості за параметром  $A$ ). Тоді кінематична і динамічна граничні умови (2.3) і (2.13) набувають такого вигляду:

$$\eta_x = -\frac{1}{c} \Phi_y \Big|_{y=0}, \quad (2.22)$$

$$\eta = \frac{c}{g} \Phi_x \Big|_{y=0}. \quad (2.23)$$

Виключаючи профіль вільної поверхні, одержуємо

$$\left( \frac{c^2}{g} \Phi_{xx} + \Phi_y \right) \Big|_{y=0} = 0. \quad (2.24)$$

Підставляючи в дане рівняння розв'язок (2.20) рівняння Лапласа при  $n = 1$  (лінійне наближення), знаходимо

$$c^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th}(kh) \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = gk \operatorname{th}(kh). \quad (2.25)$$

Дане співвідношення виражає залежність швидкості/частоти хвилі від її хвильового числа/довжини, тобто між часовими й просторовими характеристиками хвилі. Така залежність називається *дисперсією* хвилі [10].

Функція  $\text{th}(kh)$  швидко прямує до одиниці з ростом  $kh$ . Наприклад, вже при  $kh = 20$  маємо  $1 - \text{th}(kh) \approx 8,5 \cdot 10^{-18}$ , а при  $kh = 100$  маємо  $1 - \text{th}(kh) \approx 2,8 \cdot 10^{-87}$ . Таким чином, навіть випадок  $kh = 20$  можна з великою точністю ( $\approx 10^{-15}\%$ ) вважати випадком нескінченної глибини (глибокої води), а тим більше й вищі значення  $kh$ . Таким чином, під *глибокою водою* (нескінченною глибиною) надалі будемо розуміти випадок, коли  $\text{th}(kh) \simeq 1$ , але при цьому глибина  $h$  не настільки велика, що стає суттєвим зміна густини рідини внаслідок зміни тиску. Для випадку глибокої води в табл. 1 наведено чисельні значення швидкості, частоти і періоду лінійних хвиль при декількох різних значеннях довжини хвилі.

Профіль вільної поверхні в лінійному наближенні знаходимо з граничної умови (2.23), враховуючи співвідношення (2.19):

$$\eta = \frac{ick}{g} \left( C_1 e^{ik(x-ct)} + C_1^* e^{-ik(x-ct)} \right) = -\frac{2ck}{g} \left( \text{Re } C_1 \sin(k(x-ct)) + \text{Im } C_1 \cos(k(x-ct)) \right). \quad (2.26)$$

Якщо хвиля *симетрична*, то  $\eta(x-ct) = \eta(-x+ct)$ , звідки  $\text{Re } C_1 = 0$ . Тоді остаточно одержуємо

$$\eta = a \cos(kx - \omega t), \quad a = -\frac{2ck}{g} \text{Im } C_1; \quad (2.27)$$

**Таблиця 1. Швидкість, частота і період лінійних хвиль при декількох значеннях довжини хвилі у випадку нескінченної глибини, а також їх потужність при  $A = 0,1$  (обчислення зроблені при  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  і  $\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$ )**

$\lambda, \text{ м}$	1	$2\pi$	10	50	100
$k, \text{ м}^{-1}$	0,16	1	1,59	7,96	15,92
$c, \text{ м/с}$	1,25	3,13	3,95	8,83	12,49
$\omega, \text{ с}^{-1}$	7,85	3,13	2,48	1,11	0,78
$T, \text{ с}$	0,80	2,01	2,53	5,66	8,01
$H, \text{ м}$	0,1	0,63	1	5	10
$P, \text{ кВт/м}$	0,008	0,78	2,49	139,3	787,9

$$\Phi = \frac{ga}{\omega} \sin(kx - \omega t) (T_1^+ e^{ky} + T_1^- e^{-ky}) = ac \sin(kx - \omega t) \frac{\text{ch}(k(y+h))}{\text{sh}(kh)}. \quad (2.28)$$

Величина  $a$  в лінійному випадку є *висотою*  $\eta(0)$  хвилі над рівнем спокійної води, яка, в свою чергу, рівна половині висоти хвилі:

$$a = \frac{H}{2} = \frac{\lambda A}{2} = \frac{\pi A}{k}. \quad (2.29)$$

Для розподілу швидкостей маємо

$$\Phi_x = \frac{dx}{dt} = ack \cos(kx - \omega t) \frac{\text{ch}(k(y+h))}{\text{sh}(kh)}; \quad \Phi_y = \frac{dy}{dt} = ack \sin(kx - \omega t) \frac{\text{sh}(k(y+h))}{\text{sh}(kh)}. \quad (2.30)$$

При цьому густина імпульсу хвилі  $I$ , розрахована за формулою (2.15), в лінійному наближенні за малим параметром  $ak$  дорівнює нулю. Таким чином, *лінійні хвилі не спричиняють перенос маси – в лінійному наближенні траєкторії частинок рідини є замкненими симетричними лініями*. Вигляд цих ліній можна одержати з рівнянь (2.30), де швидкості  $\Phi_x$  і  $\Phi_y$  необхідно лінеаризувати навколо рівноважного положення частинки  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , відкинувши нелінійні доданки за малим параметром  $ak$ . Тоді, враховуючи закон дисперсії (2.25), маємо

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -a \sin(kx_0 - \omega t) \frac{\text{ch}(k(y_0+h))}{\text{sh}(kh)}; \\ y - y_0 &= a \cos(kx_0 - \omega t) \frac{\text{sh}(k(y_0+h))}{\text{sh}(kh)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Отже, в лінійній хвилі частинки рідини рухаються за годинниковою стрілкою по *еліпсах*:

$$\frac{(x-x_0)^2}{\left(\frac{a \text{ch}(k(y_0+h))}{\text{sh}(kh)}\right)^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\left(\frac{a \text{sh}(k(y_0+h))}{\text{sh}(kh)}\right)^2} = 1, \quad (2.32)$$

у яких горизонтальна вісь більша за вертикальну. При цьому період обертання частинок  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$ . Для *глибокої води* ( $h \rightarrow \infty$ ) еліпси перетворюються на *кола*.

Густина енергії хвилі, розрахована за формулою (2.14), в лінійному наближенні має вигляд

$$E = K + U = \frac{\rho g a^2}{2}, \quad K = U = \frac{\rho g a^2}{4}, \quad (2.33)$$

тобто для хвиль нескінченно малої амплітуди кінетична і потенціальна енергії дають рівнозначний внесок у повну енергію хвилі.

Розподіл кінетичної енергії за глибиною можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_K &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E}_K d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho v^2}{2} d\theta = \\ &= \frac{\rho g a^2}{k} \frac{\operatorname{ch}(2k(y+h))}{\operatorname{sh}(2kh)} = \left| h \gg \lambda \right| = \frac{\rho g a^2}{k} \frac{1}{2} \exp(2ky), \end{aligned}$$

де  $\mathcal{E}_K$  – об’ємна густина кінетичної енергії. Відповідна залежність наведена на рис. 2. Видно, що вся кінетична енергія хвилі зосереджена в поверхневому шарі з товщиною  $\lambda/2$ . Саме цей факт покладений в основу роботи установок з відбору енергії хвиль і перетворення їх в механічну роботу або електричну енергію для подальшого використання. Різні методи перетворення енергії хвиль та види хвиле-енергетичних установок детально розглянуті в [14, 147].

Потужність хвилі, розрахована за формулою (2.18), має вигляд

$$P = \frac{\rho g a^2}{4} c \left( 1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh}(2kh)} \right) = E c_g, \quad (2.34)$$

де

$$c_g = \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh}(2kh)} \right) = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.35)$$

є за визначенням *груповою швидкістю* хвилі. Формула (2.34) означає, що енергія хвилі переноситься в просторі з груповою швидкістю, котра завжди менша за фазову швидкість ( $c_g \rightarrow c$  лише при  $h \rightarrow 0$ ). Таким чином, перенос енергії хвиль завжди відстає від руху фронту хвилі. У випадку нескінченної глибини групова швидкість вдвічі менша за фазову:

$$c_g|_{h \rightarrow \infty} = \frac{c}{2}.$$

Значення потужності хвиль, обчислені за формулою (2.34), наведені в табл. 1 при  $A = 0,1$  для декількох значень довжини хвилі. Вибір даного значення амплітуди  $A$  буде детальніше аргументований в наступних розділах, де розглянута нелінійна теорія хвиль. Там буде показано, що лінійна теорія справедлива з достатньою точністю саме при

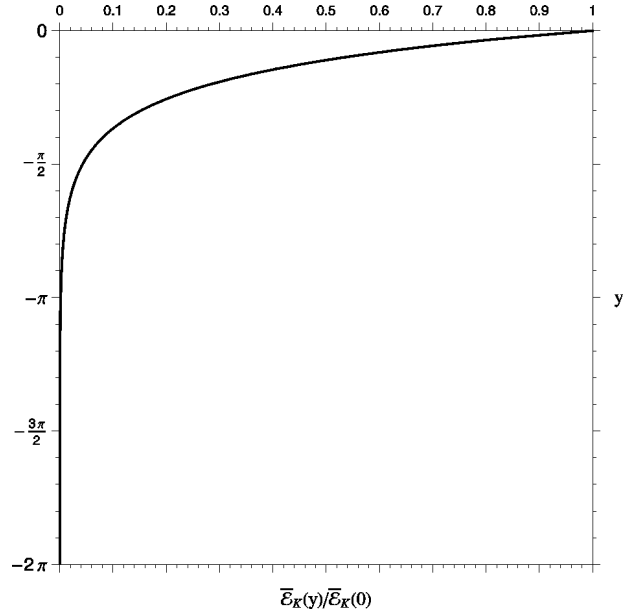


Рис. 2. Розподіл енергії хвиль за глибиною

$A \lesssim 0,1$ . Видно, що хвилі довжиною 10 м і більше мають гігантську потужність, яку можна використовувати як самовідновлювальне джерело енергії. Більш детальний експериментальний курс у теорію лінійних хвиль на поверхні рідини даний в класичних підручниках [9, 31, 33].

## 2.6. Безрозмірні рівняння і величини

Для подальшого аналізу безрозмірно рівняння канонічної моделі. Виберемо одиниці довжини  $r$ , часу  $t$  і маси  $m$  так, щоб у безрозмірних змінних

$$k^B = g^B = \rho^B = 1.$$

Для цього всі довжини віднормуємо на величину, обернену до хвильового числа  $k$ , а час – на величину, обернену до частоти  $\omega_0 = \sqrt{gk}$  – лінійної частоти хвилі для нескінченної глибини. Тоді зв'язок між безрозмірними й розмірними величинами виражається співвідношеннями

$$\begin{aligned} r^B &= r^P k, & h^B &= h^P k, & t^B &= t^P \omega_0, \\ v^B &= \frac{v^P}{c_0}, & \nabla^B &= \frac{\nabla^P}{k}, & \Phi^B &= \frac{k}{c_0} \Phi^P, \\ m^B &= \frac{k^3}{\rho} m^P, & E^B &= \frac{k^2}{\rho g} E^P, & I^B &= \frac{k^2}{\rho \omega_0} I^P, \end{aligned} \quad (2.36)$$

де  $c_0 = \omega_0 / k$  – лінійна фазова швидкість хвилі у випадку нескінченної глибини. При цьому

$$\lambda^B = 2\pi, \quad \omega^B = c^B, \quad \theta^B = x^B - c^B t^B, \quad \frac{\partial}{\partial x^B} = \frac{\partial}{\partial \theta^B}.$$

У безрозмірних змінних (відповідний індекс опускаємо) рівняння канонічної моделі набувають вигляду

$$\Phi_{\theta\theta} + \Phi_{yy} = 0, \quad -h \leq y \leq \eta(\theta); \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{2} \left( (c - \Phi_\theta)^2 + \Phi_y^2 \right) + \eta = B, \quad y = \eta(\theta), \quad (2.38)$$

$$B = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2} \left. \Phi_\theta^2 \right|_{y=-h} + \bar{\eta};$$

$$(c - \Phi_\theta)\eta_\theta + \Phi_y = 0, \quad y = \eta(\theta); \quad (2.39)$$

$$\Phi_y = 0, \quad y = -h. \quad (2.40)$$

При фіксованій глибині  $h$  дана система рівнянь визначає невідомі потенціал швидкості  $\Phi(\theta, y)$ , профіль вільної поверхні  $\eta(\theta)$  і фазову швидкість хвилі  $c$  залежно лише від одного безрозмірного параметра – амплітуди хвилі  $A = H^P / \lambda^P = H^B / 2\pi$  ( $H$  – висота хвилі):

$$A = \frac{\eta(0) - \eta(\pi)}{2\pi}. \quad (2.41)$$

З рівняння Бернуллі (2.38) можна одержати також інший вираз

$$A = \frac{q^2(\pi) - q^2(0)}{4\pi}, \quad (2.42)$$

де  $q(0)$  і  $q(\pi)$  – швидкості частинок рідини відповідно на гребені й впадині хвилі в системі відліку, де хвиля нерухома. Таку систему відліку будемо називати *власною системою відліку хвилі*.

Якщо потенціал швидкості й фазова швидкість знайдені, то траєкторії частинок можна знайти з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \Phi_\theta(\theta, y), \quad \frac{dy}{dt} = \Phi_y(\theta, y). \quad (2.43)$$

Енергія (2.14) й імпульс (2.15) хвилі в безрозмірних змінних мають вигляд

$$E = K + U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta(\theta)} (\Phi_\theta^2 + \Phi_y^2) d\theta dy +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\eta^2(\theta) - \bar{\eta}^2) d\theta. \quad (2.44)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta(\theta)} \Phi_x d\theta dy. \quad (2.45)$$

### 2.7. Лінії струму і конформне відображення в площину комплексного потенціалу

Кінематична гранична умова (2.2) означає, що швидкість частинок рідини на кожній границі напрямлена по дотичній до поверхні. Лінії потоку рідини, в кожній точці яких вектор поля швидкості спрямований по дотичній, називають *лініями струму* [12]. Рівняння для ліній струму знаходимо з умови паралельності векторів  $\mathbf{v}$  і  $d\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0. \quad (2.46)$$

У власній системі відліку хвилі, де хвиля нерухома, і при плоскому русі рідини рівняння для ліній струму можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{dy}{d\phi} \Leftrightarrow -\phi_y d\theta + \phi_\theta dy = 0. \quad (2.47)$$

Тут функція  $\phi(\theta, y)$  є потенціалом швидкості у власній системі відліку хвилі, причому зв'язок з потенціалом  $\Phi(\theta, y)$  у лабораторній системі відліку (нерухомий відносно дна) виражається співвідношенням

$$\phi(\theta, y) = \Phi(\theta, y) - c\theta. \quad (2.48)$$

При цьому з рівняння Лапласа маємо

$$\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial (-\phi_y)}{\partial y}.$$

Дане співвідношення означає, що існує функція  $\psi(\theta, y)$  така, що

$$\phi_\theta = \psi_y, \quad \phi_y = -\psi_\theta. \quad (2.49)$$

Функцію  $\psi(\theta, y)$  називають *функцією струму*, а рівняння (2.49) є відомими умовами Коші–Рімана того, що комплексна величина  $w = \phi + i\psi$  є аналітичною функцією комплексного аргументу  $\zeta = \theta + iy$ . Функція  $w(\zeta)$  має назву *комплексного потенціалу* [10]. При цьому вираз  $-\phi_y d\theta + \phi_\theta dy$  є



повним диференціалом функції  $\psi$ , так що з умови (2.47) на лінії струму

$$d\psi = 0 \Leftrightarrow \psi(\theta, y) = \text{const}, \quad (2.50)$$

причому стала  $\text{const}$  різна для різних ліній струму. Функція струму  $\psi(\theta, y)$  зберігає стале значення вздовж кожної лінії струму. В термінах потенціалу швидкості лінії струму визначаються з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\theta}{dt} = \phi_\theta = \Phi_\theta(\theta, y) - c, \quad \frac{dy}{dt} = \phi_y = \Phi_y(\theta, y). \quad (2.51)$$

Зауважимо, що лінії струму (2.51) і траєкторії частинок (2.43) – це різні криві. Лінії струму задають напрям швидкості різних частинок рідини в послідовних точках простору в *фіксований момент часу* (змінні Ейлера), тоді як траєкторії задають напрям швидкості фіксованих частинок у *послідовні моменти часу* (змінні Лагранжа) [10].

Аналітична функція  $w(\zeta)$  однозначно відображає точки площини комплексної змінної  $\zeta = \theta + iy$ , яку називатимемо *фізичною площиною*, на площину комплексної змінної  $w = \phi + i\psi$ , яку називатимемо *оберненою площиною*. Таке відображення називають *конформним* [12]. Геометрія границь, що обмежують область, зайняту рідиною, часто значно простіша в оберненій площині, оскільки функція струму  $\psi$  стала на кожній з границь за умови стаціонарності поля швидкості, тоді як у фізичній площині ці границі можуть мати складну геометричну форму. Виходячи з цих міркувань, плоскі задачі часто зручніше розв'язувати в оберненій площині, вважаючи потенціал швидкості  $\phi$  й функцію струму  $\psi$  незалежними змінними, а просторові координати  $\theta$  і  $y$  – функціями від  $\phi$  і  $\psi$ .

Квадрат швидкості у власній системі відліку хвилі виражається через комплексний потенціал таким чином:

$$(c - \Phi_\theta)^2 + \Phi_y^2 = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|^2, \quad (2.52)$$

оскільки

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} &= \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + i \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \phi_\theta - i\phi_y \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_\theta &= \text{Re}\left(\frac{dw}{d\zeta}\right), \quad \phi_y = -\text{Im}\left(\frac{dw}{d\zeta}\right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Величина  $\frac{dw}{d\zeta}$  називається *комплексною швидкістю* [10]. В комплексних змінних рівняння (2.51) для ліній струму мають вигляд

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^*. \quad (2.54)$$

Функцію струму в лабораторній системі відліку  $\Psi(\theta, y)$  визначимо так, щоб залишалися справедливими умови Коші–Рімана:

$$\Phi_\theta = \Psi_y, \quad \Phi_y = -\Psi_\theta. \quad (2.55)$$

Для цього  $\Psi(\theta, y) = \psi(\theta, y) + cy$ . Функція

$$W = \Phi + i\Psi = w + c\zeta$$

є комплексним потенціалом у лабораторній системі відліку. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}(W + W^*) \equiv -ic(R - R^*), \\ \Psi &= \frac{1}{2i}(W - W^*) \equiv c(R + R^*), \end{aligned} \quad (2.56)$$

де для зручності введено комплексну функцію

$$R = \frac{iW^*}{2c},$$

причому для виконання умов Коші–Рімана (2.55) необхідно, щоб

$$R_\theta = iR_y \Leftrightarrow R(\theta, y) = R(y + i\theta). \quad (2.57)$$

Будь-яка комплексна функція  $R$ , для якої виконується умова (2.57), тотожно задовольняє рівняння Лапласа  $\Delta R = 0$ . При цьому, враховуючи співвідношення (2.56), рівняння Лапласа для потенціалу швидкості  $\Delta\Phi = 0$  й функції струму

$$\Delta\Psi = 0 \quad (2.58)$$

також задовольняються тотожно.

Враховуючи співвідношення (2.56) і (2.57), кінематична гранична умова (2.39) набуває вигляду

$$\frac{d}{d\theta}(R(\theta, \eta) + R^*(\theta, \eta) - \eta) = 0$$

або

$$\Psi(\theta, \eta) - c\eta = \text{const} = 0 \Leftrightarrow \psi(\theta, \eta) = 0. \quad (2.59)$$

Останнє рівняння означає, що вільна поверхня  $y = \eta(\theta)$  є лінією струму. Оскільки функція струму визначена з точністю до довільної сталої, як це випливає з умов Коші–Рімана (2.55), то і стала інтегрування  $\text{const}$  у рівнянні (2.59) взагалі є також довільною. Проте цю довільну сталу прийнято вибирати так, щоб на вільній поверхні функція струму  $\psi = 0$ , звідки  $\text{const} = 0$ . При цьому, зафіксувавши  $\text{const}$ , ми тим самим однозначно визначаємо функцію струму.

З граничної умови (2.40) на дні аналогічно до умови на вільній поверхні випливає, що дно, як і вільна поверхня, є лінією струму, тобто  $\psi(\theta, -h) = \text{const}$ . Сталу інтегрування можна визначити, обчисливши *потік рідини*  $Q$  через криву, що з'єднує довільні точки “1” і “2” на дні й вільній поверхні, відповідно. При цьому орієнтацію вектора нормалі  $\mathbf{n}$  до кривої в кожній точці вибиратимемо так, щоб кут між вектором  $\mathbf{n}$  і напрямом  $d\mathbf{l}$  обходу кривої (за абсолютною величиною  $d\mathbf{l}$  – елемент довжини кривої) становив  $+\frac{\pi}{2}$ , тобто найкоротший поворот від вектора  $\mathbf{n}$  до вектора  $d\mathbf{l}$  здійснювався проти годинникової стрілки. Тоді

$$Q = \int_1^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{l} = \int_1^2 (-\phi_y d\theta + \phi_\theta dy) = \int_1^2 d\psi = (\psi_2 - \psi_1). \quad (2.60)$$

При цьому потік не залежить ані від форми кривої, ані від положення точок “1” і “2”. Оскільки на вільній поверхні вибрано  $\psi = 0$ , то з формули (2.60) одержуємо, що  $\text{const} = -Q$ . В термінах потенціалу швидкості потік  $Q$  визначено як

$$Q = \int_{-h}^{\eta(\theta)} (\Phi_\theta - c) dy. \quad (2.61)$$

Якщо в усій області, зайнятій рідиною,  $\Phi_\theta < c$ , то  $Q < 0$ , і  $\psi|_{y=-h} > 0$ , тобто за умови, що хвиля рухається швидше за частинки рідини, значення функції струму у власній системі відліку хвилі монотонно зростає від нуля на вільній поверхні до значення  $|Q|$  на дні.

