

О.М. ГАВРИЛИК, Ю.А. МІЩЕНКО

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголобова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143; e-mail: omgavr@bitp.kiev.ua)

СКЛАДЕНІ ФЕРМІОНИ ЯК ДЕФОРМОВАНІ ОСЦИЛЯТОРИ: ХВИЛЬОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЗАПЛУТАНІСТЬ¹

УДК 530.145, 539.12.01

Складена структура частинок децю змінює їх статистику порівняно із класичними бозе- та фермі-статистиками. Теорема про зв'язок спіну зі статистикою, отже, не виконується. Скажімо, π -мезони, екситони, куперівські пари не є ідеальними бозонами і, аналогічно, баріони не є простими ферміонами. У попередніх статтях ми вивчали двочастинкові складені бозони (тобто квазібозони) за допомогою реалізації їх через деформовані осцилятори. Були знайдені такі характеристики міжкомпонентної заплутаності як ентропія заплутаності та чистота (purity) в термінах параметра деформації. У цій роботі ми проводимо аналогічний розгляд складених частинок фермі-типу та досліджуємо їх у двох основних випадках: (i) складені ферміони (чи коферміони, чи СФ-ни) типу “бозон + ферміон”; (ii) СФ-ни типу “деформований бозон + ферміон”. Як ми покажемо, коферміони, в обох випадках, допускають