Потік маси  $Q$  і значення функції струму на дні можна виразити через імпульс хвилі  $I$ . Враховуючи умови Коші–Рімана (2.55), з формули (2.45)

одержуємо

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_{-h}^{\eta(\theta)} \Psi_y(\theta, y) dy \right) d\theta = \bar{\Psi}|_{y=\eta(\theta)} - \bar{\Psi}|_{y=-h} = c\bar{\eta} - (\psi|_{y=-h} - ch).$$

Отже,

$$\Psi(\theta, -h) = c\bar{\eta} - I \Leftrightarrow \psi(\theta, -h) = -Q = c(\bar{\eta} + h) - I. \quad (2.62)$$

Величина  $Q_0 = c(\bar{\eta} + h)$  за абсолютною величиною є потоком маси, що виникає у власній системі відліку внаслідок її руху відносно нерухомої лабораторної системи відліку (у власній системі відліку спостерігачу здається, що рідина рухається справа наліво зі швидкістю  $c$ ). Повний потік маси  $Q$  відрізняється від “нульового” потоку  $Q_0$  на величину  $I$ . Отже, імпульс хвилі  $I$  визначений потоком маси, який породжує хвиля в напрямі свого поширення. Цей потік часто називають *дрейфовим*, оскільки він викликаний дрейфом частинок рідини в напрямі поширення хвиль, або *приповерхневим*, оскільки дрейфова швидкість частинок рідини швидко спадає з глибиною [9]. На честь Стокса, хто першим встановив ці властивості хвиль [164], цей потік також називають *стоксовим*, а відповідні хвилі – *стоксовими* (див. розділ 3). Для наочності на рис. 3 зображені лінії струму в стоксовій хвилі, які ілюструють природу ненульового стоксового потоку. Відповідні траєкторії частинок рідини в лабораторній системі відліку наведено в розділі 5.4.

Оскільки

$$-Q = c(\bar{\eta} + h) - I = c\left(\bar{\eta} + h - \frac{I}{c}\right) \equiv cd, \quad (2.63)$$

то величина  $d$  є глибиною однорідного потоку, що рухається у власній системі відліку хвилі зі швидкістю  $c$  справа наліво, потік маси якого дорівнює потоку маси хвилі  $Q$ . Глибина  $d$  називається *незбуреною глибиною*<sup>2</sup> [59] і визначає значення функції струму на дні:

$$\frac{\psi|_{y=-h}}{c} = d. \quad (2.64)$$

<sup>2</sup> undisturbed depth (англ.).

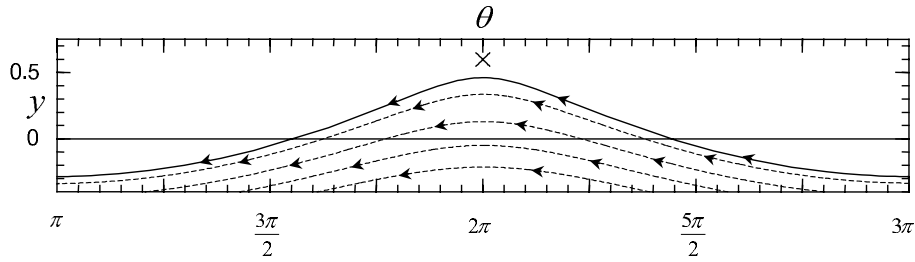


Рис. 3. Зображення ліній струму в стоксовій хвилі (у власній системі відліку хвилі)

При цьому глибина  $h$ , визначена відносно середнього рівня хвилі ( $\bar{\eta} = 0$ ), більша за незбурену глибину  $d$  на величину

$$h - d = \frac{I}{c} > 0. \quad (2.65)$$

Кінетичну енергію хвилі  $K$  можна виразити через імпульс хвилі  $I$  (або стоксовий потік) таким чином:

$$K = \frac{cI}{2}. \quad (2.66)$$

Це співвідношення вперше встановив Леві-Чивіта у 1924 р. (див. роботу [103]).

Вигляд загальних розв'язків рівняння Лапласа в фізичній і оберненій площинах наведено в Додатку А.

### 3. Гравітаційні хвилі скінченної амплітуди

#### 3.1. Хвилі Стокса

Розв'язком рівнянь канонічної моделі (2.37)–(2.40) при  $A \rightarrow 0$  є лінійна хвиля з  $\eta \rightarrow 0$  – хвиля нескінченно малої амплітуди (відносно довжини хвилі  $\lambda$ ). Фазову швидкість лінійних хвиль у безрозмірних змінних задано співвідношенням  $c = \text{th } h$ , а у випадку глибокої води  $c = 1$ . Форма вільної поверхні лінійної хвилі – косинусоїда, а швидкість частинок рідини нескінченно мала порівняно з фазовою швидкістю хвилі:  $\frac{\Phi_\theta}{c} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Phi_y}{c} \rightarrow 0$ .

Для хвиль скінченної амплітуди ( $A \neq 0$ ) необхідно враховувати нелінійність граничних умов. Якщо  $A \ll 1$  (такі хвилі називаються хвилями *малої амплітуди*), то можна розвивати теорію збурень за малим параметром  $A$ . Так, наприклад, у розвиненні (А6) необхідно вважати  $a_n \sim a_1^n$ . Для гравітаційних хвиль теорію збурень вперше побудував Стокс: у 1847 р. для глибокої води [164], використовуючи розвинення в фізичній площині, а в

1880 р. для скінченної глибини [165], побудувавши розвинення в оберненій площині, де вони мають значно простіший вигляд.

Стокс вперше встановив такі властивості хвиль скінченної амплітуди:

1. Фазова швидкість нелінійної хвилі залежить від її амплітуди (дисперсія), а саме для випадку глибокої води [9]:

$$c^2 = 1 + a^2 + \frac{5}{4} a^4 + \dots, \quad (3.1)$$

де  $a$  – амплітуда першої гармоніки профілю хвилі

$$\eta = a \cos \theta + \left( \frac{1}{2} + \frac{17}{24} a^2 \right) a^2 \cos 2\theta + \frac{3}{8} a^3 \cos 3\theta + \frac{1}{3} a^4 \cos 4\theta + \dots \quad (3.2)$$

Для скінченної глибини нелінійний закон дисперсії (3.1) має значно громіздкіший вигляд [33].

2. Хвилі скінченної амплітуди спричиняють перенос маси в напрям поширення хвилі (траєкторії частинок не є замкненими лініями), тобто імпульс хвилі  $I \neq 0$ .

3. З ростом амплітуди  $a$  гребені хвилі загострюються (хоча і залишаються округлої форми), а впадини стають більш плоскими.

Завдяки цим досягненням Стокса однопараметричне сімейство розв'язків за амплітудою  $a$  (або за параметром  $A$ ) канонічної моделі, що наближено описується розвиненнями (3.1) і (3.2) (або подібними розвиненнями у випадку скінченної глибини), одержало назву хвиль Стокса або *стоксових хвиль* [33].

З формули (3.2) видно, що хвилі Стокса симетричні як відносно гребеня ( $\theta = 0$ ), так і відносно впадини ( $\theta = \pi$ ). Для хвиль малої амплітуди це довів Леві-Чивіта [99] (1925 р.), викори-

стовуючи метод конформних відображень. Пізніше Гарабедян [83] (1965 р.), використовуючи варіаційні методи і симетризацію, показав, що в рамках канонічної моделі взагалі не існують несиметричні хвилі з однаковими гребенями і однаковими впадинами.

Стокс розраховував випадок глибокої води з точністю до  $O(A^5)$  і одержав результати для скінченної глибини з точністю до  $O(A^3)$ . Результати Стокса підтвердив Релей в роботі [148] (1876 р.) і ряді подальших робіт. Знайти наступні доданки одержаних Стоксом амплітудних розкладів виявилось складним технічним завданням. Лише в 1914 р. Уїлтон [183] одержав розвинення для глибокої води з точністю до  $O(A^{10})$  (проте з помилками вже у восьмому порядку), а Де [68] (1955 р.) опублікував результати для довільної глибини з точністю до  $O(A^5)$ , що фактично стало межею розрахунків вручну. Лише використання комп'ютерної арифметики дозволило Шварцу [155] (1974 р.) побудувати стоксові розклади в оберненій площині для довільної глибини з безпрецедентною для того часу точністю  $O(A^{48})$ , що дало можливість дослідити властивості прогресивних хвиль без обмеження на малість їх амплітуди.

### 3.2. Кноїдальні хвилі

Зауважимо, що амплітудні розвинення Стокса не застосовні для хвиль на *мілкій воді*, коли величина  $h/\lambda$  мала. Причина цього полягає в тому, що на мілкій воді навіть хвилі малої амплітуди мають кноїдальну, а не косинусоїдальну форму. Це вперше встановили Кортевег і де Вріз [94] (1895 р.), показавши, що в першому наближенні профіль хвилі задається функцією [33]:

$$\eta(\theta) - \eta(\pi) = H \operatorname{cn}^2\left(\frac{\mathcal{K}(\kappa)}{\pi} \theta \mid \kappa\right) + O(H^2), \quad (3.3)$$

де  $H = \eta(0) - \eta(\pi)$ ,  $\operatorname{cn}$  – еліптичний косинус,

$$\mathcal{K}(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \kappa^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

є повним еліптичним інтегралом першого роду, його модуль  $\kappa$  можна знайти з трансцендентного рівняння

$$\frac{\kappa \mathcal{K}(\kappa)}{\pi} = \left(\frac{3H}{4h_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_0 = h + \eta(\pi).$$

Завдяки формі свого профілю хвилі на мілкій воді було названо *кноїдальними*. У вибраних безрозмірних змінних фазова швидкість таких хвиль у лінійному наближенні має вигляд  $c = \sqrt{h}$ . Теорію кноїдальних хвиль вищого порядку розробили Лайтоун [95] (1960 р.) і Чепелір [52] (1962 р.) – відповідно для другого і третього порядків. Фентон [78] (1979 р.) застосував аналітичні комп'ютерні розрахунки для одержання розв'язків дев'ятого порядку за параметром  $H/h$ .

При визначенні границь застосування хвильових теорій важливу роль відіграє число Урселла  $Ur = H\lambda^2/h^3$ . В роботі Лайтоуна [96] (1962 р.) проведений аналіз застосовності різних наближень залежно від величини  $Ur$ . В монографії [22] значення  $Ur = 20$  наведено як межа, що відділяє область застосовності теорії кноїдальних хвиль від теорії хвиль Стокса. В монографії [11] показано, що розвинення Стокса можна використовувати при  $Ur < 48$ , звідки при підстановці критичного значення  $H/h$  випливає проста умова  $h/\lambda > 1/8$ . В цій же роботі зазначено, що теорія кноїдальних хвиль застосовна при  $h/\lambda < 1/5$ .

Хоча кноїдальні хвилі на мілкій воді своєю формою суттєво відрізняються від стоксових хвиль на глибокій воді, що наближено описують амплітудним розкладом (3.2), ці хвилі з фізичної точки зору описують один і той самий об'єкт, тому надалі кноїдальні хвилі включатимемо в термін “стоксові хвилі”.

### 3.3. Швидкість частинок рідини на гребені хвилі

З рівняння Бернуллі (2.38) для швидкості поверхневих частинок рідини у власній системі відліку хвилі маємо

$$\Phi_\theta - c = \mp \sqrt{2(B - \eta) - \Phi_y^2}. \quad (3.4)$$

Видно, що внаслідок своєї квадратичності рівняння Бернуллі в загальному випадку допускає як від'ємні, так і додатні значення швидкості частинок на поверхні рідини у власній системі відліку хвилі. Зокрема, швидкість частинки на гребені хвилі дорівнює

$$q(0) \equiv (\Phi_\theta|_{y=\eta(0)} - c) = \mp \sqrt{2(B - \eta(0))}, \quad (3.5)$$

оскільки  $\Phi_y|_{y=\eta(0)} = 0$ . Розглянемо можливі варіанти.

1.  $(\Phi_\theta|_{y=\eta(\theta)} - c) < 0$  для всіх  $\theta$ . Такі розв'язки включають лінійні хвилі, коли  $(\Phi_\theta - c) \rightarrow -c < 0$ , тобто саме вони мають відповідати сімейству стоксових хвиль. Якщо умова  $(\Phi_\theta - c) < 0$  справедлива на вільній поверхні, то вона справедлива й у всій області, що зайнята рідиною. Дійсно, з вигляду частинних розв'язків (2.19) рівняння Лапласа випливає, що горизонтальна швидкість  $\Phi_\theta$  при  $\theta = \text{const}$  спадає з ростом вертикальної відстані від вільної поверхні, тобто  $\Phi_\theta|_{y<\eta(\theta)} < \Phi_\theta|_{y=\eta(\theta)}$  при фіксованому  $\theta$ . Таким чином, для стоксових хвиль  $\Phi_\theta - c < 0$ ,  $-h \leq y \leq \eta(\theta)$ ,

$$(3.6)$$

тобто *хвиля рухається швидше за частинки рідини в усій області, зайнятій рідиною*. Умову (3.6) називатимемо умовою *регулярності* потоку рідини, а відповідні хвилі – *регулярними*.

З формули (3.5) видно, що для стоксових хвиль швидкість частинки рідини на гребені хвилі зростає від значення  $q(0) = -c$  для хвиль нескінченно малої амплітуди до граничного значення  $q(0) = 0$ . Хвиля з  $q(0) = 0$ , яку називатимемо *граничною*, вже не належить до регулярних хвиль у розумінні означення (3.6). Умова  $(\Phi_\theta - c) < 0$  справедлива в усій області, зайнятій рідиною, за виключенням єдиної точки на гребені хвилі, де  $(\Phi_\theta - c) \equiv q(0) = 0$ . Це є особлива (сингулярна) точка, в якій потік нерухомий у власній системі відліку хвилі – так звана *точка застою*. Такі точки, де швидкість потоку обертається на нуль, називаються також *критичними* [10]. З кінематичної граничної умови (2.39) видно, що в точці поверхні, де  $(\Phi_\theta - c) = 0$  і  $\Phi_y = 0$ , похідна  $\eta_\theta$  невизначена, тобто має розрив, хоча сам профіль  $y = \eta(\theta)$  неперервний. Тому, якщо на гребені  $q(0) = 0$ , то поверхня хвилі в точці  $\theta = 0$  утворює кут, де похідна  $\eta_\theta$  має розрив. Такі хвилі називатимемо *гостро-гребеневими*.

2.  $(\Phi_\theta - c)|_{y=\eta(\theta)} > 0$  для всіх  $\theta$ . Цей випадок не може мати місця при поширенні хвиль, оскільки на дні  $\Phi_\theta < c$ .

3. Знакозмінний випадок. Перехід від  $\Phi_\theta - c < 0$  до  $\Phi_\theta - c > 0$  може відбутися лише в точці  $\theta = \theta_c$ , де  $(\Phi_\theta - c) = 0$ . При цьому можливі два варіанти: (а)  $\Phi_y|_{\theta=\theta_c} = 0$ , тоді абсолютне значення швидкості частинки  $q(\theta_c) = 0$ , у власній системі відліку хвилі, і  $\theta = \theta_c$  є критичною (особливою) точкою; (б)  $\Phi_y|_{\theta=\theta_c} \neq 0$ , тоді  $\theta = \theta_c$  є точкою розгалуження профілю хвилі, а сам профіль в околі цієї точки не є однозначною функцією. Спілвогель [162]

(1970 р.) строго довів, що за умови аналітичності потоку в усій області, зайнятій рідиною, профіль хвилі (лінія струму  $\psi = 0$ ) є однозначною функцією і не може мати вертикальні дотичні в жодній точці, що унеможливує існування точок розгалуження для гравітаційних хвиль. Такі точки можуть існувати для гравітаційно-капілярних хвиль (при врахуванні поверхневого натягу), профілі яких при достатньо великих амплітудах не є однозначними кривими [70]. Хвилі з кількома критичними точками на поверхні не можуть мати сталу форму, оскільки частинки рідини будуть перетікати від одного гребеня до іншого, де буде відбуватися їх накопичення. Це приведе до перекиду хвилі, а, значить, і до її руйнування.

Таким чином, не може існувати прогресивних хвиль сталої форми з  $q(0) > 0$  (такі потоки називатимемо *нерегулярними*), а умова того, що горизонтальні швидкості частинок рідини на гребенях перевищують швидкість самих гребенів, є традиційним *критерієм руйнування хвиль* [40].

## 4. Гранична хвиля Стокса

### 4.1. Кутовий потік Стокса

Граничну хвилю  $q(0) = 0$  сімейства гравітаційних хвиль з  $q(0) < 0$  вперше дослідив Стокс у своїй третій історичній роботі з теорії хвиль на воді [166] (1880 р.). Стокс показав, що якщо на гребені хвилі потік нерухомий відносно самої хвилі, то гребінь хвилі утворює кут  $120^\circ$ . Відтворимо вихідні положення для доведення цього твердження. З рівняння (3.5) випливає, що для хвилі з  $q(0) = 0$  висота гребеня над середнім рівнем хвилі

$$\eta(0) = B = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2} \overline{\Phi_x^2}|_{y=-h}. \quad (4.1)$$

Виберемо початок власної системи відліку хвилі на її гребені, тобто перемістимо рівень  $y = 0$  на величину  $\eta(0)$  вгору. В цій системі відліку рівняння Бернуллі (2.38), записане в термінах комплексного потенціалу, враховуючи співвідношення (2.52), має вигляд

$$\left| \frac{dw}{d\zeta} \right|^2 + 2 \text{Im} \zeta = 0, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (4.2)$$

де  $\zeta = \theta + i(y - \eta(0))$ ,  $\Gamma$  – рівняння поверхні.

Розглянемо комплексний потенціал потоку, описуваний степеневую функцією

$$w(\zeta) = \phi + i\psi = A\zeta^n. \quad (4.3)$$

Такий комплексний потенціал описує потік навколо кута  $\frac{\pi}{n}$ . Підстановка даного виразу в рівняння (4.2) дозволяє знайти невідомі  $n$  і  $A$  [3]. Зокрема, для показника  $n$  єдиною можливим є значення

$$n = \frac{3}{2},$$

що саме відповідає куту  $120^\circ$ . Відповідно, комплексний потенціал обтікання кута  $120^\circ$  має вигляд

$$w(\zeta) = i\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.4)$$

а обернене співвідношення таке

$$\zeta(w) = -i\left(\frac{3}{2i}w\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.5)$$

Отже, аналітична функція  $\zeta(w)$  має сингулярність порядку  $\frac{2}{3}$ . Відповідна комплексна швидкість має вигляд

$$\frac{dw}{d\zeta} = -(i\zeta)^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{3}{2i}w\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.6)$$

#### 4.2. Гіпотези Стокса

Навівши доведення про кут  $120^\circ$ , подібне до викладеного вище, а також зважаючи на те, що гребені хвиль малої амплітуди загострюються з її ростом, як це впливає з наближених розвинень вигляду (3.2), Стокс висунув такі знамениті гіпотези [166]:

1. *Однопараметричне сімейство хвиль, що при нескінченно малих амплітудах має косинусоїдальну форму, в граничному випадку прямує до гостро-гребеневої конфігурації з кутом  $120^\circ$ , і такий розв'язок існує в межах канонічної задачі.* Для обґрунтування Стокс [166] навів такі міркування: "... залишається невизначеним питання, чи може збурення (вільної поверхні – І.Г.) насправді досягти такої величини, що утворюються гребені гострої форми, або ж існує границя, для якої профіль все ще залишається гладкою кривою, і за межами якої не може існувати хвиль осциляторного безвихрового типу, що розповсюджуються без зміни форми. Після детальних міркувань я відчуваю, що такої передуючої границі немає, і ми насправді можемо наблизитись настільки, наскільки забажаємо, до конфігурації, де кривизна нескінченна,

а вершина є точкою, в якій обидва ребра, що ми щойно розглянули, утворюють кут  $120^\circ$ ."

Таку хвилю називають *граничною хвилею Стокса* або *хвилею граничної форми*.

2. *Профіль граничної хвилі між гребенями строго опуклий вниз, тобто на ньому відсутні точки перегину.* Обґрунтування Стокса [166] чисто інтуїтивні: "Питання, чи у випадку граничної форми нахил хвилі до горизонту неперервно зростає від впадини до вершини і врешті-решт прямує до  $30^\circ$ , або, з іншого боку, точки перегину, що профіль має в загальному випадку, залишаються на скінченній відстані від гребеня навіть при досягненні граничної форми так, що при русі від впадини до гребеня нахил досягає максимуму, після чого він починає спадати перед тим, як досягається вершина, є проблема, яку я не можу з впевненістю вирішити, хоча і мало сумніваюсь, що перша альтернатива вірна."

Наслідком *другої гіпотези Стокса* є те, що *кут  $120^\circ$  є вписаним при гребені хвилі граничної форми*, тобто профіль граничної хвилі наближається до кута ззовні.

3. *Гранична хвиля є хвилею максимальної висоти*, тобто в межах канонічної задачі не існує хвиль сталої форми, вищих за граничну хвилю Стокса.

Зауважимо, що доведення Стокса не залежить від амплітуди хвилі, а, отже, не заперечує можливості існування гостро-гребневих хвиль іншої амплітуди, ніж гранична хвиля Стокса (див. обговорення в роботах [60, 82, 130]). Огляд математичних доказів гіпотез Стокса даний в Додатку Б.

#### 4.3. Гіпотеза Гранта

Розв'язок Стокса (4.4) і (4.5) справедливий лише в нескінченно близькому околі гребеня хвилі, це є лише перший член розвинення навколо кута. Тому одержаний кутовий потік називають *локальним*. Для опису вільної поверхні з віддаленням від кута необхідно враховувати наступні члени розвинення. Другий член розвинення навколо особливої точки на гребені знайшов Грант [84] (1973 р.):

$$\zeta(w) = -i\left(\frac{3}{2i}w\right)^{\frac{2}{3}} + i\gamma(-iw)^{2\mu} + \dots, \quad (4.7)$$

а подальші доданки у вигляді степеневого ряду по  $\mu$  розраховував Нормен [141] (1974 р.). Показник  $\mu$

задовольняє трансцендентне рівняння

$$\operatorname{tg} \pi \mu = -\frac{2 + 3\mu}{3\sqrt{3}\mu}. \quad (4.8)$$

Перший корінь цього рівняння  $\mu = 0,73467287\dots$ . Таким чином, розвинення навколо особливої точки  $q(0) = 0$  не є степеневим (регулярним), а включає ірраціональні показники, тобто сингулярність, що утворює точка застою на гребені, має нерегулярний характер. Пізніше Емік і Фраєнкель [38] та Маклеод [136] (1987 р.) на основі аналізу інтегрального рівняння Некрасова (Б7) дали строге математичне підтвердження результатів Гранта і Нормена.

Грант [84] (1973 р.) також показав, що для всіх хвиль дограничної форми, коли  $q(0) < 0$ , особлива точка знаходиться над гребенем хвилі за межами області, зайнятої рідиною. При цьому сингулярність має порядок  $\frac{1}{2}$ , тобто  $w \sim \zeta^2$ , і лінії струму в точці застою, що в даному випадку стає *сідловою точкою*, перетинаються під кутом  $90^\circ$ . У хвилі граничної форми ця сингулярність має порядок  $\frac{2}{3}$ , і лінії струму перетинаються під кутом  $120^\circ$ . Тому Грант [84] зробив *припущення*, що *неперервний підхід до граничної хвилі Стокса можливий лише за умови, якщо сингулярність  $120^\circ$  утворюється шляхом об'єднання кількох сингулярностей  $90^\circ$* . Це скоріш за все і є причиною появи ірраціональних степеней у розвиненні (4.7) навколо кута. Лукомський і Ганджа [129] (2003 р.) надали перше чисельне підтвердження гіпотези Гранта.

#### 4.4. Основні фізичні властивості й параметри

Локальний розв'язок Стокса (4.5) та розвинення Гранта і Нормена (4.7) задовольняють рівняння Лапласа і Бернуллі (4.2), але не задовольняють асимптотику на дні, яка у випадку глибокої води має вигляд

$$\frac{dw}{d\zeta} = -c, \quad \psi = cd. \quad (4.9)$$

Для того, щоб задовольнити цю умову, необхідно шукати лінійні комбінації розв'язків навколо кута, або ж будувати наближені розвинення, які тим чи іншим чином враховують характер сингулярності навколо гребеня. Виявляється, що це простіше

зробити, якщо відобразити смугу, яку займає рідина в комплексній площині  $w$ , на кільце одиничного радіуса. Це робить відображення

$$w = -ic \ln u, \quad u = \rho \exp(is). \quad (4.10)$$

При цьому потенціал швидкості й функція струму мають вигляд

$$\phi = cs, \quad \psi = -c \ln \rho. \quad (4.11)$$

Тоді рідина займатиме кругову область, обмежену колами  $\rho = 1$  (поверхня) і  $\rho = \rho_0 = e^{-d}$  (дно). Гребінь хвилі має фазу  $s = 0$ , а впадина  $-s = \pm\pi$  (рис. 4). Для нескінченної глибини  $\rho_0 = 0$ , і дно відображається в єдину точку  $u = 0$ .

У комплексній площині  $u$  особлива точка  $\zeta = 0$  ( $w = 0$ ) знаходиться в точці  $u = 1$ , і локальний розв'язок Стокса (4.5), (4.6) має вигляд

$$\zeta = -i \left( \frac{3}{2} c(1-u) \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{dw}{d\zeta} = - \left( \frac{3}{2} c(1-u) \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.12)$$

Враховуючи ці асимптотики, Мічелл [140] (1893 р.) у випадку *нескінченної глибини* запропонував для хвилі з особливістю порядку  $\frac{2}{3}$  таку апроксимацію:

$$\frac{dw}{d\zeta} = -c(1-u)^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n. \quad (4.13)$$

Асимптотику (4.9) на дні  $u = 0$  можна автоматично задовольнити, якщо покласти  $b_0 = 1$ . Всі інші невідомі коефіцієнти  $b_n$  і швидкість хвилі  $c$  можна знайти з системи алгебраїчних рівнянь після підстановки розвинення (4.13) в рівняння Бернуллі (4.2).

Мічелл [140] розрахував перші три коефіцієнти (вважаючи, що  $b_n \sim b_1^n$ ) і одержав  $c^2 \approx 1,2$ , тобто швидкість хвилі граничної висоти приблизно в 1,09 раза більша за швидкість лінійної хвилі, і  $A \approx 0,142$ . Пізніше Хевлок [86] (1918 р.) так само розрахував ще один (четвертий) коефіцієнт і одержав  $A \approx 0,1418$ . Некрасов [17] (1919 р.) підтвердив результати Мічелла, розглянувши обернене розвинення

$$\frac{d\zeta}{dw} = -c^{-1}(1-u)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u^n, \quad \alpha_0 = 1. \quad (4.14)$$

Девіс [67] (1951 р.), використовуючи дещо інший підхід, одержав значення  $A \approx 0,1443$ .

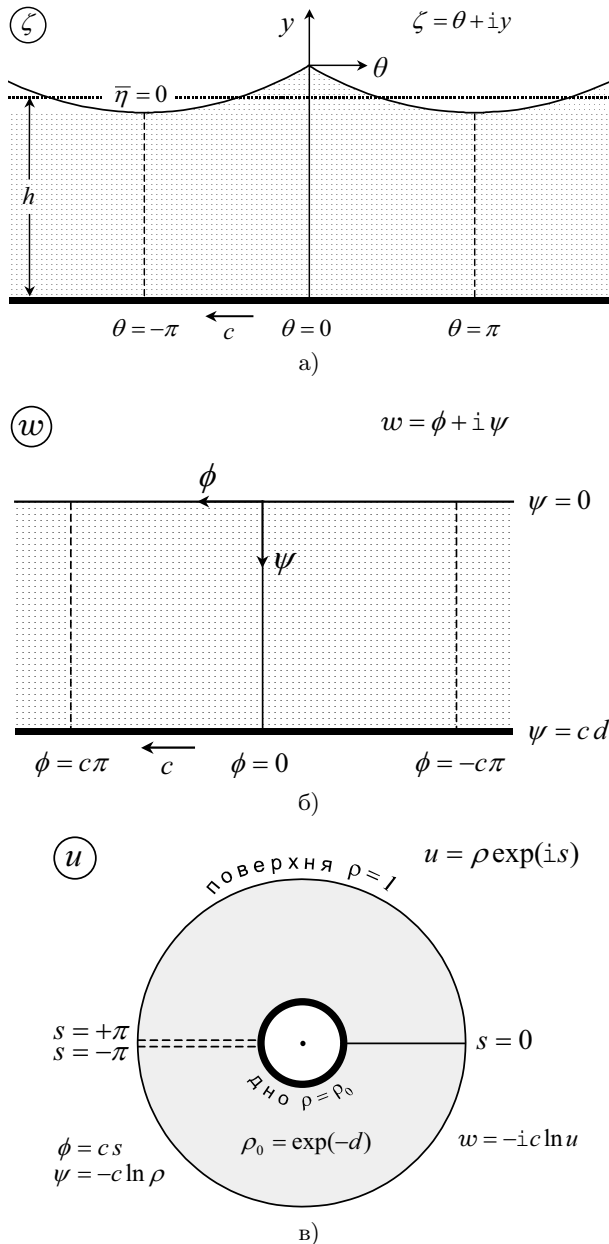


Рис. 4. Прямі і обернені площини: а – фізична площина, б – обернена площина комплексного потенціалу, в – обернена площина, відображена на кільце одиничного радіуса

Розрахунок Мічелла вдалося суттєво уточнити лише з появою комп'ютерів. Ямада [184] (1957 р.) врахував перші дванадцять коефіцієнтів розв'язання Некрасова (4.14) і одержав  $A \approx 0,1412$ . Пізніше Ямада і Шиотані [185] (1968 р.) узагальнили метод на випадок скінченної глибини.

Ольфе і Роттмен [142] (1980 р.) формалізували метод Мічелла (детальний опис їх методики даний в Додатку В) і, врахувавши  $N = 120$  коефіцієнтів, одержали  $A \approx 0,141061$ . Ганджа і Лукомський [82] (2007 р.) модифікували метод Мічелла й рівняння Ольфе і Роттмена за допомогою додаткового нелінійного відображення комплексної площини (див. Додаток В) і одержали найбільш точне на сьогодні значення амплітуди, фазової швидкості й енергії граничної хвилі Стокса:

$$c = 1,09228504859, \quad (4.15a)$$

$$A = 0,14106348398, \quad (4.15b)$$

$$U = 0,03456832591, \quad (4.15в)$$

$$T = 0,03829219689. \quad (4.15г)$$

Ці значення збіглися з асимптотиками, передбаченими Маклаковим [132] на основі теорії майже найвищих хвиль (див. розділ 5). Профіль граничної хвилі Стокса зображено на рис. 5. Ганджа і Лукомський [82] (2007 р.) також побудували криві нахилу поверхні  $\eta_\theta$  граничної хвилі Стокса (рис. 6) та другої похідної  $\eta_{\theta\theta}$  (рис. 7).

Методику обчислення граничної хвилі Стокса у випадку скінченної глибини розвинуто в роботі Уїлльямса [181] (1981 р.), див. Додаток В. Серед наближених підходів до опису граничної хвилі Стокса необхідно також відзначити роботу Лонге-Хігінса [126] (2008 р.), в якій запропоновано просту аналітичну апроксимацію для профілю хвилі. Складніші апроксимації для широкого діапазону глибин представлені в роботі Карабута [89] (1998 р.).

## 5. Хвилі великої амплітуди, їх енергія і методи обчислення

### 5.1. Екстремуми фазової швидкості, імпульсу і енергії хвиль

З ростом амплітуди гребені стоксових хвиль стають гострішими, а профіль хвилі стає більш крутим порівняно з синусоїдальною формою. Це робить задачу суттєво нелінійною, і вже при амплітудах  $A \approx 0,1$  декількох доданків теорії збурень, знайдених Стоксом і його послідовниками, стає недостатньо для правильного опису властивостей хвиль. Більш того, взагалі виникає проблема збіжності цих малоамплітудних розв'язань. Хви-



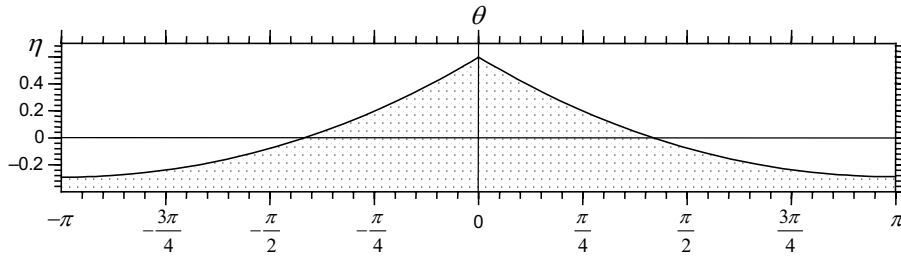


Рис. 5. Профіль граничної хвилі Стокса з кутом  $120^\circ$  (нескінченна глибина)

лі з  $A \gtrsim 0,1$  називатимемо *крутими*<sup>3</sup> або *хвилями великої амплітуди*. Дослідження властивостей крутих хвиль стало можливим лише завдяки появі електронних обчислювальних машин. Одним з перших, хто застосував нові можливості для розв'язку рівнянь канонічної моделі гідродинаміки, був Чепелір [51] (1961 р.). Він врахував перші дев'ять доданків (обрізаний ряд Фур'є) у загальному розв'язку рівняння Лапласа (A1) і, знайшовши методом колокацій відповідні коефіцієнти розвинень, розрахував декілька профілів крутих хвиль при декількох різних значеннях глибини, а також порівняв результати з розвиненнями Стокса п'ятого порядку.

Насправді ж революційну роботу зробив Шварц [155] (1974 р.), побудувавши за допомогою комп'ютерної арифметики стоксові розвинення для довільної глибини з точністю до  $O(A^{48})$ , а для глибокої води з точністю до  $O(A^{117})$ . Шварц використав розвинення в оберненій площині  $u$ , застосувавши вперше в загальній формі розвинення (B4). Підставивши це розвинення в рівняння Бернуллі й прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $u$ , Шварц одержав *нелінійну* алгебраїчну систему рівнянь для невідомих коефіцієнтів  $a_n$  і швидкості хвилі  $c$ . Прямий розв'язок цих рівнянь у той час був неможливий, тому Шварц побудував теорію збурень, розвинувши невідомі величини в степеневі ряди по малому параметру  $\epsilon$ :

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \epsilon^{n+2k}, \quad c^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \epsilon^{2k}. \quad (5.1)$$

Для розрахунку коефіцієнтів  $a_{nk}$  і  $\gamma_k$  було одержано загальні рекурентні формули.

Вибравши спочатку  $\epsilon = a_1$  – амплітуду першої гармоніки, Шварц [155] встановив, що при доста-

<sup>3</sup> steep waves (англ.)

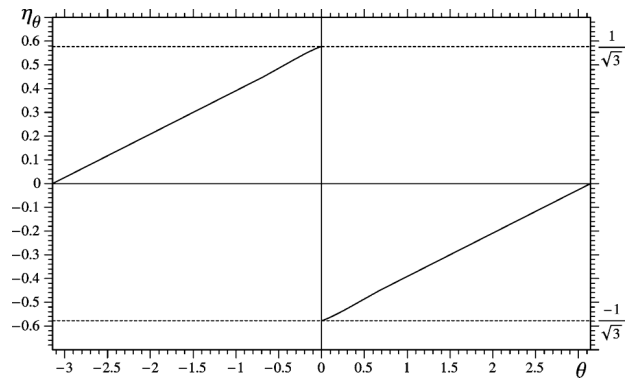


Рис. 6. Нахил поверхні хвилі Стокса з кутом  $120^\circ$

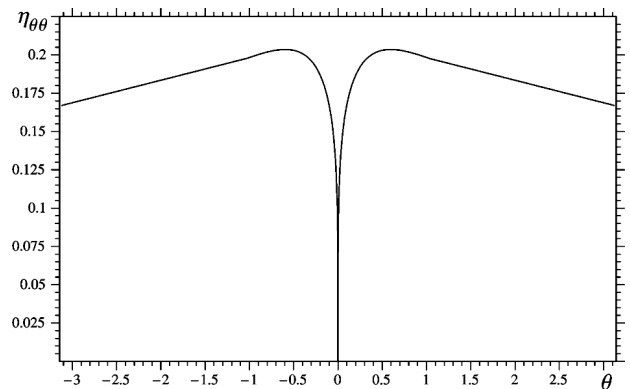


Рис. 7. Опуклість профілю хвилі Стокса з кутом  $120^\circ$

тньо великих значеннях  $a_1$  збіжність амплітудних розкладів (5.1) значно погіршується, і врешті-решт вони розбігаються. Для того щоб збільшити радіус збіжності рядів теорії збурень, Шварц використав паде-апроксимації. Він показав, що розбіжність теорії збурень по амплітуді першої гармоніки  $a_1$  зумовлена тим, що  $a_1$  не є монотонною функцією висоти хвилі  $A$  і має максимум (у випадку глибокої води при  $A \approx 0,13$ ) до того, як досягнуто граничну висоту. Цей максимум і визначає радіус

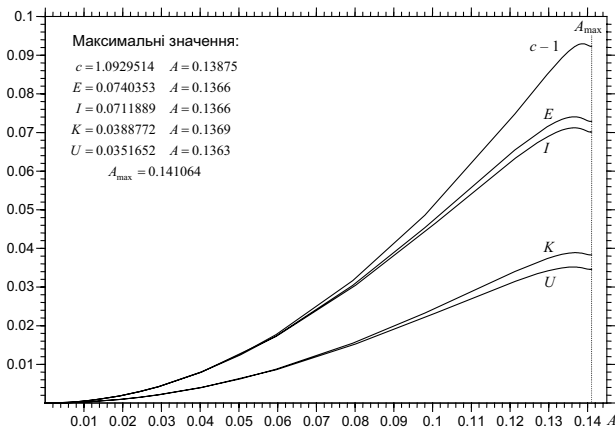


Рис. 8. Залежності фазової швидкості  $c$  стоксових хвиль, їх повної, потенціальної і кінетичної енергій  $E$ ,  $U$  і  $K$  та імпульсу  $I$  від амплітуди  $A$

збіжності амплітудних розвинень. Оскільки висота хвилі  $A$  монотонно зростає до граничного значення, то збіжність можна покращити, якщо вибрати  $\epsilon \sim A$ , як це і зробив Шварц, поклавши  $\epsilon = 2A$ . Розвинення за цим параметром дали можливість просунутись до майже граничних амплітуд, хоча все одно знадобилося використання паде-апроксимацій для покращення точності. Для глибокої води Шварц одержав  $A_{\max} = 0,1412$ , що збіглося з розрахунками Ямади [184] безпосередньо граничної хвилі Стокса.

Нарешті, Шварц [155] дав чисельне підтвердження результату Гранта [84], що хвилі дограничної форми мають особливу точку, яка знаходиться над гребенем хвилі і має сингулярність порядку  $\frac{1}{2}$ , а не  $\frac{2}{3}$ , як у граничної хвилі Стокса.

Лонге-Хіггінс [103] (1975 р.) у випадку глибокої води перерахував розвинення Шварца з параметром  $\epsilon = 2A$  в розвинення по параметру  $\epsilon^2 = v = 1 - \frac{q^2(0)q^2(\pi)}{c^2 c_0^2}$ , котрі, як виявилось, збігаються швидше. Тут  $q(0)$  і  $q(\pi)$  – швидкості частинок відповідно на гребені й впадині хвилі (у власній системі відліку хвилі),  $c_0$  – фазова швидкість лінійної хвилі. Новий параметр  $v$  окрім кращої збіжності дає ту перевагу, що межі його зміни відомі наперед: він зростає від  $v = 0$  для лінійної хвилі до  $v = 1$  для хвилі граничної форми. Одержавши розвинення з точністю  $O(v^{40})$ , Лонге-Хіггінс виявив, що подібно до амплітуди першої гармоніки фазова швидкість хвилі  $c$ , її повна, потенціальна і кінетична енергії  $E$ ,  $U$  і  $K$  та імпульс  $I$  також не є

монотонними функціями амплітуди хвилі  $A$ , а набувають максимальних значень і потім спадають до того, як досягнуто граничну амплітуду. Відповідні залежності подано на рис. 8. Таким чином, хвиля максимальної висоти не є найшвидшою і не має найбільшу енергію та імпульс, як це вважалося з часів Стокса. Коуклет [59] (1977 р.) показав, що цей результат є справедливим для всіх значень глибини, застосувавши метод Шварца для побудови розвинень по параметру  $\epsilon^2 = 1 - \frac{q^2(0)q^2(\pi)}{c^2 c_0^2}$  з точністю до  $O(\epsilon^{110})$ . Він встановив, що ще багато інших інтегральних характеристик хвилі набувають максимальних значень до того, як досягнуто граничну амплітуду. Для глибокої води Коуклет [59] одержав  $A_{\max} = 0,14105$ .

Зауважимо, що максимум фазової швидкості хвилі фактично вперше одержали Сасаки і Муракамі [154] (1973 р.), проте недостатня точність їх розрахунків не дала авторам сміливості стверджувати, що максимум швидкості дійсно має місце.

Далластон і МакКью [66] (2010 р.) використали можливість сучасної символічної арифметики для перерахунку степеневих розвинень Шварца [155] і Коуклета [59] в точному символічному вигляді до  $O(\epsilon^{300})$  і чисельно до  $O(\epsilon^{846})$ . З подальшим використанням паде-апроксимацій вони обчислили положення наступних екстремумів фазової швидкості та енергії стоксових хвиль при підході до точки максимальної амплітуди: перший локальний мінімум і другий локальний максимум. Також за допомогою апроксимації були знайдені значення амплітуди і швидкості граничної хвилі Стокса, які збіглися зі значеннями, одержаними раніше Уїлльямсом [181].

Без переходу до степеневих розвинень вигляду (5.1) необхідно розв'язувати повну нелінійну алгебраїчну систему рівнянь для коефіцієнтів загальних фур'є-розвинень (A4) у фізичній площині (перший метод Стокса) або (A6) в оберненій площині (другий метод Стокса). Перевага останніх полягає в тому, що в оберненій площині вільна поверхня відома і задана горизонтальною лінією  $\psi = 0$ . Це дає можливість значно спростити розрахунки. Так, Лонге-Хіггінс [106] (1978 р.) встановив прості квадратичні співвідношення між коефіцієнтами  $a_n$  розвинення (A6), що замінили значно складнішу алгебраїчну систему кубічних рівнянь, яка виникає при безпосередній підстановці рядів

Фур'є (А6) в рівняння Бернуллі. Відповідно метод, що оснований на цих квадратичних співвідношеннях, одержав назву *метода Лонге-Хіггінса* і внаслідок своєї простоти став стандартним методом розв'язку канонічної задачі в оберненій площині. Детальний виклад методу даний Лонге-Хіггінсом у роботах [114] (1984 р.) і [116] (1985 р.) для нескінченної глибини та [120] (1988 р.) для скінченної глибини. Зауважимо, що метод на основі квадратичних співвідношень Лонге-Хіггінса [106] для випадку глибокої води вперше реалізував Сеффмен [152] (1980 р.), а для скінченної глибини – Маклін [135] (1982 р.).

Лонге-Хіггінс [103] (1975 р.) також строго довів співвідношення, справедливі для довільної глибини,

$$dE = d(K+U) = c dI, \quad d\mathcal{L} = d(K-U) = I dc, \quad (5.2)$$

де  $\mathcal{L}$  – функція Лагранжа. Отже, екстремуми імпульсу і повної енергії збігаються, а також екстремуми фазової швидкості й функції Лагранжа.

## 5.2. Асимптотична теорія майже найвищих хвиль

Окрім появи екстремуму фазової швидкості й інших інтегральних характеристик хвилі при підході до граничної висоти проявляється ще один визначальний ефект. Так, Сасаки і Мураками [154] (1973 р.) встановили, що для хвиль майже граничної форми максимальний кут нахилу  $\vartheta$  вільної поверхні до горизонту поблизу гребеня перевищує  $30^\circ$ , хоча, як відомо, для граничної хвилі Стокса він в точності має дорівнювати  $\frac{\pi}{6}$ . Лонге-Хіггінс і Фокс [105] (1977 р.) надали підтвердження і обґрунтування цього результату, розробивши асимптотичну теорію майже найвищих хвиль. Для цього вони обрали положення нульового рівня  $y = 0$  так, щоб константа в правій частині рівняння Бернуллі (2.13) дорівнювала нулю. Для цього потрібно покласти

$$\bar{\eta} \equiv -L = -\left(\frac{c^2}{2g} + \frac{\Phi_x^2|_{y=-h}}{2g}\right),$$

тобто перемістити початок відліку вгору на відстань  $L$  від середнього рівня хвилі. В цій системі координат гребінь хвилі розташований нижче початку відліку на відстані

$$l = \frac{q^2(0)}{2g}, \quad (5.3)$$

оскільки з рівняння Бернуллі маємо  $\eta(0) = -l$ . Вибраний початок відліку збігається з гребенем граничної хвилі, де вона має особливу точку і утворює кут  $120^\circ$ . При цьому в новій системі координат усі хвилі мають різні положення середнього рівня. Характерна довжина  $l$  показує, наскільки кожна хвиля близька до граничної.

Лонге-Хіггінс і Фокс [105] поставили перед собою задачу знайти форму майже найвищих хвиль поблизу гребеня, тобто побудувати локальний розв'язок, який замість того, щоб задовольняти граничну умову на дні, наближався би при  $r \rightarrow \infty$  (де  $r$  – відстань від початку координат до поверхні хвилі) до локального кута Стокса, що заданий двома асимптотами  $\vartheta = \pm\frac{\pi}{6}$ . Цей розв'язок і відповідний потік рідини було названо *внутрішнім*. Виявилось, що в безрозмірних змінних  $r/l$  такий розв'язок єдиний, і його асимптотична поведінка (при  $r \gg l$ ) визначається комплексною парою коренів  $\mu \approx -\frac{1}{6} \pm 0,35715116i$  і того самого трансцендентного рівняння (4.8), що знайшов Грант [84]. (У протизв'язку до дійсних коренів, число яких нескінченне, рівняння Гранта має лише єдину пару комплексно спряжених коренів, звідки і випливає єдиність знайденої асимптотики). При цьому Лонге-Хіггінс і Фокс одержали трансцендентне рівняння для дещо іншого параметра  $i\nu = \frac{1}{3} + 2\mu$ , і комплексній парі коренів рівняння Гранта відповідає  $\nu_{\pm} \approx \pm 0,71430232$ . Для того, щоб розрахувати внутрішній потік на відстанях  $r \sim l$ , Лонге-Хіггінс і Фокс [105] використали підхід, схожий на метод Мічелла (4.13), і на основі одержаних даних побудували просту асимптотичну апроксимацію профілю внутрішнього розв'язку, а саме

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right) &= \\ &= \frac{3}{2} a_p \left(\frac{r}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3}{2}\nu_+ \ln\left(\frac{r}{l}\right) + b_p\right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

де  $a_p \approx 0,78$  і  $b_p \approx 0,18$  – підгоночні параметри. Видно, що профіль осцилює навколо асимптот  $\vartheta = \pm\frac{\pi}{6}$ , причому амплітуда цих осциляцій затухає з ростом  $r$ , а максимальний кут нахилу вільної поверхні згідно з розрахунками Лонге-Хіггінса і Фокса становить  $\approx 30,37^\circ$ . При цьому, оскільки розв'язок залежить від змінної  $r/l$ , окіл  $\Delta r$ , в якому мають місце осциляції профілю, стає меншим зі зменшенням характерної довжини  $l$  так, що ефект

зникає в граничному випадку  $l = 0$ , котрий відповідає хвилі максимальної висоти.

У наступній роботі Лонге-Хіггінс і Фокс [110] (1978 р.) для випадку глибокої води показали, як одержаний *внутрішній* потік асимптотично зшити з *зовнішнім* потоком, що задовольняє граничну умову на дні. Цей зовнішній розв'язок було побудовано з тієї умови, що він має в границі  $l \rightarrow 0$  задовольняти асимптотику Гранта (4.7), а, з іншого боку, асимптотику, що зшивається з внутрішнім розв'язком (5.4). Значення параметра  $\gamma$  в розвиненні Гранта було підібрано так, щоб він максимально точно апроксимував граничну хвилю Стокса, яку Лонге-Хіггінс і Фокс розраховували, модифікувавши метод Некрасова (4.14), хоча це фактично і не дало покращення точності порівняно зі стандартним методом Мічелла (4.13). В результаті зробленої зшивки було отримано прості асимптотичні формули для розрахунку квадрата фазової швидкості, кінетичної і потенціальної енергій, імпульсу та середнього рівня майже найвищих хвиль. Якщо  $f$  – якась з вказаних величин, то її поведінку при малих  $\epsilon = l \cdot k$  ( $k$  – хвильове число) можна виразити співвідношенням

$$f = f_* - a_f \epsilon^3 \cos(3\nu_+ \ln \epsilon + b_f), \quad (5.5)$$

де  $f_*$  – граничне значення величини  $f$ ;  $a_f > 0$  і  $b_f$  – сталі, що залежать від вибору  $f$  і визначені умовами зшивки зовнішнього і внутрішнього розв'язків. Зокрема, для квадрата фазової швидкості  $f = c^2$  було одержано оцінку  $c_*^2 = 1,1931$ ,  $a_f \approx 1,18$ ,  $b_f \approx 2,22$ . З виразу (5.5) видно, що *фазова швидкість хвилі та її інтегральні характеристики при підході до хвилі граничної форми показують осциляторну поведінку і мають нескінченне число локальних максимумів і мінімумів затухаючої амплітуди*. Асимптотична поведінка висоти хвилі інша:

$$A = A_* - (2\pi)^{-1} \epsilon^2 + a_A \epsilon^3 \cos(3\nu_+ \ln \epsilon + b_A), \quad (5.6)$$

де підгоночні значення сталих, що розраховували Лонге-Хіггінс і Фокс, становлять:  $A_* = 0,14107$ ,  $a_A \approx 0,16$ ,  $b_A \approx -1,54$ . Осциляторна поведінка  $A$  недостатня, щоб перевищити її монотонне зростання зі зменшенням  $\epsilon$ . Таким чином, *гранична хвиля найвища, проте не найшвидша*.

Лонге-Хіггінс і Фокс [110] також показали, що аналітичне продовження поля швидкості, одержано

ного в рамках асимптотичної теорії майже найвищих хвиль, містить сідлову точку над гребнем хвилі, як це встановив Грант [84]. Зауважимо, що асимптотична теорія Лонге-Хіггінса і Фокса в принципі справедлива для довільної глибини, проте чисельні значення параметрів було підібрано лише для випадку глибокої води. Пізніше Лонге-Хіггінс і Фокс [123] (1996 р.) показали, що асимптотичні формули дають точніші результати, якщо підгоночні параметри визначати не з умов зшивки (що носять більш якісний, ніж кількісний характер), а так, щоб вони якнайкраще апроксимували зроблені з достатньою точністю чисельні розрахунки майже найвищих хвиль.

Справедливість асимптотичної теорії Лонге-Хіггінса і Фокса підтвердив Уїлльямс [182] (1985 р.), узагальнивши свій метод розрахунку граничної хвилі Стокса (Уїлльямс [181], 1981 р.) на випадок майже найвищих хвиль. При цьому він використав ідею Гранта про те, що особливість порядку  $\frac{2}{3}$  граничної хвилі утворюється поєднанням кількох сингулярностей порядку  $\frac{1}{2}$ . Для широкого діапазону глибин безпосереднім розрахунком він одержав одне й те саме значення  $\approx 30,37^\circ$  максимального кута нахилу вільної поверхні, а також розраховував перший мінімум фазової швидкості хвилі та її інших інтегральних характеристик.

Строге математичне доведення того факту, що при підході до хвилі граничної форми максимальний кут нахилу вільної поверхні до горизонту перевищує  $30^\circ$ , дав Маклеод [137] (1979 р.), довівши для загального випадку довільної глибини таке твердження. Якщо  $\vartheta^{(\mu)}(s)$  – послідовність розв'язків інтегрального рівняння Некрасова (Б7), яка при  $\mu \rightarrow \infty$  прямує до розв'язку  $\vartheta^{(\text{lim})}(s)$  рівняння Некрасова з  $\mu = \infty$ , то при достатньо великих  $\mu$  має місце нерівність

$$\sup_{s \in [0, \pi]} \vartheta^{(\mu)}(s) > \frac{\pi}{6}.$$

Пізніше Емік [37] (1987 р.) строго показав, що будь-який додатний розв'язок ( $\vartheta(s) > 0$ ) рівняння Некрасова з  $\mu < \infty$  задовольняє оцінку згори  $\vartheta(s) < 31,15^\circ$ . Емік [37] також вказав, що осциляторна поведінка профілю хвилі при наближенні до хвилі граничної форми є нічим іншим, як феноменом Гіббса [39], коли розривні функції або неперервні функції з розривними похідними апроксимують обрізаними рядами. Чендлер і Грехем [50]

(1993 р.) для випадку глибокої води підтвердили існування феномену Гіббса в чисельних розв'язках рівняння Некрасова при підході до граничної висоти. Було встановлено, що максимальна амплітуда осциляцій Гіббса становить  $\approx 30,3787032466^\circ$ . При цьому для чисельного розв'язку рівняння Некрасова Чендлер і Грехем [50] використали суттєво нерівномірну сітку (з насиченням біля гребеня хвилі) з максимум  $N = 1026$  точок на інтервалі  $s \in [0, \pi]$ .

На рис. 9 наведено результати розрахунків першої похідної профілю вільної поверхні  $\eta_\theta$  (тангенс кута нахилу до горизонтальної осі) майже найвищих стоксових хвиль, одержані методом дробових розвинень Фур'є (див. Додаток Г). Видно, що поблизу гребеня нахил вільної поверхні дійсно перевищує  $30^\circ$ , тобто  $|\eta_\theta| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### 5.3. Методи обчислень хвиль майже граничної амплітуди

Окрім інтегрального рівняння Некрасова одержано ще багато інших інтегральних або інтегродиференціальних рівнянь для розрахунку прогресивних хвиль. Переважну частину цих рівнянь виводять за такою схемою. Оскільки комплексний потенціал – аналітична функція в області  $\Omega$ , що зайнята рідиною, то його значення в будь-якій точці  $\zeta_0$  всередині області  $G \in \Omega$  можна виразити через значення на границі  $\Gamma$  цієї області за допомогою інтеграла Коші [27]:

$$w(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (5.7)$$

У випадку періодичних хвиль контур  $\Gamma$  вибирають таким чином, щоб цілком охопити період хвилі від дна до вільної поверхні:  $\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_- + \Gamma_b + \Gamma_+$ , де  $\Gamma_s$  і  $\Gamma_b$  – ділянки контура  $\Gamma$ , що належать відповідно вільній поверхні й дну, а  $\Gamma_+$  і  $\Gamma_-$  – його вертикальні бічні ділянки, що з'єднують дно та поверхню і розташовані на відстані періоду хвилі одна від одної. Інтеграл по горизонтальному дну  $\Gamma_b$  завжди легко розрахувати, а інтеграли по  $\Gamma_+$  і  $\Gamma_-$  взаємно скорочуються внаслідок періодичності. Таким чином, інтеграл Коші (5.7) виражає значення комплексного потенціалу в будь-якій точці  $\zeta_0$  всередині рідини через значення комплексного потенціалу на вільній поверхні  $\Gamma_s$ . Інтегральне рівняння можна одержати, якщо точку  $\zeta_0$  вибрати на

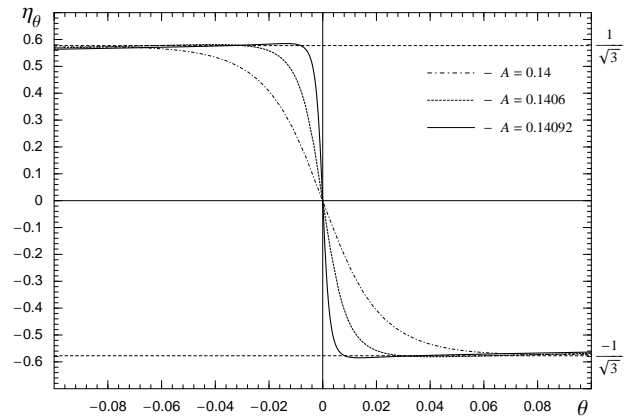


Рис. 9. Перша похідна профілю вільної поверхні майже найвищих стоксових хвиль (тангенс кута нахилу) поблизу гребеня (нескінченна глибина). Амплітуда хвиль становить 99,25%, 99,67%, 99,90% від  $A_{\max}$

вільній поверхні. При цьому, хоча інтеграл Коші в звичайному розумінні й розбігається, значення функції  $w(\zeta_0)$  дорівнює його подвоєному головному значенню [27]. Методи, що ґрунтуються на цій ідеї, називають *контурно-інтегральними*, вони є одними з найточніших методів розрахунку поверхневих хвиль. У багатьох з них замість комплексного потенціалу розглядають інші аналітичні функції, що описують потік рідини, наприклад, комплексну швидкість.

Так, Ротмен і Ольфе [150] (1979 р.) одержали інтегродиференціальне рівняння для профілю хвилі  $y = \eta(\theta)$  у фізичній площині, а Блур [45] (1978 р.) – для кута нахилу  $\theta$  вільної поверхні до горизонтальної осі. Обидва ці рівняння окрім сили тяжіння враховують також поверхневий натяг. Раніше Байатт-Сміт [48] (1970 р.) отримав інтегральне рівняння для профілю хвилі в оберненій площині  $w$ . Шварц і Ванден-Броук (1979 р.) у роботах [156] для нескінченної глибини (з врахуванням поверхневого натягу) та [178] для скінченної глибини одержали інтегродиференціальне рівняння для вільної поверхні в оберненій площині  $u$  і вперше розраховували *перший локальний мінімум* фазової швидкості та кінетичної і потенціальної енергій хвилі. Чен і Сеффмен [53] (1979 р.) для випадку глибокої води, враховуючи поверхневий натяг, отримали інтегродиференціальне рівняння для профілю хвилі в фізичній площині, застосувавши параметризацію вільної поверхні дуговою змінною

Таблиця 2. Екстремуми фазової швидкості  $c$  стоксових хвиль, розраховані методом Танаки (нескінченна глибина)

Екстремум $c$	$v$	$A$	$c$
перший max	0,8637	0,138753	1,092951384
перший min	0,9685	0,140920	1,092276839
другий max	0,9927	0,141056	1,092285150
другий min	0,9985	0,141063	1,092285047

(відстань від гребеня вздовж поверхні до її довільної точки). Пізніше Сіммен і Сеффмен [161] (1985 р.) розширили це рівняння на випадок сталої завихреності (що відповідає існуванню додаткової сталої течії або сталого вітру), а також використали додаткову параметризацію, що автоматично зосереджує чисельну сітку поблизу гребеня при наближенні до граничної хвилі. Завдяки цьому вдалося значно підняти точність розрахунків. Зокрема, для граничної хвилі Сіммен і Сеффмен [161] одержали  $c \approx 1,092285$  і  $A \approx 0,141064$ , що було дуже близько до розрахунків Уїлльямса [181] безпосередньо граничної хвилі Стокса. Сілва і Перегрін [174] (1988 р.) узагальнили інтегро-диференціальне рівняння Сіммена і Сеффмена на випадок скінченної глибини, а також використали його для розрахунку хвилі граничної форми.

Одним з найточніших і найшвидших контурно-інтегральних методів є метод Танаки, запропонований ним у роботі [171] (1986 р.) для поодиноких хвиль і розширений пізніше на випадок періодичних хвиль для довільної глибини в комп'ютерній програмі `Stokes_finite.f`<sup>4</sup> [172]. На основі рівняння (Б5), що виражає зв'язок між модулем швидкості  $q$  й кутом нахилу  $\vartheta$  вільної поверхні, Танака одержав інтегральне рівняння, що визначає залежність між функцією  $\ln q$  і кутом  $\vartheta$ . Параметром рівняння є величина

$$v = 1 - \frac{q(0)}{q(\pi)}. \tag{5.8}$$

Для лінійної хвилі  $v = 0$ , а для граничної хвилі  $v = 1$ . Одержане інтегральне рівняння розв'язують методом послідовних наближень. Для згу-

щення вузлів чисельної сітки навколо гребеня, що докорінно покращує точність розв'язку, було використано нелінійне перетворення

$$\phi = \phi' - \gamma \sin \phi', \quad 0 \leq \gamma < 1, \tag{5.9}$$

яке запропонували раніше Чен і Сеффмен [54] (1980 р.). Ефект тим сильніший, чим параметр  $\gamma$  ближчий до одиниці. Незважаючи на ефективність свого методу, результати розрахунків періодичних хвиль Танака так і не опублікував. Метод Танаки у випадку глибокої води з величезною точністю вже при  $N = 1000$  вузлів дає *другий локальний максимум* фазової швидкості хвилі, а при  $N = 3500$  – її *другий локальний мінімум* (табл. 2).

В ролі точних на сьогодні оцінок швидкості й амплітуди граничної хвилі можна вважати результати Маклакова [132] (2002 р.). Він також безпосереднім чисельним розрахунком одержав *другий максимум* і *другий мінімум* фазової швидкості й інших інтегральних характеристик хвилі, провівши точні розрахунки до амплітуди, що становить 99,99997% від граничного значення, хоча і не протабулював одержані результати. Для цього Маклаков застосував спеціально розроблену модифікацію контурно-інтегрального методу, коли для одержання потрібної точності виявилось достатньо сітки з максимум  $N = 2000$  точок. При цьому перевага над методом Танаки полягає в тому, що для одержання тієї самої точності необхідне менше число точок. Далі Маклаков використав свої розрахунки для уточнення значень підгоночних параметрів в асимптотичних формулах (5.5), (5.6) Лонге-Хігінса і Фокса для випадку глибокої води, а також розрахував значення цих сталих для широкого діапазону глибин, показавши, що асимптотичні формули застосовні й для випадку скінченної глибини. Уточнені асимптотичні співвідношення дали безпрецедентно точні значення характеристик граничної хвилі, зокрема для глибокої води  $c^2 = 1,1930866274$  ( $c = 1,0922850486$ ) і  $A = 0,14106348398$ .

Всі контурно-інтегральні методи основані на використанні конформного відображення в обернену площину. Існує також декілька підходів, в яких реалізовані розвинення потенціалу швидкості в фізичній площині без переходу до комплексного потенціалу. Огляд цих методів зроблений у Додатку Г.

<sup>4</sup> Автор вдячний професору Міцухіро Танаці за люб'язно надану копію цієї програми.

#### 5.4. Траєкторії і прискорення частинок рідини на поверхні хвилі

У власній системі відліку хвилі частинки рідини рухаються вздовж ліній струму (див. рис. 3), які задані рівняннями (2.51) – *ейлеровий підхід* до опису руху частинок. Зокрема, поверхневі частинки рухаються вздовж поверхні хвилі. На експерименті за рухом частинок спостерігають у лабораторній (нерухомій відносно дна) системі відліку – *лагранжевий підхід* до опису руху частинок. В лінійних хвилях частинки рідини описують еліпси (для глибокої води – кола) з часовим періодом  $T = 2\pi/\sqrt{gh}$ , рівним часовому періоду хвилі. Хвилі скінченної амплітуди спричиняють масоперенос у напрямі свого поширення, і траєкторії частинок у лабораторній системі відліку, які задані рівняннями (2.43),

не є замкненими кривими. Вигляд цих траєкторій для хвилі майже найвищої форми зображено на рис. 10, звідки також добре видно різницю між ейлеровим і лагранжевим підходами до однієї і тієї ж задачі. Видно, що в лабораторній системі відліку поверхнева частинка при русі від гребеня до гребеня описує криву, що за своєю формою нагадує циклоїду. Часовий період руху частинки перевищує часовий період хвилі, притому тим більше, чим амплітуда хвилі ближча до граничної. Для граничної хвилі Стокса з точкою застою на гребені час руху частинки від гребеня до гребеня стає нескінченним, що за аналогією відповідає руху по сепаратрисі математичного маятника, коли для досягнення нестійкого положення рівноваги в найвищій точці необхідний нескінченний час.

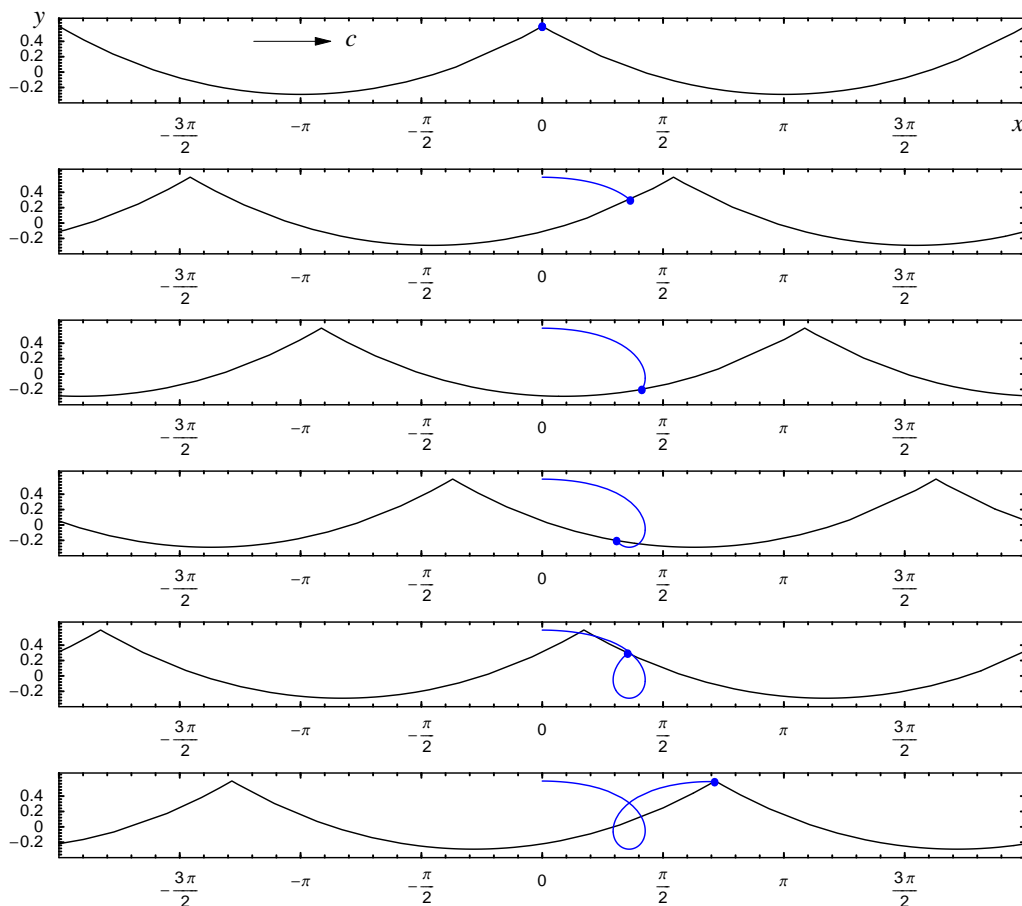
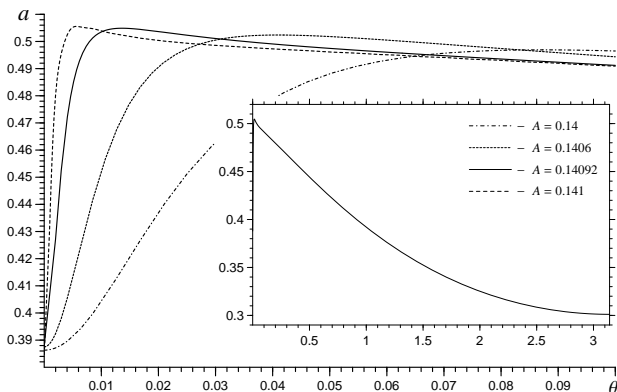


Рис. 10. Траєкторія руху частинки рідини вздовж поверхні стоксової хвилі з  $A = 0,14092$  (99,90% граничної висоти) на глибокій воді в лабораторній системі відліку



**Рис. 11.** Прискорення поверхневих частинок поблизу гребеня стоксових хвиль майже граничної форми на глибокій воді, висота хвиль становить 99,25%, 99,67%, 99,90%, 99,95% граничної висоти. Прискорення на гребені прямує до значення  $\approx 0,388g$  у власній системі відліку хвилі

Більш детальний аналіз траєкторій частинок в круглих хвилях та хвилі граничної форми можна знайти в роботах Лонге-Хігінса [111] (1979 р.) та Срокоза [163] (1981 р.). Відмінностям між ейлеровим і лагранжевим підходами до опису властивостей поверхневих хвиль, включаючи експериментальні дані, присвячено роботу Лонге-Хігінса [118] (1986 р.), а різноманітним характеристикам масопереносу в стоксових хвилях – його роботи [119] (1987 р.) та [120] (1988 р.) (відповідно для нескінченної та скінченної глибини). Лонге-Хігінс [112] (1980 р.) також дослідив момент імпульсу руху гравітаційних хвиль, а в роботі [113] (1983 р.) виписав вісім фундаментальних законів збереження для безвихрових гравітаційних хвиль (енергія, імпульс тощо). Математичним аспектам аналізу траєкторій частинок при поширенні стоксових хвиль присвячені роботи Константіна [61, 62] (2006 р., 2012 р.) та Іонеску-Крузе (2013 р.)

Важливою характеристикою руху частинок рідини є також їх прискорення. Горизонтальне  $a_x$  і вертикальне  $a_y$  прискорення частинок рідини у власній системі відліку хвилі визначені співвідношеннями

$$a_x = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Phi_{\theta\theta}(\Phi_\theta - c) + \Phi_{y\theta}\Phi_y, \tag{5.10}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \Phi_{y\theta}(\Phi_\theta - c) - \Phi_{\theta\theta}\Phi_y.$$

Для лінійних хвиль, амплітуда яких  $a$  нескінченно мала порівняно з довжиною хвилі  $\lambda$ , прискорення,

як випливає з формул (2.30) та (5.10), пропорційні відношенню  $a/\lambda$ , тобто також нескінченно малі. Для хвилі граничної форми ситуація зовсім інша. Так, з рівняння для ліній струму в комплексній формі (2.54) та вигляду комплексної швидкості навколо кута (4.6) випливає, що поблизу гребеня граничної хвилі комплексне прискорення частинок має вигляд

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = a_x + ia_y = -\frac{1}{2} \left( \frac{\zeta}{\zeta^*} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.11}$$

Таким чином, навколо кута прискорення частинок

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

у власній системі відліку хвилі скрізь рівне  $\frac{1}{2}g$  (у розмірних змінних) і спрямоване від гребеня хвилі. При цьому кожна частинка рідини рухається так, як вона рухалася би в центральному полі сталої напруженості з центром відштовхування на гребені. Розвиток цієї ідеї даний Лонге-Хігінсом у роботі [111] (1979 р.), а детальний аналіз прискорень частинок у хвилях майже граничної та граничної форми – у роботі [118] (1986 р.). З віддаленням від гребеня граничної хвилі прискорення частинок спадає.

Цікавим є результат для хвиль майже граничної форми. Лонге-Хігінс і Фокс [105] (1977 р.), використовуючи асимптотичну теорію майже найвищих хвиль, а пізніше Уїлльямс [182] (1985 р.) безпосереднім розрахунком, показали, що на гребені майже найвищих хвиль прискорення частинки становить лише  $\approx 0,388g$  (приблизно це ж значення одержали раніше Сасакі і Муракамі [154], 1973 р.). При цьому, як видно з рис. 11, максимальне прискорення поверхневої частинки поблизу гребеня дещо перевищує  $0,5g$ . Це є в точності прояв того самого ефекту Гіббса, який можна спостерігати при підході до хвилі граничної форми для максимального кута нахилу вільної поверхні, який при цьому дещо перевищує  $30^\circ$ .

## 6. Нестійкість та руйнування хвиль

### 6.1. Модуляційна нестійкість

Лайтхілл [101] (1965 р.) та Бенжамін і Фейр [41] (1967 р.) показали, що хвилі Стокса малої амплітуди на глибокій воді нестійкі відносно малих часових збурень. Нестійкість проявляється в рості па-



ри бокових компонентів з частотами  $\omega_0 \pm \omega'$  та хвильовими числами  $k_0 \pm k'$ , що приводить до часової модуляції амплітуди  $a = a(x, t)$  і фази  $\theta = \theta(x, t)$  несучої хвилі ( $\omega_0$  – частота,  $k_0$  – хвильове число основної хвилі). Цей результат також незалежно одержали Уїзем [180] (1967 р.) та Захаров [4] (1966 р.) і [5] (1968 р.). Таким чином, *модуляційна нестійкість* – це нестійкість до часової модуляції хвиль, що виражається в *нестационарності* їх поширення. Фейр [77] (1967 р.) та Бенжамін [42] (1967 р.) дали експериментальне підтвердження цьому факту. Останній також узагальнив результати для випадку скінченної глибини і показав, що модуляційна нестійкість для хвиль малої амплітуди зникає при  $kh \lesssim 1,36$ , тобто в цьому випадку хвилі стають стійкими. Цей же результат незалежно одержав Уїзем [180] (1967 р.).

Модуляційна нестійкість не означає, що стоксових хвиль не існує в природі. Вона показує лише те, що ці хвилі не зберігають сталу форму протягом значних часових масштабів (декількох періодів хвиль). Для хвиль малої амплітуди Лейк та ін. [97] (1977 р.) як теоретично, так і експериментально показали, що нестійкі модуляції зростають до деякого максимального значення, а потім спадають, при цьому хвиля повертається до майже немодульованої початкової форми. Такий процес модуляцій-демоуляцій періодично повторюється в часі. При цьому Лейк та ін. [97] експериментально встановили, що в процесі модуляцій-демоуляцій відбувається зсув частоти несучої хвилі в низькочастотну область – *явище зсуву частоти вниз*.

Модуляційну нестійкість без обмеження на малість амплітуди хвиль у випадку глибокої води дослідив Лайтхілл [102] (1967 р.). Він встановив, що для достатньо крутих хвиль (при  $A \approx 0,11$ ) модуляційна нестійкість зникає – *явище рестабілізації*. Лонге-Хіггінс [108] (1978 р.) розраховував модуляційну нестійкість більш точно на основі точних рівнянь руху (всі попередні результати було одержано з наближених еволюційних рівнянь, таких як нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння Захарова тощо). Він встановив, що рестабілізація для модуляцій з  $\omega' = 0$  відбувається при  $A \approx 0,110$ , а повна рестабілізація системи (для всіх  $\omega'$ ) – при  $A \gtrsim 0,124$ . Пізніше Лонге-Хіггінс [117] (1986 р.) уточнив свої розрахунки і показав, що для вузької смуги частот  $\omega'$  модуляційна нестійкість має місце

і при більших амплітудах, а повністю зникає лише в точці максимуму повної енергії ( $A \approx 0,1366$ ).

Лонге-Хіггінс і Коуклет [104] (1976 р.) розробили контурно-інтегральний метод для розрахунку еволюції нестационарних хвиль в послідовні моменти часу – *покроково-часовий метод*. На основі цього методу Лонге-Хіггінс і Коуклет [109] (1978 р.), використавши в ролі початкової умови модуляційно збурену стоксову хвилю з  $\omega' = \frac{1}{2}\omega_0$  при двох різних амплітудах  $A \approx 0,08$  і  $A \approx 0,10$ , показали, що при цих амплітудах модуляційна нестійкість призводить до перекиду і руйнування хвилі. Мелвілл [138] (1982 р.) надав переконливі експериментальні підтвердження цьому факту, дослідивши діапазон амплітуд  $A = 0,05-0,09$ .

Детальний аналіз модуляційної нестійкості гравітаційних хвиль й пов'язаних з нею процесів можна знайти в оглядах Юена і Лейка [186] (1982 р.) та Діаса і Харіфа [73] (1999 р.). Свіжий погляд на проблему зроблений в циклі робіт Седлецького [28–30, 159, 160] (2005–2012 рр.). У випадку великих глибин аналіз еволюції модуляцій у першому наближенні можна звести до аналізу розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера (НУШ) для комплексної амплітуди обвідної модульованої хвилі:

$$i(\mathcal{A}_t + a_1 \mathcal{A}_x) + a_2 \mathcal{A}_{xx} + a_{0,0,0} \mathcal{A}|\mathcal{A}|^2 = 0, \quad (6.1)$$

де  $\mathcal{A}(x, t) = \eta_1$ , формула (Г2),

$$a_1 = \frac{d\omega}{dk} = c_g = \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\text{sh}(2kh)} \right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{1}{2} \frac{dc_g}{dk}, \quad a_{0,0,0} = 2\omega k^2(Q - D),$$

$$Q = \frac{1}{\text{sh}^2(2kh)} \left( 1 + \frac{(2c \text{ch}^2(kh) + c_g)^2}{gh - c_g^2} \right),$$

$$D = \frac{9 \text{th}^4(kh) - 10 \text{th}^2(kh) + 9}{8 \text{th}^4(kh)},$$

а залежність частоти несучої хвилі  $\omega$  від хвильового числа  $k$  визначений лінійним законом дисперсії (2.25). Рівняння (6.1) для випадку довільної глибини вперше було одержано в роботі Хазімото і Оно [85] (1972 р.). Розширений аналіз НУШ та інших еволюційних рівнянь, що описують еволюцію і модуляцію нелінійних хвиль, представлений в монографії [72]. Вплив відкриття явища модуляційної нестійкості нелінійних хвиль на історію сучасної фізики нелінійних процесів окреслений в

роботі Захарова і Островського [187] (2009 р.). Питання модуляційної нестійкості хвиль при наявності дисипації розглянуті в роботі Ма та ін. [131] (2012 р.). Питанням побудови двопараметричних розвинень по малих параметрах нелінійності і дисперсії для одержання еволюційних рівнянь вищого порядку вигляду НУШ присвячена робота Лукомського і Ганджі [13] (2009 р.).

## 6.2. Супергармонічна (гребенева) нестійкість

Танака [169] (1983 р.) для випадку нескінченної глибини надав чисельні дані на свідчення того, що після досягнення максимуму повної енергії ( $A \approx 0,1366$ ) гравітаційні хвилі стають нестійкими відносно двовимірних збурень, які мають той самий період, що і незбурена хвиля. Така нестійкість носить назву *супергармонічної*. Для розрахунку стаціонарних хвиль, які потім були досліджені на стійкість, Танака [169] використав модифікацію метода оберненої площини, запропоновану Ямадою (1957). В оберненій площині  $u$  (де поверхня хвилі відображена на коло одиничного радіуса, див. рис. 4) замість рівняння Бернуллі (B1) було розглянуте рівняння (B6), що виражає зв'язок між модулем швидкості  $q$  й кутом нахилу  $\vartheta$  вільної поверхні. Розв'язок будують не для функції  $\zeta(u)$ , як у другому методі Стокса (B4) в оберненій площині  $u$ , а для функції  $\Theta(u) = \vartheta + i \ln q$ . Коефіцієнти розвинення шукають методом колокацій. Визначальна ідея Танаки – це використати додаткове нелінійне перетворення змінних

$$\xi = \frac{u + \alpha}{1 + \alpha u}, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad (6.2)$$

для згущення точок колокацій поблизу гребеня хвилі, що кардинально підвищило точність чисельних розв'язків і дозволило вирішувати питання про їх стійкість з достатньою точністю.

Можливість існування супергармонічної нестійкості, знайденої Танакою, раніше припустив Лонге-Хіггінс [107] (1978 р.), проте недостатня точність його розрахунків привела до неправильного висновку, що нестійкість з'являється в точці максимуму фазової швидкості хвилі ( $A \approx 0,13875$ ). Результат Танаки [169] викликав гострі суперечки, оскільки в точці максимуму енергії (як і в усіх інших точках) не було знайдено біфуркації до нового розв'язку, як цього вимагає існування супергармо-

нічної нестійкості (детальний пошук точок біфуркацій раніше провели Чен і Сеффмен [54], 1980 р.). Так, Лонге-Хіггінс [115] (1984 р.) аналітично показав, що біфуркація до розв'язку з тим самим періодом, якщо вона існує, можлива лише в точках екстремуму фазової швидкості хвилі. Це примусило Танаку [170] (1985 р.) детальніше переглянути свої розрахунки і підтвердити, що в максимумі фазової швидкості немає зміни нестійкості, а значить і біфуркації до нового розв'язку. При цьому він показав, що в максимумі повної енергії біфуркація таки відбувається, але це лише тривіальна біфуркація зсуву фази, що відповідає трансляційній симетрії періодичної хвилі. Нарешті, використовуючи гамільтонівський формалізм, Сеффмен [153] (1985 р.) строго довів правильність висновків Танаки. Більш того, Сеффмен показав, що зміна стійкості розв'язку (відносно збурень того самого періоду) відбувається в кожному екстремумі повної енергії хвилі, але при цьому немає біфуркації до нового розв'язку окрім простого зсуву фаз. Жюфірія і Сеффмен [189] (1986 р.) узагальнили цей результат на випадок скінченної глибини.

Джилліанс [88] (1989 р.) дослідив форму супергармонічних нестійкостей стоксових хвиль і показав, що вони призводять до перекиду і руйнування хвиль. Було зроблено припущення, що руйнування хвилі – це локальне явище поблизу гребеня хвилі, яке відбувається незалежно від потоку рідини в решті хвилі. Раніше деякі результати з цього питання одержали Лонге-Хіггінс і Коуклет [109] (1978 р.). Маючи на увазі цю ідею, Лонге-Хіггінс і Клівер [121] і Лонге-Хіггінс та ін. [122] (1994 р.) на основі асимптотичної теорії майже найвищих хвиль показали, що супергармонічна нестійкість призводить до нестійкості гребенів майже найвищих стоксових хвиль – *гребенева нестійкість*. Лонге-Хіггінс і Танака [125] (1997 р.) на основі чисельних розрахунків за допомогою методу Танаки [169] підтвердили те, що супергармонічні нестійкості стоксових хвиль є насправді гребневими нестійкостями. Нарешті, Лонге-Хіггінс і Доммермас [124] (1997 р.) показали, що гребеневі нестійкості приводять до (а) перекиду і руйнування хвилі або (б) неперервного переходу до прогресивної хвилі з меншою амплітудою з наступним поверненням до хвилі майже початкової амплітуди. Пізніше Бріджес [47] (2004 р.) дав строге математичне трактування цим результатам.

### 6.3. Субгармонічна нестійкість

Це нестійкість відносно двовимірних збурень, що мають кратну довжину  $m\lambda$  до довжини незбуреної хвилі  $\lambda$ , де  $m$  – натуральне число. Лонге-Хіггінс [108] (1978 р.) у випадку нескінченної глибини показав, що такі нестійкості виникають для достатньо крутих хвиль ( $A \approx 0,13$ ). Сеффмен [152] (1980 р.) розрахував пороги субгармонічних нестійкостей значно точніше, одержавши, що найнижча нестійкість  $m = 2$  виникає при  $A \approx 0,1289$ , нестійкість  $m = 3$  – при  $A \approx 0,1288$  і так далі. Сеффмен провів розрахунки до  $m = 150$  включно, одержавши для цього випадку поріг нестійкості  $A \approx 0,1280$ . Лонге-Хіггінс [116] (1985 р.) провів ще точніший аналіз субгармонічних нестійкостей порядку  $m = 2$  і  $m = 3$ , а пізніше Лонге-Хіггінс [117] (1986 р.) для граничної точки  $m = \infty$  одержав  $A \approx 0,128035$ , розрахувавши також пороги нестійкостей  $m = 2, 3, 4, 6, 8$ . Лонге-Хіггінс [117] також встановив, що субгармонічна нестійкість (як і модуляційна) повністю зникає в точці максимуму повної енергії ( $A \approx 0,1366$ ). Точні значення порогів субгармонічної нестійкості до  $m = 10$  включно наведено в табл. 3.

Чен і Сеффмен [54] (1980 р.) у випадку нескінченної глибини дослідили біфуркації, що виникають внаслідок субгармонічних нестійкостей стоксових хвиль. Вони надали чисельне свідчення того, що в точках нестійкостей  $m = 2$  і  $m = 3$  виникають нові симетричні стаціонарні розв'язки канонічної задачі з періодами, що в  $m$  разів більші за період нестійкої стоксової хвилі – *субгармо-*

Таблиця 3. Пороги субгармонічних нестійкостей стоксових хвиль (нескінченна глибина)

$m$	$A$	$\eta_1$	$A$ (Лонге-Хіггінс, 1986 р.)	$A$ (Сеффмен, 1980 р.)
2	0,128903097	0,178018951	0,128903	0,1289
3	0,128815957	0,177970433	0,128816	0,1288
4	0,128703914	0,177907398	0,128704	0,1287
5	0,128612610	0,177855495		0,1286
6	0,128540915	0,177814405	0,128541	
7	0,128484088	0,177781629		
8	0,128438258	0,177755063	0,128438	
9	0,128400642	0,177733170		
10	0,128369273	0,177714852		0,1284

нічні хвилі. Ці нові субгармонічні розв'язки характерні тим, що мають гребені двох різних висот. З ростом амплітуди вищі гребені стають гострішими, а нижчі залишаються округлої форми. Субгармонічні хвилі граничної форми з  $m = 2$ ,  $m = 3$  і  $m = 4$  розрахували Ольфе і Роттмен [142] (1980 р.) за допомогою методу Мічелла. Вони підтвердили те, що в граничному випадку вищі гребені утворюють кут  $120^\circ$ , а нижчі гребені мають округлу форму. Ванден-Броуек [179] (1983 р.) розрахував субгармонічні хвилі порядку  $m = 2$  для кількох випадків скінченної глибини. Сіммен і Сеффмен [161] (1985 р.) уточнили розрахунки субгармонічних хвиль з  $m = 2$ ,  $m = 3$  і  $m = 4$  для глибокої води, а також розрахували субгармонічні хвилі за наявності додаткової сталої завихреності.

Усі субгармонічні біфуркації стоксових хвиль можуть приводити лише до *симетричних* субгармонічних розв'язків – це строго довів Лонге-Хіггінс [116] (1985 р.). Жуфірія [190] (1987 р.) у випадку нескінченної глибини показав, що *несиметричні* субгармонічні хвилі виникають внаслідок біфуркацій руйнування симетрії вже субгармонічних хвиль, і розрахував профілі цих несиметричних хвиль. Жуфірія довів, що несиметричні хвилі існують лише при  $m \geq 6$ . Жуфірія [191] (1987 р.) узагальнив ці результати на випадок скінченної глибини.

### 6.4. Тривимірна нестійкість

Маклін та ін. [133] (1981 р.) і Маклін [134] (1982 р.) на основі точних рівнянь руху для випадку нескінченної глибини показали, що хвилі Стокса при всіх амплітудах нестійкі до тривимірних збурень, які в загальному випадку мають такий вигляд (як наслідок теореми Флоке лінійної теорії стійкості):

$$\tilde{\eta}(\theta, z, t) = e^{-i\Omega t} e^{i(p\theta + qz)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}_n e^{in\theta} + \text{с.с.}, \quad (6.3)$$

де  $\tilde{\eta}(\theta, z, t)$  – варіація стаціонарного профілю  $\eta(\theta)$ , с.с. означає комплексне спряження. Було встановлено, що існують два суттєво різні класи тривимірних нестійкостей. Область нестійкості *класу I* симетрична відносно точки ( $p = 0$ ;  $q = 0$ ) на площині ( $p$ ;  $q$ ). Область нестійкості *класу II* симетрична відносно точки ( $p = \frac{1}{2}$ ;  $q = 0$ ). Маклін [134] вказав, що для лінійних хвиль обидва класи нестійкостей можна інтерпретувати як резонансну взаємодію між цугом несучих хвиль з хвильовим ве-

ктором  $\mathbf{k}_0 = (1, 0)$  і частотою  $\omega_0 = |\mathbf{k}_0|^{\frac{1}{2}}$  та двома хвилями на побічних частотах  $\omega_i = |\mathbf{k}_i|^{\frac{1}{2}}$ ,  $i = 1, 2$ . При цьому умови резонансів такі:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= N \mathbf{k}_0, \\ \omega_1 + \omega_2 &= N \omega_0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Нестійкостям класу I відповідає  $\mathbf{k}_1 = (l + p, q)$ ,  $\mathbf{k}_2 = (l - p, -q)$ ,  $N = 2l$ ,  $l \in \mathbb{Z}^+$ ; нестійкостям класу II відповідає  $\mathbf{k}_1 = (l + p, q)$ ,  $\mathbf{k}_2 = (l + 1 - p, -q)$ ,  $N = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{Z}^+$ . Натуральне число  $l$  називають *моду* нестійкості. Існування резонансу найнижчого порядку  $N = 2$  раніше встановив Філіпс [145] (1960 р.), а на можливість вищих резонансів вказав Захаров [5] (1968 р.). Зауважимо також, що для хвиль малої амплітуди тривимірні нестійкості класу I було одержано раніше з модельних еволюційних рівнянь: нелінійного рівняння Шредінгера (Захаров [5], 1968 р.) та рівняння Захарова (Кроуфорд та ін. [65] 1981 р.).

Виявилось, що всі три види розглянутих вище нестійкостей (модуляційна, супер- і субгармонічна) є насправді частинними випадками найнижчих мод  $l = 1$  тривимірних нестійкостей класу I і II. Так, Маклін та ін. [133] показали, що модуляційна нестійкість є частинним випадком  $q = 0$  нестійкості класу I ( $l = 1$ ). При цьому максимальний інкремент нестійкості класу I при всіх амплітудах лежить саме на осі  $q = 0$ , тобто нестійкість класу I є переважно двовимірною, хоча і включає ненульові значення  $q$ , але з меншими інкрементами. Розрахунки Макліна та ін. [133] (1981 р.) показують, що нестійкість класу I зникає при  $A \approx 0,124$ , хоча більш пізні розрахунки Лонге-Хігінса [117] (1986 р.) свідчать про те, що це відбувається при більшій амплітуді в точці максимуму повної енергії ( $A \approx 0,1366$ ). Що стосується нестійкості класу II ( $l = 1$ ), то її максимальний інкремент завжди лежить на осі  $p = \frac{1}{2}$ , причому  $q \neq 0$ . Таким чином, нестійкість класу II суттєво тривимірна. При малих і помірних амплітудах вісь  $q = 0$  взагалі знаходиться поза межами області нестійкості класу II. При  $A \approx 0,129$  область нестійкості класу II дотикається до осі  $q = 0$  в точці  $p = \frac{1}{2}$ , що в точності відповідає появі субгармонічної нестійкості подвоєння періоду, знайденої вперше Лонге-Хігінсом [108] (1978 р.). При збільшенні амплітуди ділянка перетину області нестійкості класу II з віссю  $q = 0$  розширюється. Проте, максималь-

ний інкремент нестійкості при цьому має місце при  $q \neq 0$ , тому тривимірна нестійкість переважає субгармонічну.

Якщо порівняти максимальні інкременти нестійкостей класу I та II ( $l = 1$ ), то нестійкість класу I переважає при малих амплітудах, а, починаючи з  $A \approx 0,10$ , переважає нестійкість класу II. Таким чином, при  $A \lesssim 0,10$  нестійкості стоксових хвиль переважно двовимірні, а при  $A \gtrsim 0,10$  – переважно тривимірні. Цей факт експериментально підтвердив Мелвілл [138] (1982 р.), одержавши поріг переходу від двовимірних до тривимірних нестійкостей при  $A \approx 0,098$  – майже той самий, що дає теорія. При цьому нестійкості в обох випадках приводили до кінцевого перекиду хвиль. Експерименти Мелвілла покривають діапазон амплітуд  $A = 0,05 - 0,102$ . Су та ін. [168] (1982 р.) також надали експериментальні спостереження того, що при  $A \approx 0,10$  початково двовимірні хвилі набували тривимірних модуляцій, які приводили до перекиду і руйнування гребенів з наступним утворенням двовимірних хвиль значно (приблизно вдвічі) меншої амплітуди.

Інші результати, пов'язані з існуванням тривимірних нестійкостей, розглянуті в монографії [3].

### 6.5. Руйнування хвиль

Окреслені результати, одержані завдяки вивченню нестійкостей розв'язків канонічної моделі, зумовили значний поступ у розумінні таких складних фізичних процесів, як перекид і руйнування хвиль. Різноманітним питанням руйнування хвиль присвячено чимало оглядових і оригінальних статей, зокрема Перегрін [144] (1983 р.), Бонмарін [46] (1989 р.), Баннер і Перегрін [40] (1993 р.), Мелвілл [139] (1996 р.), Данкен [74] (2001 р.). Так, розрізняють два основних види перекиду хвиль – “пірнаючий бурун” і “сковзаючий бурун” [144]. *Пірнаючий бурун*<sup>5</sup> характерний тим, що переважна частина переднього фронту хвилі перекидається, утворюючи потужний чітко виражений струмінь, який падає поблизу основи хвилі, викликаючи значний сплеск. У *сковзаючому буруні*<sup>6</sup> на гребені утворюється біла піна, яка сковзає вниз по передньому фронту хвилі. Спостереження показують, що і в останньому випадку утво-

<sup>5</sup> plunging breaker (англ.).

<sup>6</sup> spilling breaker (англ.).

ренню піни передуює поява локалізованого біля гребеня струменя в напрямі поширення хвилі. Частинки рідини в цьому струмені набувають величезних прискорень, що сягають величини  $5g$  [40]. В обох випадках руйнування хвилі супроводжується проникненням у воду повітря у вигляді численних бульбашок, а також утворенням бриз та сплесків, які й формують відомі білі баранці на гребенях хвиль, що перекидаються. Питанням формування бриз і крапель присвячені оглядові статті [63] і [100] (2012 р.).

### 7. Гравітаційно-капілярні хвилі

Для повноти картини наведемо зауваження стосовно впливу поверхневого натягу на розглянуту теорію гравітаційних хвиль. Викривлення поверхні рідини створює поверхневі напруження, що носять назву поверхневого натягу. Відповідні сили, що спрямовані по дотичній до поверхні, називають *капілярними* або силами поверхневого натягу. При збільшенні площі елемента поверхні на  $\delta S$ , його поверхнева енергія збільшується на  $\mathcal{T}\delta S$  [10]. Коефіцієнт  $\mathcal{T}$  називають коефіцієнтом поверхневого натягу, він залежить від характеру обох середовищ на межі поділу і температури. На зміну поверхневої енергії витрачається робота зовнішніх сил тиску. Таким чином, поверхневий натяг приводить до зміни тиску між двома середовищами. Без зменшення загальності вважатимемо, що невикривлена границя розділу середовищ горизонтальна, а нормаль до поверхні при цьому спрямована вгору. Тоді різницю тисків при переході з нижнього до верхнього середовища можна визначити з умови термодинамічної рівноваги

$$\iint_{\sigma} (p - p_0) \delta \eta dS = \mathcal{T} \delta S, \quad (7.1)$$

де  $\delta \eta$  – вертикальне зміщення поверхні  $\sigma$ . Видно, що оскільки  $\delta S > 0$ , то при  $\delta \eta > 0$  (поверхня опукла вгору)  $p > p_0$ , а при  $\delta \eta < 0$  (поверхня опукла вниз)  $p < p_0$ . Отже, тиск більший в тому середовищі, для якого поверхня опукла.

Нехай  $y = \eta(x, z)$  – рівняння поверхні. Тоді її площу можна знайти з такого поверхневого інтегралу:

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2} dx dz.$$

Проваріювавши цей функціонал, отримаємо співвідношення між варіацією площі поверхні  $\delta S$  та варіацією вертикального зміщення поверхні  $\delta \eta$ . Тоді після підстановки  $\delta S$  у формулу (7.1) остаточно одержимо

$$p - p_0 = -\mathcal{T} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta_x}{\sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta_z}{\sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2}} \right) \right), \quad (7.2)$$

або в двовимірному випадку

$$p - p_0 = -\mathcal{T} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta_x}{\sqrt{1 + \eta_x^2}} \right) = -\mathcal{T} \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\mathcal{T} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\eta}{dl}, \quad (7.3)$$

де  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  – елемент довжини кривої. Це і є доданок, який потрібно додати до лівої частини динамічної граничної умови (2.13), щоб врахувати поверхневий натяг. Оскільки при цьому  $\bar{p} = p_0$ , то поверхневий натяг не дає внесок у константу Бернуллі та співвідношення Леві–Чевітта.

З врахуванням поверхневого натягу лінійний закон дисперсії має вигляд

$$c^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th}(kh) (1 + \varkappa) \Leftrightarrow \omega^2 = gk \operatorname{th}(kh) (1 + \varkappa), \quad (7.4)$$

де величина

$$\varkappa = \frac{\mathcal{T} k^2}{\rho g} = \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^2$$

є безрозмірним коефіцієнтом поверхневого натягу, а  $\lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\rho g}}$  носить назву капілярної довжини. Видно, що поверхневим натягом можна нехтувати, якщо  $\varkappa \ll 1$ , тобто  $\lambda \gg \lambda_m$ . У протилежному випадку  $\lambda \ll \lambda_m$  рух хвиль на поверхні рідини визначається головним чином поверхневим натягом, а ефектами гравітації можна нехтувати. Такі хвилі називаються *капілярними* [10]. Відомим прикладом капілярних хвиль є брижі на воді. У проміжному випадку кажуть про капілярно-гравітаційні або гравітаційно-капілярні хвилі залежно від того, які ефекти важливіші. Для системи вода–повітря  $\mathcal{T} \approx 0,074$  Дж/м<sup>2</sup> [31], при цьому  $\lambda_m \approx 1,73$  см.

Таким чином, поверхневий натяг відіграє суттєву роль для ефектів на масштабах порядку капілярної довжини, тобто на відстанях до 0,01–0,1 м. Тому, хоча для процесу поширення метрових і довших хвиль поверхневий натяг в цілому не суттєвий, для локальних явищ, таких як, наприклад, формування гостро-гребневих хвиль, він стає визначальним. Так, для гравітаційно-капілярних хвиль (слабкий вплив поверхневого натягу) замість кута  $120^\circ$  гребінь граничної хвилі має бульбашкоподібну форму, як показали Дубіан і Хариф [69] (1996 р.), проте цей ефект носить локальний характер, і гребінь в цілому має загострену форму з кутом  $120^\circ$ . Це є наслідком присутності другої похідної профілю вільної поверхні в граничній умові, див. формулу (7.3), що згладжує всі особливості. Властивості гравітаційно-капілярних та капілярних хвиль добре описані в роботах [70] (1997 р.) (нескінченна глибина) і [71] (2000) (скінченна глибина). Більш ранні результати розглянуті в огляді Шварца і Фентона [157] (1982 р.). Зауважимо також, що задача про капілярні хвилі (без врахування сили тяжіння) має точний розв'язок в термінах еліптичних функцій, як встановили Креппер [64] (1957 р.) (нескінченна глибина) і Кіннерслі [93] (1976 р.) (скінченна глибина).

Лукомський та ін. (2002 р.) надали чисельне свідчення існування нового сімейства *наближених* розв'язків канонічної моделі гідродинаміки, яке відрізняється від відомих стоксових хвиль. Було знайдено, що ці нові розв'язки описують потоки з особливою точкою всередині області, що зайнята рідиною, та розривними лініями струму поблизу гребеня хвилі, при цьому горизонтальні швидкості частинок рідини навколо гребеня перевищують швидкість самого гребеня. Внаслідок цього такі хвилі та потоки було названо *нерегулярними*. Пізніше було встановлено, що ці нерегулярні розв'язки вказують на множинність гравітаційно-капілярних хвиль [82] (2007 р.).

## 8. Мандрівні хвилі або хвилі-вбивці

На завершення дамо коротку довідку про так звані *мандрівні хвилі* або *хвилі-вбивці*.<sup>7</sup> Це хвилі аномально великої висоти, які виникають несподіваним чином “з нічого” на поверхні моря або океану,

<sup>7</sup> В англійській літературі *freak waves* або *rogue waves*.

часто при відносно невеликому хвилюванні морської поверхні. Більш формально хвилі-вбивці визначають як хвилі, висота яких більше ніж в два рази перевищує значиму висоту  $H_s$  (середню висоту однієї третини найвищих хвиль) [91] (2003 р.). При цьому аномально високому гребеню як правило передують глибока впадина. Морські описи багаті на згадки про хвилі-вбивці (“три сестри”, “дев'ятий вал”, “стіна води”, “дірка в морі”), але до недавнього часу вони традиційно відносилися скоріше до фольклору, ніж до реального стану речей. Розвиток супутникової радарометрії і телекомунікацій в останнє десятиріччя дозволили задокументувати численні випадки утворення мандрівних хвиль і дати їм статистичну оцінку [44] (2012 р.). Лоутон [98] (2001 р.) описує яскраві зустрічі з хвилями-вбивцями, називаючи їх “монстрами глибин”. Докладні описи також дані в роботах [1] (2005 р.), [23] (2007 р.) і [49] (2010 р.).

Розглядають такі механізми виникнення хвиль-вбивць:

- 1) дисперсійне самофокусування хвиль [57] (2002 р.), [24] (2010 р.);
- 2) взаємодія хвиль с течіями і вплив неоднорідностей дна [91] (2003 р.);
- 3) підсилення вітром [177] (2006 р.), [151] (2009 р.), [34] (2012 р.);
- 4) нелінійна модуляція [91] (2003 р.), [32] (2009 р.) і утворення стійких хвильових пакетів з солітоно-подібною обвідною – так званих *бризерів* [6, 75, 76, 188] (2008–2012).

Для більш докладного ознайомлення з проблемами мандрівних хвиль відсилаємо читача до монографії Харіфа та ін. [92] (2009 р.) і спеціальним випуском журналів “Природні катаклізми і наука про земні системи”<sup>8</sup> [143] (2011 р.) і “Фундаментальна і прикладна гідрофізика” [25] (2012 р.). Можливість появи хвиль-вбивць потрібно враховувати під час розрахунків порога безпеки морських кораблів, конструкцій і хвиле-енергетичних установок [58] (2012 р.).

## 9. Висновки

Даний огляд є лише вступом до багатогранної проблематики природних явищ на поверхні моря або океану [15]. Фізика хвильового руху поверхні рідини настільки багатогранна, що кожному з пред-

<sup>8</sup> Natural Hazards and Earth System Sciences.

ставлених розділів можна було б присвятити окремий огляд. Ми ж намагалися дати загальну картину сучасного стану розвитку даного розділу фізики. При цьому неохопленими залишились такі розділи як поширення хвиль під дією вітру, турбулентність, вплив неоднорідностей дна, тривимірні хвилі, рефракція і дифракція хвиль, утворення солітонів, внутрішні хвилі, цунамі тощо. Сподіваємося, що даний огляд буде корисний читачам УФЖ.

*Автор присвячує дану роботу своєму вчителю-ві Лукомському Василю Петровичу, який за свого життя завжди був захоплений нелінійною фізикою хвильового руху поверхні рідини. Автор також вдячний професору Селезову Ігорю Тимофійовичу за мотивуючі дискусії з різних питань фізики хвильових явищ.*

#### ДОДАТОК А

##### Загальний розв'язок Лапласа в фізичній і оберненій площинах

Загальний розв'язок рівняння Лапласа (2.37) у фізичній площині, котрий задовольняє граничну умову на дні (2.40), заданий розвиненням (2.20), яке в безрозмірних змінних виглядає як

$$\Phi(\theta, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{in\theta} + C_n^* e^{-in\theta}) \times (T_n e^{ny} + T_{-n} e^{-ny}), \quad (A1)$$

$$T_n = \frac{e^{nh}}{e^{nh} + e^{-nh}} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th}(nh)). \quad (A2)$$

Загальний розв'язок рівняння Лапласа для потенціалу швидкості (A1) можна переписати для функції струму, враховуючи умови Коші-Рімана (2.55):

$$\Psi(\theta, y) = (c\bar{\eta} - I) + \sum_{n=1}^{\infty} (iC_n e^{in\theta} - iC_n^* e^{-in\theta}) (T_n e^{ny} - T_{-n} e^{-ny}), \quad (A3)$$

де стала інтегрування визначено за відомим значенням (2.62) функції струму на дні, зважаючи на те, що  $(T_n e^{-nh} - T_{-n} e^{nh}) = 0$  для будь-яких  $n$ . Тоді комплексний потенціал  $W = \Phi + i\Psi$  у фізичній площині можна подати у вигляді ряду Фур'є періодичної функції комплексного змінного  $\zeta$  з періодом  $\lambda = 2\pi$ :

$$\frac{W(\zeta)}{c} = 2i\xi_0 + 2i \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^* T_n e^{-in\zeta} - \xi_n T_{-n} e^{in\zeta}), \quad (A4)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \left( \bar{\eta} - \frac{I}{c} \right), \quad \xi_n = \frac{iC_n}{c}.$$

Для симетричних хвиль коефіцієнти  $\xi_n$  мають бути дійсними внаслідок умови (2.21). Комплексний потенціал у вла-

сній системі відліку хвилі має вигляд

$$\frac{w(\zeta)}{c} = -\zeta + B_0 + i \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* e^{-in\zeta} - e^{-2nh} B_n e^{in\zeta}), \quad (A5)$$

$$B_0 = 2i\xi_0, \quad B_n = 2\xi_n T_n.$$

В оберненій площині комплексний потенціал є незалежною змінною, і розв'язок задано оберненою функцією  $\zeta(w)$ . При цьому періоду  $\lambda = 2\pi$  у фізичній площині відповідає період  $c\lambda$  в оберненій площині (див. рис. 4). Розвинення функції  $\zeta(w)$  є оберненим до розвинення (A5) і має такий вигляд [59]:

$$\zeta(w) = -\frac{w}{c} + ia_0 + i \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{inw/c} - e^{-2nd} a_n^* e^{-inw/c}), \quad a_0 = \left( \bar{\eta} - \frac{I}{c} \right), \quad (A6)$$

де незбурена глибина  $d$  виникає внаслідок умови на дні (2.64). При розв'язку задачі в оберненій площині нульовий рівень  $y = 0$  часто вибирають на рівні незбуреної глибини для того, щоб  $\bar{\eta} = I/c$ , і вільний член  $a_0 = 0$ . Для симетричних хвиль коефіцієнти  $a_n$  мають бути дійсними.

Розвинення (A5) і (A6) представляють точний розв'язок канонічної задачі у вигляді ряду Фур'є. При безпосередніх розрахунках розглядають обрізані ряди, що містять скінченне число членів, – наближені розв'язки. Коефіцієнти цих розвинень знаходять з граничних умов на вільній поверхні. При цьому в загальному випадку можливі два варіанти. Перший – у відповідних рівняннях прирівняти коефіцієнти при однакових степенях лінійно-незалежних функцій, за якими проводиться розвинення (у розглянутих рядах – це експоненти  $\exp(inf)$ ), і одержати нелінійну алгебраїчну систему рівнянь для невідомих змінних – *прямий метод*. Другий – вибрати певне розбиття вільної поверхні – точки колокацій – число яких визначене кількістю невідомих, і задовольнити в цих точках граничні умови точно, що накладе необхідні рівняння на невідомі коефіцієнти – *метод колокацій*.

#### ДОДАТОК Б

##### Математичні докази гіпотез Стокса

Задача строгого математичного доведення існування точного розв'язку канонічної моделі (2.37)–(2.40), що відповідає наближеному розв'язку Стокса (3.1)–(3.2), турбувала математиків ще тривалий час після публікацій Стокса. Строге математичне обґрунтування знаменитих гіпотез Стокса взагалі було дане лише протягом кількох останніх десятиріч.

Розглянемо рівняння Бернуллі

$$\frac{1}{2} q^2 + y = B, \quad \{\theta, y\} \in \Gamma_s, \quad (B1)$$

де  $\Gamma_s$  – рівняння вільної поверхні, а  $q$  за абсолютною величиною – модуль комплексної швидкості

$$\frac{dw}{d\zeta} = -q e^{-i\vartheta}. \quad (B2)$$

Оскільки внаслідок співвідношень (2.53)

$$\phi_\theta = -q \cos \vartheta, \quad \phi_y = -q \sin \vartheta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad (\text{Б3})$$

то  $\vartheta$  є кутом нахилу поверхні до горизонтальної вісі. Нехай  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  – елемент довжини вільної поверхні, тобто  $l$  – дугова змінна. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dl} &= \cos \vartheta, \quad \frac{dy}{dl} = \sin \vartheta; \\ \frac{d\phi}{dl} &= -q \Rightarrow \frac{d}{dl} = -q \frac{d}{d\phi}. \end{aligned} \quad (\text{Б4})$$

Продиференціювавши рівняння Бернуллі (Б1) по дуговій змінній  $l$  і врахувавши співвідношення (Б4), остаточно одержимо зв'язок між модулем швидкості й кутом нахилу вільної поверхні

$$\frac{d\frac{1}{3}q^3}{d\phi} = \sin \vartheta, \quad \{\theta, y\} \in \Gamma_s. \quad (\text{Б5})$$

Якщо поверхню хвилі відобразити на одиничне коло за допомогою відображення (4.10), то одержане рівняння набуває вигляду

$$\frac{d\frac{1}{3}q^3}{ds} = c \sin \vartheta, \quad \rho = 1, \quad s \in [-\pi, \pi]. \quad (\text{Б6})$$

На основі цього рівняння Некрасов [18] у 1921 р. переформулював канонічну модель для *симетричних* хвиль на глибокій воді у вигляді інтегрального рівняння, що носить його ім'я,

$$\vartheta(s) = \frac{1}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{N}(s, t) \frac{\sin \vartheta(t)}{\frac{1}{\mu} + \int_0^t \sin \vartheta(\tau) d\tau} dt, \quad (\text{Б7})$$

$$\mathcal{N}(s, t) = \ln \left( \frac{1}{\left| 2 \sin \left( \frac{s-t}{2} \right) \right|} \right),$$

де  $\vartheta(s)$  – кут нахилу вільної поверхні до горизонтальної вісі в точці, що відповідає точці  $s \in [-\pi, \pi]$  на одиничному колі (точки  $s = \mp\pi$  відповідають двом сусіднім впадинам хвилі, а  $s = 0$  – гребеню між ними). Параметр  $3 \leq \mu < \infty$  визначено співвідношенням

$$\mu = \frac{3c}{|q(0)|^3},$$

де  $q(0)$  – швидкість частинки на гребені у власній системі відліку хвилі, причому для лінійних хвиль  $q(0) = -c$  і  $\mu = 3$ , а для граничної хвилі Стокса  $q(0) = 0$  і  $\mu = \infty$  [20]. У 1922 р. Некрасов [19], використовуючи теорію нелінійних інтегральних рівнянь, розробив метод доведення збіжності рядів. На основі цих досліджень він показав, що одержане ним інтегральне рівняння має розв'язок при достатньо малих значеннях амплітуди хвилі, тобто розклади Стокса є збіжними для хвиль малої амплітуди. Узагальнення для скінченної глибини було завершено Некрасовим у 1927 р.

[21]. При цьому інтегральне рівняння для скінченної глибини відрізняється від рівняння (Б7) лише ядром

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(s, t) &= \ln \left( \frac{1}{\left| 2 \operatorname{sn} \left( \frac{\mathcal{K}(\kappa)}{\pi} (s-t) \mid \kappa \right) \right|} \right), \\ \frac{\mathcal{K}(\sqrt{1-\kappa^2})}{\mathcal{K}(\kappa)} &= \frac{2d}{\pi}, \end{aligned} \quad (\text{Б8})$$

де  $\operatorname{sn}$  – еліптичний синус,  $\mathcal{K}(\kappa)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду з модулем  $\kappa$ , а  $d$  – незбурена глибина; а також межами зміни параметра  $\mu$ :  $3 \operatorname{cth}(h) \leq \mu < \infty$  [16].

Доведення існування хвиль малої амплітуди для глибокої води також незалежно зробив Леві-Чівіта [99] (1925 р.), використовуючи те саме рівняння (Б6), але не переходячи до інтегрального рівняння. Струїк [167] (1926 р.) узагальнив доведення Леві-Чівіта на випадок скінченної глибини.

Красовський [7, 8] (1960–1961 рр.), використовуючи теорію додатних операторів, у загальному випадку довільної глибини довів, що для кожного  $0 \leq \beta < \frac{\pi}{6}$  при деякому значенні параметра  $\mu$  існує такий розв'язок інтегрального рівняння Некрасова, що *максимальний* нахил профілю хвилі дорівнює  $\beta$ . При цьому Красовський не встановив (а) яким значенням параметра  $\mu$  в рівнянні Некрасова відповідає проміжок  $0 \leq \beta < \frac{\pi}{6}$ , і (б) чи існують розв'язки з  $\beta \geq \frac{\pi}{6}$ . Нарешті, узагальнивши підхід Красовського, Кеді і Норбьорі [90] (1978 р.) показали, що для всіх скінченних  $\mu$  ( $3 \operatorname{cth}(h) \leq \mu < \infty$ ) існує неперервний нетривіальний розв'язок рівняння Некрасова, причому  $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ . Цим було остаточно математично строго доведено існування сімейства розв'язків канонічної моделі з  $-c \leq q(0) < 0$ , що відповідає стоксовим хвилям скінченної амплітуди. Нез'ясованим залишалося питання про існування граничної хвилі Стокса з  $q(0) = 0$  ( $\mu = \infty$ ).

Знаменита робота Толєнда [175] (1978 р.) поклала край сумнівам математиків. Толєнд показав, що (а) існує нетривіальний розв'язок  $\vartheta^{(\text{lim})}(s)$  рівняння Некрасова при  $\mu = \infty$ , який неперервний на всьому проміжку  $[-\pi, \pi]$  за виключенням єдиної точки  $s = 0$  (гребінь хвилі); (б) цей розв'язок на проміжку  $[-\pi, -\epsilon] \cup [\epsilon, \pi]$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , є рівномірною границею при  $\mu \rightarrow \infty$  сімейства розв'язків зі скінченними  $\mu$ ; (в) якщо розрив функції  $\vartheta^{(\text{lim})}(s)$  скінченний (тобто профіль вільної поверхні неперервний на гребені), то  $\lim_{s \rightarrow 0+} \vartheta^{(\text{lim})}(s) = \frac{\pi}{6}$ . Незалежне і більш просте доведення цих тверджень дав також Маклеод [137] (1979 р.). Єдине, що не було доведено в цих двох роботах – це скінченність розриву функції  $\vartheta^{(\text{lim})}(s)$  при  $s = 0$ . Це остаточно вдалося показати в 1982 р. спільними зусиллями Еміку, Фраєнкелло і Толєнду [36], а також незалежно Плотнікову [26], чим було остаточно доведено справедливості *першої* гіпотези Стокса. Більш повний математичний аналіз вищезгаданих результатів можна знайти в огляді Толєнда [176] (1996 р.).

Що стосується *другої* гіпотези Стокса, то для її доведення знадобилося ще два десятиріччя. Лише в новому тисячолітті Плотніков і Толєнд [146] (2004 р.), а пізніше Фраєнкель [79] (2007 р.), довели, що рівняння Не-



красова при  $\mu = \infty$  має розв'язок  $\vartheta^{(\infty)}(s)$  такий, що (а)  $\lim_{s \rightarrow 0+} \vartheta^{(\infty)}(s) = \frac{\pi}{6}$  і (б)  $\vartheta^{(\infty)}(s)$  монотонно зростає на проміжку  $[\pi, 0)$ , тобто профіль хвилі скрізь опуклий вниз. Подальший розвиток ця проблематика одержала в роботах [80, 81].

## ДОДАТОК В

### Методи обчислення граничної хвилі Стокса

Ольфе і Роттмен [142] (1980 р.) формалізували метод Мічелла і одержали загальну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів  $b_n$  розвинення (4.13) та фазової швидкості  $c$ :

$$(3n + 2)A_n - (3n + 1)A_{n+1} - c^{-2}F_n = 0, \quad n = \overline{0, N}, \quad (B1)$$

де  $N$  – число врахованих коефіцієнтів,

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^n B_{n_1} B_{n-n_1} + \sum_{n_1=1}^{N-n} B_{n_1} B_{n+n_1},$$

$$B_n = \sum_{n_1=0}^{N-n} b_{n_1} b_{n+n_1},$$

$$F_n = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n_1=0}^N \frac{(6n_1 + 1) b_{n_1}}{9(2n + 1)2 - (6n_1 + 1)^2}, \quad b_0 = 1.$$

Амплітуду хвилі  $A$  можна знайти з виразу (2.42), враховуючи співвідношення (2.53):

$$A = 2^{\frac{2}{3}} \frac{c^2}{4\pi} \left( \sum_{n=0}^N (-1)^n b_n \right)^2. \quad (B2)$$

Враховавши  $N = 120$  коефіцієнтів, Ольфе і Роттмен [142] одержали  $A \approx 0,141061$ . Результати розрахунків з більшими  $N$  наведено в табл. 4. Видно, що зі збільшенням  $N$  швидкість збіжності розвинення Мічелла стає повільнішою. Причина цього полягає в тому, що розвинення вигляду (4.13) не враховують ірраціональних степеней, вказаних Грантом [84].

Локальну поведінку навколо гребеня, що описується розвиненням Гранта (4.7), яке в комплексній площині  $u$  має вигляд

$$\zeta(u) = -i \left( \frac{3}{2} c (1-u) \right)^{\frac{2}{3}} + i\gamma (c(1-u))^{2\mu}, \quad (B3)$$

можна врахувати за допомогою іншого більш загального підходу, який оснований на розвиненнях Фур'є в оберненій площині. Загальний розв'язок рівняння Лапласа (А6) в комплексній площині  $u$  за умови симетричності хвилі має вигляд

$$\zeta(u) = ia_0 + i \ln u + i \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( u^n - \frac{\rho_0^{2n}}{u^n} \right), \quad (B4)$$

$$a_0 = \left( \bar{\eta} - \frac{I}{c} \right).$$

Якщо початок відліку в фізичній площині  $\zeta$  обрати на гребені хвилі, то для хвилі з точкою застою на гребені маємо  $\bar{\eta} = -B$  внаслідок умови (4.1). При цьому розвинення (B4) автоматично задовольняє рівняння Лапласа і граничну умову на дні, котра в комплексній формі внаслідок формули (2.53) така

$$\text{Im} \left( \frac{dw}{d\zeta} \right) = 0, \quad \rho = \rho_0 = \exp(-d). \quad (B5)$$

Локальну поведінку біля кута на гребені можна врахувати, якщо скласти суму (лінійну комбінацію) розвинення (B4) і локального розв'язку поблизу гребеня (B3). Дійсно, у випадку глибокої води розв'язок Гранта (B3) задовольняє граничну умову (B5) на дні  $u = 0$  за умови дійсності коефіцієнта  $\gamma$ . Тоді невідомі коефіцієнти  $\gamma$  і  $a_n$  лінійної комбінації можна знайти з рівняння Бернуллі, наприклад, методом колокацій, так щоб задовольнити асимптотику (4.9) на нескінченній глибині.

Цю ідею запропонував і реалізував Уїлльямс [181] (1981 р.), причому одразу для довільної глибини. При цьому головна проблема полягала в тому, що локальне розвинення навколо гребеня (B3) в загальному випадку довільної глибини не задовольняє граничну умову на дні. Для того, щоб виконати цю умову, Уїлльямс узагальнив розвинення Гранта так, щоб воно одночасно описувало локальну поведінку поблизу гребеня і задовольняло граничну умову на дні. В наших позначеннях це узагальнене розвинення має вигляд

$$\zeta(u) = -i \left( \frac{3}{2} c \right)^{\frac{2}{3}} \left( (1-u)^{\frac{2}{3}} - \left( 1 - \frac{\rho_0^2}{u} \right)^{\frac{2}{3}} + (1 - \rho_0^2)^{\frac{2}{3}} \right) + i\gamma c^{2\mu} \left( (1-u)^{2\mu} - \left( 1 - \frac{\rho_0^2}{u} \right)^{2\mu} + (1 - \rho_0^2)^{2\mu} \right). \quad (B6)$$

Те, що кожен з обох доданків задовольняє граничну умову (B5) на дні, можна легко показати, якщо знайти похідну  $\frac{d\zeta}{du}$  і використати співвідношення

$$\frac{du}{d\zeta} = icu \frac{dw}{d\zeta}, \quad (B7)$$

що впливає безпосередньо з означення (4.10). Зауважимо, що врахування наступних доданків до розкладу Гранта, знайдених Норменом [141] у вигляді степеневого ряду по  $\mu$ , не дало суттєвого покращення точності методу.

Таблиця 4. Швидкість  $c$  та амплітуда  $A$  граничної хвилі Стокса (нескінченна глибина), розраховані з системи рівнянь (B1) методу Мічелла

$N$	$A$	$c$	
100	0,14106002	1,09227679	$b_1 = 0,04119$
200	0,14106250	1,09228173	$b_2 = 0,01251$
300	0,14106307	1,09228335	$b_3 = 0,00605$
400	0,14106327	1,09228405	$b_4 = 0,00360$
500	0,14106337	1,09228441	$b_5 = 0,00240$

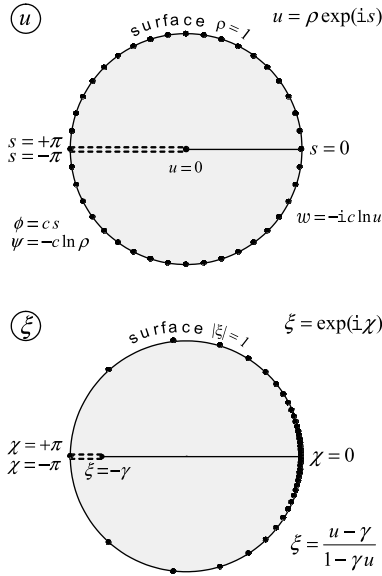


Рис. 12. Танаківське відображення оберненої площини

В такий спосіб Уїлльямс [181] (1981 р.) побудував найточнішу на даний момент чисельну схему розрахунку граничної хвилі Стокса для довільної глибини. Зокрема, у випадку глибокої води Уїлльямс одержав  $c \approx 1,09228$  і  $A \approx 0,141063$  та протабулював профіль хвилі, а також її різноманітні інтегральні характеристики. Взагалі в роботі Уїлльямса представлено детально протабульовані розрахунки для 22 різних значень глибини.

Метод Мічелла одержав подальший розвиток у роботі Ганджі і Лукомського [82] (2007 р.). За допомогою нелінійного відображення комплексної площини  $u$  в нову комплексну площину  $\xi$

$$\xi \equiv \exp(i\chi) = \frac{u - \gamma}{1 - \gamma u}, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad (B8)$$

було значно прискорено збіжність ряду Мічелла (4.13). Перетворення (B8), яке раніше було запропоновано Танакою [169] (1983 р.), відображає одиничне коло площини  $u$  в одиничне коло площини  $\xi$  з локальним розтягом області гребня хвилі й стисненням області впадини (рис. 12). Степінь розтягу і стиснення зростає по мірі того, як  $\gamma$  прямує до одиниці. В площині  $\xi$  нескінченна глибина знаходиться на рівні  $\xi = -\gamma$ , а  $\chi$  відіграє роль комплексного потенціалу.

Можна легко показати, що асимптотика (4.12) залишається незмінною в площині  $\xi$ :

$$\frac{dw}{d\xi} \sim (1 - \xi)^{1/3}. \quad (B9)$$

Тому розвинення Мічелла в площині  $\xi$  має вигляд

$$\frac{dw}{d\xi} = (1 - \exp(i\chi))^\nu \sum_{n=0}^N b_n \exp(in\chi), \quad (B10)$$

де  $\nu \equiv 1/3$ ,  $N$  – число коефіцієнтів, врахованих у наближеному розвиненні. Гранична умова на нескінченній глибині (4.9) набуває вигляду

$$(1 + \gamma)^\nu \sum_{n=0}^N b_n (-\gamma)^n = -c. \quad (B11)$$

Подальша процедура ненабагато більш громіздка, ніж викладки Мічелла [140] й Ольфе і Роттмена [142]. Відповідна система нелінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів  $b_n$  розвинення (B10) і фазової швидкості  $c$  має вигляд:

$$-\gamma(3n + 4)A_{n+2} + (\gamma(3n + 5) - (1 + \gamma^2)(3n + 1))A_{n+1} + ((1 + \gamma^2)(3n + 2) - \gamma(3n - 2))A_n + \gamma(3n - 1)A_{n-1} + c(1 - \gamma^2)F_n = 0, \quad n = \overline{0, N}, \quad (B12)$$

де

$$A_n = \sum_{n_1=0}^n B_{n_1} B_{n-n_1} + 2 \sum_{n_1=1}^{N-n} B_{n_1} B_{n+n_1}, \quad n = \overline{0, N},$$

$$A_n = \sum_{n_1=n-N}^N B_{n_1} B_{n-n_1}, \quad n = \overline{N+1, 2N},$$

$$A_n \equiv 0, \quad |n| > 2N, \quad A_{-n} = A_n,$$

$$B_n = \sum_{n_1=0}^{N-n} b_{n_1} b_{n+n_1},$$

$$F_n = \frac{36\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n_1=0}^N \frac{(6n_1 + 1) b_{n_1}}{9(2n + 1)^2 - (6n_1 + 1)^2}.$$

Амплітуду хвилі  $A$  знаходимо з формули

$$A = \frac{1}{4\pi} \left| \left( \frac{dw}{d\xi} \right)_{\chi=\pi} \right|^2 = \frac{2^{2\nu}}{4\pi} \left( \sum_{n=0}^N (-1)^n b_n \right)^2. \quad (B13)$$

Профіль хвилі  $y = \eta(\theta)$  можна обчислити в параметричній формі з інтегралів

$$\begin{aligned} \theta(\chi) &= \int_0^\chi \frac{\partial \theta}{\partial \chi'} d\chi' = \int_0^\chi \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\chi'} d\chi' = \\ &= \int_0^\chi \operatorname{Re} \left( \left( \frac{dw}{d\xi} \right)^{-1} \right) \frac{d\phi}{d\chi'} d\chi', \end{aligned} \quad (B14)$$

$$\begin{aligned} y(\chi) &= \int_0^\chi \frac{\partial y}{\partial \chi'} d\chi' = \int_0^\chi \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\chi'} d\chi' = \\ &= \int_0^\chi \operatorname{Im} \left( \left( \frac{dw}{d\xi} \right)^{-1} \right) \frac{d\phi}{d\chi'} d\chi', \end{aligned} \quad (B15)$$

де  $\chi$  пробігає значення від 0 (гребінь) до  $\pi$  (впадина) і

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{c(1 - \gamma^2)\xi}{(\xi + \gamma)(1 + \gamma\xi)}, \quad \xi = \exp(i\chi). \quad (B16)$$

Нахил поверхні хвилі  $\eta_\theta$ , опуклість  $\eta_{\theta\theta}$  і вищі похідні можуть бути знайдені чисельним диференціюванням функції  $y = \eta(\theta)$ .

Кінетичну і потенціальну енергії хвилі можна обчислити як

$$T = \frac{cI}{2} = \frac{c}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\eta(\theta)} (\phi_\theta + c) dy d\theta = -\frac{c}{2\pi} \int_0^{\pi c} (y|_{\psi=0} + \bar{\eta}) d\phi =$$

$$= -\frac{c^4}{4} + \frac{c}{4\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|^2 \frac{d\phi}{d\chi} d\chi, \quad (B17)$$

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (y^2|_{\psi=0} - \bar{\eta}^2) d\theta =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \left( c^4 - \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|^4 \right) \operatorname{Re} \left( \left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^{-1} \right) \frac{d\phi}{d\chi} d\chi, \quad (B18)$$

де  $I$  – імпульс хвилі.

#### ДОДАТОК Г Методи обчислення хвиль Стокса в фізичній площині

Методи обчислень хвиль Стокса в фізичній площині включають реалізацію Рінекера і Фентона [149] (1981 р.) першого методу Стокса, де коефіцієнти розвинення Фур'є потенціалу швидкості розраховують методом колокацій, а також реалізацію Жуфірії [190] (1987 р.) методу гамільтонівського формалізму, що технічно, але не по суті, дещо відрізняється від стандартного методу Стокса. Рінекер і Фентон проробили розрахунки з точністю до  $N = 64$ , а Жуфірія – до  $N = 72$ , що виявилось достатнім лише для одержання першого локального максимуму фазової швидкості хвилі.

Лукомський і Ганджа [2] (2001 р.) і [127, 128] (2002 р.) побудували загальну реалізацію методу розвинень Фур'є у фізичній площині (перший метод Стокса) на основі явно одержаних співвідношень між фур'є-коефіцієнтами потенціалу швидкості й профілю вільної поверхні – *метод звичайних розвинень Фур'є*. При цьому обрізаний ряд Фур'є для потенціалу швидкості має такий вигляд, див. формулу (A4):

$$R(\theta, y) = \xi_0 + \sum_{n=1}^N \left( \xi_n T_n e^{n(y+i\theta)} - \xi_n^* T_{-n} e^{-n(y+i\theta)} \right), \quad (G1)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \left( \bar{\eta} - \frac{I}{c} \right), \quad \Phi = -ic(R - R^*),$$

де коефіцієнти  $T_n$  визначені співвідношенням (A2). Обрізаний ряд Фур'є для профілю вільної поверхні такий:

$$\eta(\theta) = \sum_{n=-M}^M \eta_n \exp(in\theta), \quad \eta_{-n} = \eta_n^*. \quad (G2)$$

Розвинення (G1) і (G2) підставляють в динамічну та кінематичну граничні умови (2.38), (2.39); прирівнюють коефіцієнти при однакових експонентах; одержують систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих коефіцієнтів  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  та фазової швидкості  $c$ . Цю систему рівнянь розв'язують чисельно методом Ньютона, використовуючи швидке перетворення Фур'є для розрахунку гармонік експоненціальних

функцій. Для збіжності методу  $M$  має бути в декілька разів більшим за  $N$ . (Використовувати різне число мод при обрізанні рядів Фур'є для потенціалу швидкості та профілю вільної поверхні запропонував раніше Жуфірія [190].) Коефіцієнти  $\xi_n$  та  $\eta_n$  в загальному випадку комплексні, для *симетричних* хвиль вони дійсні. Метод дозволив точно розрахувати перший максимум фазової швидкості та виявити її перший мінімум [127], обчислення були проведені до  $N = 250$ ,  $M = 4N$  включно.

Використання звичайних розвинень Фур'є обмежене тією обставиною, що при збільшенні амплітуди хвилі коефіцієнти розвинень (G1), (G2) спадають з ростом свого номера все повільніше внаслідок загострення гребеня хвилі. Тому для одержання достатньої точності при розрахунку майже найвищих хвиль необхідно враховувати значно більше число коефіцієнтів, ніж це дозволяє навіть найсучасніша комп'ютерна техніка. Зважаючи на це, Лукомський і Ганджа [129] (2003 р.) для випадку нескінченної глибини запропонували новий спектральний метод фізичної площини, оптимізований для ефективного обчислення крутих хвиль, що мають загострену форму, – *метод дробових розвинень Фур'є*. Ідея методу полягає у виборі більш ефективного набору функцій, по яких проводять розвинення потенціалу швидкості. Для цього було використано метод Ейлера підсумовування рядів [35]. Одержане розвинення потенціалу швидкості для глибокої води має вигляд

$$R(\theta, y; y_0) = \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n}{(\exp(-y_0) - \exp(-y - i\theta))^n}, \quad (G3)$$

де  $y_0$  – вільний параметр для прискорення збіжності розвинення потенціалу швидкості. При  $y_0 = \infty$  розвинення (G3) перетворюється в звичайне розвинення Фур'є (G1). При  $N = \infty$  розвинення (G3) і (G1) еквівалентні ( $h = \infty$ ) для всіх  $y_0$ , проте дробове розвинення (G3) при  $y_0 \simeq 1$  збігається значно швидше. Тому для одержання однакової чисельної точності дробове розвинення (G3) вимагає врахування значно меншого числа коефіцієнтів, ніж звичайне розвинення Фур'є (G1). Для прискорення збіжності розвинення профілю вільної поверхні використано нелінійне перетворення горизонтального масштабу:

$$\theta(\chi; \gamma) = \chi - \gamma \sin \chi, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (G4)$$

що зосереджує чисельний алгоритм на області гребеня, як це зроблено в методі Танаки, формула (5.9). Тоді в розвиненні

$$\eta(\chi; \gamma) = \sum_{n=-M}^M \eta_n^{(\gamma)} \exp(in\chi), \quad \eta_{-n}^{(\gamma)} = \eta_n^{(\gamma)}, \quad (G5)$$

при  $\gamma \rightarrow 1$  для одержання тієї ж чисельної точності необхідно врахувати значно менше число коефіцієнтів, ніж у ряді (G2). Подальша процедура аналогічна методу звичайних розвинень Фур'є. При безпосередніх розрахунках значення вільних параметрів  $y_0$  і  $\gamma$  методу та співвідношення між числами  $N$  і  $M$  вибирають такими, щоб загальна чисельна похибка була якнайменша. Перевага точності методу дробових розвинень Фур'є розкладів над методом звичайних

розвинень Фур'є складає від одного до десяти порядків залежно від амплітуди хвилі [129].

Розвинення (ГЗ), (Г1) та взагалі будь-яка аналітична функція  $R(\theta, y) = R(y + i\theta)$  задовольняють рівняння Лапласа (2.37) тотожно. Останній факт був використаний Кламондом [55] (1999 р.) і [56] (2003 р.) (відповідно для скінченної та нескінченної глибини) для того, щоб ввести принцип ренормалізації, який дозволяє відтворити потенціал швидкості в усій області потоку за відомим потенціалом на дні (або на будь-якому іншому рівні). Застосувавши ренормалізацію до першого наближення кноїдальних хвиль на мілкій воді (3.3), Кламонд [56] одержав потенціал швидкості, що в точності збігається з першим доданком ( $N = 1$ ) дробового розвинення (ГЗ). Це наближення  $N = 1$  Кламонд назвав ренормалізованою апроксимацією кноїдальної хвилі. При цьому навіть перший доданок розвинення (ГЗ) виявився точнішим за амплітудну апроксимацію Стокса п'ятого порядку. Кламонд [56] зазначає, що одержані дробові апроксимації відкривають нову парадигму до опису хвиль на воді.

В одному напрямку з даними роботами знаходиться стаття Тао та ін. [173], в якій розвинутий метод розрахунку прогресивних хвиль у випадку скінченної глибини на основі операторних розвинень з використанням гомотопного підходу і паде-апроксимацій.

#### Перелік умовних позначень

$\Delta$	– оператор Лапласа
$\nabla$	– оператор Гамільтона (градієнт)
Re	– дійсна частина
Im	– уявна частина
*	– комплексне спряження
$\bar{\bar{x}}$	– усереднення за просторовим періодом
$\delta$	– зміна величини / варіація
$t$	– час
$h$	– глибина рідини
$c$	– фазова швидкість хвилі
$\lambda$	– довжина хвилі
$k$	– хвильове число
$\theta$	– фаза хвилі
$\Phi$	– потенціал швидкості в лабораторній системі
$\phi$	– потенціал швидкості у власній системі відліку хвилі
$\Psi$	– функція струму в лабораторній системі
$\psi$	– функція струму у власній системі відліку хвилі
$\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$	– частинні похідні (для скалярів)
$H$	– висота хвилі (відстань від впадіння до гребеня)
$A = H/\lambda$	– амплітуда (крутизна) хвилі (безрозмірна висота)
$\eta$	– профіль (підняття) вільної поверхні
$E$	– густина повної енергії хвилі
$I$	– густина імпульсу хвилі (стоксовий потік)

1. С. Бадулін, А. Иванов, А. Островский, Технологии ТЭК, 56 (2005).
2. І.С. Ганджа, В.П. Лукомський, Вісник Львівського університету. Серія фізична **34**, 174 (2001).
3. І.С. Ганджа, *Гравітаційні хвилі на поверхні рідини / Нелінійні процеси в фізиці: коливання, хвилі, самоорганізація*, О.В. Чалий, В.П. Лукомський, І.С. Ганджа, Я.В. Цехмістер, К.О. Чалий (Четверта хвиля, Київ, 2004), с. 93.
4. В.Е. Захаров, ЖЭТФ **51** (4), 1107 (1966).
5. В.Е. Захаров, Журнал прикладной механики и технической физики **2**, 86 (1968).
6. В.Е. Захаров, А.И. Дьяченко, Фундаментальная и прикладная гидрофизика **5** (1), 64 (2012).
7. Ю.П. Красовский, Докл. АН СССР **130** (6), 1237 (1960).
8. Ю.П. Красовский, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **1** (5), 836 (1961).
9. Г. Ламб, *Гидродинамика* (Из-во технико-теоретической литературы, Москва, 1947).
10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Том 6: Гидродинамика* (Наука, Москва, 1986).
11. Б. Ле Меоте, *Введение в гидродинамику и теорию волн на воде* (Гидрометеоиздат, Ленинград, 1974).
12. Л.Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа* (Наука, Москва, 1987).
13. В.П. Лукомський, І.С. Ганджа, УФЖ **54** (1–2), 217 (2009).
14. М. Мак-Кормик, *Преобразование энергии волн* (Энергоатомиздат, Москва, 1985).
15. А.С. Монин, В.П. Красицкий, *Явления на поверхности океана* (Гидрометеоиздат, Ленинград, 1985).
16. А.С. Монин, *Теоретические основы геофизической гидродинамики* (Гидрометеоиздат, Ленинград, 1988).
17. А.И. Некрасов, Изв. Иваново-Вознесенского Политехн. Инст. **2**, 81 (1919).
18. А.И. Некрасов, Изв. Иваново-Вознесенского Политехн. Инст. **3**, 52 (1921).
19. А.И. Некрасов, Изв. Иваново-Вознесенского Политехн. Инст. **6**, 155 (1922).
20. А.И. Некрасов, *Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости* (Из-во АН СССР, Москва, 1951).
21. А.И. Некрасов, *Собрание сочинений* (Из-во АН СССР, Москва, 1961), т. 1.
22. Е.Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами* (Институт прикл. физики РАН, Нижний Новгород, 1996).
23. Е.Н. Пелиновский, А.В. Слоняев, Природа **3**, 14 (2007).
24. Е.Н. Пелиновский, Е.Г. Шургаліна, Фундаментальная и прикладная гидрофизика **4** (10), 29 (2010).
25. Е.Н. Пелиновский, А.В. Слоняев, Фундаментальная и прикладная гидрофизика **5** (1), 4 (2012).
26. П.И. Плотников, Динамика сплошной среды **57**, 41 (1982).

27. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной* (Наука, Москва, 1979).
28. Ю.В. Седлецкий, УФЖ **50** (3), 299 (2005).
29. Ю.В. Седлецкий, УФЖ **52** (11), 1073 (2007).
30. Ю.В. Седлецкий, УФЖ **54** (8–9), 895 (2009).
31. Л.Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости* (Наука, Москва, 1977).
32. Т.Г. Талипова, Е.Н. Пелиновский, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* **2** (4), 30 (2009).
33. Д. Уизем, *Линейные и нелинейные волны* (Мир, Москва, 1977).
34. Е.Г. Шургалина, Е.Н. Пелиновский, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* **5** (1), 77 (2012).
35. Р.В. Хемминг, *Численные методы* (Наука, Москва, 1972).
36. С.Ј. Amick, L.E. Fraenkel, and J.F. Toland, *Acta Mathematica* **148**, 193 (1982).
37. С.Ј. Amick, *Arch. Rational Mech. Anal.* **99**, 91 (1987).
38. С.Ј. Amick and L.E. Fraenkel, *Trans. Amer. Math. Soc.* **299** (1), 273 (1987).
39. G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, London, 1995).
40. M.L. Banner and D.H. Peregrine, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **25**, 373 (1993).
41. T.B. Benjamin and J.E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27** (3), 417 (1967).
42. T.B. Benjamin, *Proc. Roy. Soc. London A* **299**, 59 (1967).
43. D.J. Benney and G.J. Roskes, *Stud. Appl. Math.* **48**, 377 (1970).
44. E.M. Bitner-Gregersen and A. Toffoli, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **12**, 751 (2012).
45. M.I.J. Bloor, *J. Fluid Mech.* **84** (1), 167 (1978).
46. P.J. Bonmarin, *J. Fluid Mech.* **209**, 405 (1989).
47. T.J. Bridges, *J. Fluid Mech.* **505**, 153 (2004).
48. J.G.B. Byatt-Smith, *Proc. Roy. Soc. London A* **315**, 405 (1970).
49. S. Casey, *The Wave: In Pursuit of the Rogues, Freaks, and Giants of the Ocean* (Doubleday, New York, 2010).
50. G.A. Chandler and I.G. Graham, *SIAM J. Numer. Anal.* **30** (4), 1041 (1993).
51. J.E. Chappellear, *J. Geophys. Res.* **66** (2), 501 (1961).
52. J.E. Chappellear, *J. Geophys. Res.* **67**, 4693 (1962).
53. B. Chen and P.G. Saffman, *Stud. Appl. Math.* **60**, 183 (1979).
54. B. Chen and P.G. Saffman, *Stud. Appl. Math.* **62**, 1 (1980).
55. D. Clamond, *J. Fluid Mech.* **398**, 45 (1999).
56. D. Clamond, *J. Fluid Mech.* **489**, 101 (2003).
57. G.F. Clauss, *Appl. Ocean Research* **24** (3), 147 (2002).
58. G. Clauss, M. Dudek, M. Klein, and M. Onorato, in *Proceedings of the ASME 2012 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE2012* (Rio de Janeiro, Brazil, 2012), p. 1.
59. E.D. Cokelet, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* **286**, 183 (1977).
60. A. Constantin, *Phys. Rev. Lett.* **93** (6), 069402 (2004).
61. A. Constantin, *Inventiones Mathematicae* **166**, 523 (2006).
62. A. Constantin, *IMA J. Appl. Math.* **77**, 293 (2012).
63. Y. Couder, *J. Fluid Mech.* **696**, 1 (2012).
64. G.D. Crapper, *J. Fluid Mech.* **2**, 532 (1957).
65. D.R. Crawford, B.M. Lake, P.G. Saffman, and H.C. Yuen, *J. Fluid Mech.* **105**, 177 (1981).
66. M.C. Dallaston and S.W. McCue, *Phys. Fluids* **22**, 082104 (2010).
67. T.V. Davies, *Proc. Roy. Soc. London A* **208**, 475 (1951).
68. S.C. De, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**, 713 (1955).
69. M. Debiane and C. Kharif, *Phys. Fluids* **8** (10), 2780 (1996).
70. M. Debiane and C. Kharif, *European Journal of Mechanics, B/Fluids* **16** (2), 257 (1997).
71. M. Debiane, C. Kharif, and M. Amaouche, *European Journal of Mechanics, B/Fluids* **19**, 855 (2000).
72. L. Debnath, *Nonlinear Water Waves* (Academic Press, San Diego, 1994).
73. F. Dias and C. Kharif, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **31**, 301 (1999).
74. J.H. Duncan, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **33**, 519 (2001).
75. A.I. Dyachenko and V.E. Zakharov, *Pis'ma v ZhETF* **88** (5), 356 (2008).
76. F. Fedele and D. Dutykh, *J. Fluid Mech.* **712**, 646 (2012).
77. J.E. Feir, *Proc. Roy. Soc. London A* **299**, 54 (1967).
78. J.D. Fenton, *J. Fluid Mech.* **94** (1), 129 (1979).
79. L.E. Fraenkel, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **183**, 187 (2007).
80. L.E. Fraenkel and P.J. Harwin, *Eur. J. Appl. Math.* **21**, 137 (2010).
81. L.E. Fraenkel, *Eur. J. Appl. Math.* **21**, 165 (2010).
82. I.S. Gandzha, V.P. Lukomsky, *Proc. Roy. Soc. London A* **463**, 1597 (2007).
83. P.R. Garabedian, *J. d'Analyse Mathématique* **14**, 161 (1965).
84. M.A. Grant, *J. Fluid Mech.* **59**, 257 (1973).
85. H. Hasimoto and H. Ono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33**, 805 (1972).
86. T.H. Havelock, *Proc. Roy. Soc. London A* **95**, 38 (1918).
87. D. Ionescu-Kruse, *J. Math. Fluid Mech.* **15**, 41 (2013).
88. W.J. Jillians, *J. Fluid Mech.* **204**, 563 (1989).
89. E.A. Karabut, *J. Fluid Mech.* **372**, 45 (1989).
90. G. Keady and J. Norbury, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **83**, 137 (1978).
91. C. Kharif and Pelinovsky E., *European Journal of Mechanics, B/Fluids* **22**, 603 (2003).
92. C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean* (Springer, Berlin, 2009).
93. W. Kinnersley, *J. Fluid Mech.* **77** (2), 229 (1976).
94. D.J. Korteweg and G. De Vries, *Philos. Mag.* **5** (39), 422 (1895).
95. E.V. Laitone, *J. Fluid Mech.* **9**, 430 (1960).

96. E.V. Laitone, J. Geophys. Res. **67** (4), 1555 (1962).
97. B.M. Lake, H.C. Yuen, H. Rungaldier, and W.E. Ferguson, J. Fluid Mech. **83** (1), 49 (1977).
98. G. Lawton, New Scientist **170** (2297), 28 (2001).
99. T. Levi-Civita, Mathematische Annalen **93**, 264 (1925).
100. H. Lhuissier and E. Villermaux, J. Fluid Mech. **696**, 5 (2012).
101. M.J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl. **1**, 269 (1965).
102. M.J. Lighthill, Proc. Roy. Soc. London A **299**, 28 (1967).
103. M.S. Longuet-Higgins, Proc. Roy. Soc. London A **342**, 157 (1975).
104. M.S. Longuet-Higgins and E.D. Cokelet, Proc. Roy. Soc. London A **350**, 1 (1976).
105. M.S. Longuet-Higgins and M.J.H. Fox, J. Fluid Mech. **80** (4), 721 (1977).
106. M.S. Longuet-Higgins, J. Inst. Math. Appl. **22**, 261 (1978).
107. M.S. Longuet-Higgins, Proc. Roy. Soc. London A **360**, 471 (1978).
108. M.S. Longuet-Higgins, Proc. Roy. Soc. London A **360**, 489 (1978).
109. M.S. Longuet-Higgins and E.D. Cokelet, Proc. Roy. Soc. London A **364**, 1 (1978).
110. M.S. Longuet-Higgins and M.J.H. Fox, J. Fluid Mech. **85** (4), 769 (1978).
111. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **94** (3), 497 (1979).
112. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **97** (1), 1 (1980).
113. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **134**, 155 (1983).
114. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **149**, 205 (1984).
115. M.S. Longuet-Higgins, Proc. Roy. Soc. London A **396**, 269 (1984).
116. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **151**, 457 (1985).
117. M.S. Longuet-Higgins, Proc. Roy. Soc. London A **403**, 167 (1986).
118. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **173**, 683 (1986).
119. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **179**, 547 (1987).
120. M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **186**, 321 (1988).
121. M.S. Longuet-Higgins and R.P. Cleaver, J. Fluid Mech. **258**, 115 (1994).
122. M.S. Longuet-Higgins, R.P. Cleaver, and M.J.H. Fox, J. Fluid Mech. **259**, 333 (1994).
123. M.S. Longuet-Higgins and M.J.H. Fox, J. Fluid Mech. **317**, 1 (1996).
124. M.S. Longuet-Higgins and D.G. Dommermuth, J. Fluid Mech. **336**, 33 (1997).
125. M.S. Longuet-Higgins and M. Tanaka, J. Fluid Mech. **336**, 51 (1997).
126. M.S. Longuet-Higgins, Wave Motion **45**, 770 (2008).
127. V.P. Lukomsky, I.S. Gandzha, and D.V. Lukomsky, Comp. Phys. Comm. **147** (1–2), 548 (2002).
128. V.P. Lukomsky, I.S. Gandzha, D.V. Lukomsky, Phys. Rev. Lett. **89** (16), 164502 (2002).
129. V.P. Lukomsky and, I.S. Gandzha, Nonlinear Processes in Geophysics **10** (6), 599 (2003).
130. V.P. Lukomsky, I.S. Gandzha, and D.V. Lukomsky, Phys. Rev. Lett. **96** (6), 069403 (2004).
131. Y. Ma, G. Dong, M. Perlin, X. Ma, and G. Wang, J. Fluid Mech. **711**, 101 (2012).
132. D.V. Maklakov, Euro. J. Appl. Math. **13**, 67 (2002).
133. J.W. McLean, Y.C. Ma, D.U. Martin, P.G. Saffman, and H.C. Yuen, Phys. Rev. Lett. **46** (13), 817 (1981).
134. J.W. McLean, J. Fluid Mech. **114**, 315 (1982).
135. J.W. McLean, J. Fluid Mech. **114**, 331 (1982).
136. J.B. McLeod, Trans. Amer. Math. Soc. **299** (1), 299 (1987).
137. J.B. McLeod, Stud. Appl. Math. **98**, 311 (1997).<sup>9</sup>
138. W.K. Melville, J. Fluid Mech. **115**, 165 (1982).
139. W.K. Melville, Ann. Rev. Fluid Mech. **28**, 279 (1996).
140. J.H. Michell, Philos. Mag. **5** (36), 430 (1893).
141. A.C. Norman, J. Fluid Mech. **66**, 261 (1974).
142. D.B. Olfe and J.W. Rottman, J. Fluid Mech. **100** (4), 801 (1980).
143. E. Pelinovsky and C. Kharif, Nat. Hazards Earth Syst. Sci. **11**, 2043 (2011).
144. D.H. Peregrine, Ann. Rev. Fluid Mech. **15**, 149 (1983).
145. O.M. Phillips, J. Fluid Mech. **9**, 193 (1960).
146. P.I. Plotnikov and J.F. Toland, Arch. Rational Mech. Anal. **171**, 349 (2004).
147. M. Previsic, R. Bedard, G. Hagerman, E2I EPRI WP-004-US Report (June 16, 2004). [http://www.energy.ca.gov/oceanenergy/E2I\\_EPRI\\_REPORT\\_WAVE\\_ENERGY.PDF](http://www.energy.ca.gov/oceanenergy/E2I_EPRI_REPORT_WAVE_ENERGY.PDF)
148. Lord Rayleigh, Philos. Mag. **5** (1), 257 (1876).
149. M.M. Rienerker and J.D. Fenton, J. Fluid Mech. **104**, 119 (1981).
150. J.W. Rottman and D.B. Olfe, J. Fluid Mech. **94** (4), 777 (1979).
151. S.S. Rozhkov, EPL **85**, 24001 (2009).
152. P.G. Saffman, J. Fluid Mech. **101** (3), 567 (1980).
153. P.G. Saffman, J. Fluid Mech. **159**, 169 (1985).
154. K. Sasaki and T. Murakami, J. Ocean. Soc. Japan **29**, 94 (1973).
155. L.W. Schwartz, J. Fluid Mech. **62** (3), 553 (1974).
156. L.W. Schwartz and J.-M. Vanden-Broeck, J. Fluid Mech. **95** (1), 119 (1979).
157. L.W. Schwartz and J.D. Fenton, Ann. Rev. Fluid Mech. **14**, 39 (1982).
158. Scлавounos P.D. *Wave energy density and flux* (MIT Lecture Open Course in Mechanical Engineering No. 2.24 “Ocean wave interaction with ships and offshore energy systems”, 2002). <http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-24-ocean-wave-interaction-with-ships-and-offshore-energy-systems-13-022-spring-2002/lecture-notes/lecture4.pdf>.

<sup>9</sup> Робота була вперше опублікована в 1979 р.: Math. Research Center report no. 2041, University of Wisconsin, Madison.

159. Yu.V. Sedletsy, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 035502 (2008).
160. Yu.V. Sedletsy, *Phys. Fluids* **24**, 062105 (2012).
161. J.A. Simmen and P.G. Saffman, *Stud. Appl. Math.* **73**, 35 (1985).
162. E.R. Spielvogel, *Arch. Rational Mech. Anal.* **39** (3), 189 (1970).
163. M.A. Srokosz, *J. Fluid Mech.* **111**, 491 (1981).
164. G.G. Stokes, *Camb. Phil. Soc. Trans.* **8**, 441 (1847).
165. G.G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers* **1**, 314 (1880).
166. G.G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers* **1**, 225 (1880).
167. D.J. Struik, *Mathematische Annalen* **95**, 595 (1926).
168. M.-Y. Su, M. Bergin, P. Marler, and R. Myrick, *J. Fluid Mech.* **124**, 45 (1982).
169. M. Tanaka, *J. Phys. Soc. Japan* **52**, 3047 (1983).
170. M. Tanaka, *J. Fluid Mech.* **156**, 281 (1985).
171. M. Tanaka, *Phys. Fluids* **29** (3), 650 (1986).
172. M. Tanaka, *A method of calculation of periodic steady waves in water of finite depth: The manual to the program Stokes\_finite.f* (1996).
173. L. Tao and H. Song, *i S. Chakrabart Coast. Eng.* **54**, 825 (2007).
174. A.F. Teles da Silva and D.H. Peregrine, *J. Fluid Mech.* **195**, 281 (1988).
175. J.F. Toland, *Proc. Roy. Soc. London A* **363**, 469 (1978).
176. J.F. Toland, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **7**, 1 (1996).
177. J. Touboul, J.P. Giovanangeli, C. Kharif, and E. Pelinovsky, *European Journal of Mechanics, B/Fluids* **25**, 662 (2006).
178. J.-M. Vanden-Broeck and L.W. Schwartz, *Phys. Fluids* **22** (10), 1868 (1979).
179. J.-M. Vanden-Broeck, *Phys. Fluids* **26** (9), 2385 (1983).
180. G.B. Whitham, *J. Fluid Mech.* **27**, 399 (1967).
181. J.M. Williams, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* **302**, 139 (1981).
182. J.M. Williams, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* **314**, 353 (1985).
183. J.R. Wilton, *Philos. Mag.* **6** (27), 385 (1914).
184. H. Yamada, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ.* **5**, 37 (1957).
185. H. Yamada and T. Shiotani, *Bull. Disaster Prev. Res. Inst. Kyushu Univ.* **18**, 1 (1968).
186. H.C. Yuen and B.M. Lake, *Advances in Applied Mechanics* **22**, 67 (1982).
187. V.E. Zakharov and L.A. Ostrovsky, *Physica D* **238** (5), 540 (2009).
188. V.E. Zakharov and A.I. Dyachenko, *European Journal of Mechanics, B/Fluids* **29**, 127 (2010).
189. J.A. Zufiria and P.G. Saffman, *Stud. Appl. Math.* **74**, 259 (1986).
190. J.A. Zufiria, *J. Fluid Mech.* **181**, 17 (1987).
191. J.A. Zufiria, *J. Fluid Mech.* **184**, 183 (1987).

Одержано 05.05.13

И.С. Ганджа

## ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Резюме

Обзор посвящен анализу волнового движения поверхности жидкости под действием силы тяжести в рамках канонической модели гидродинамики, в которой жидкость считается невязкой и несжимаемой, а движение жидкости плоским и потенциальным (безвихревым). Предметом исследования являются двухмерные периодические волны постоянной формы, которые распространяются в выделенном направлении. Типичным примером таких волн являются морские и океанские волны метровой и большей длины, когда эффекты поверхностного натяжения не являются определяющими. Основное внимание уделено свойствам нелинейных волн, известных под названием волн Стокса: форме поверхности, скорости, амплитуде, энергии. Рассмотрены вопросы неустойчивостей и разрушения волн.

I.S. Gandzha

## WAVE MOTION OF THE SURFACE OF INVISCID FLUID UNDER THE ACTION OF GRAVITY

Institute of Physics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine  
(46, Prosp. Nauky, Kyiv 03028, Ukraine;  
e-mail: gandzha@iop.kiev.ua)

Summary

This review is devoted to analyzing the wave motion of the fluid surface under the action of gravity in the framework of the canonical model of hydrodynamics, where the fluid is assumed to be inviscid and incompressible and its motion to be planar and potential (irrotational). The subject of investigation is two-dimensional periodic waves of steady shape that propagate in a preferential direction. A typical example of such waves are the sea and ocean waves of meter length or longer, when the effects due to surface tension are not dominating. The main focus is put on the properties of nonlinear waves known as the Stokes waves: their waveform, velocity, amplitude, energy. Some questions related to wave instabilities and breaking are considered as well.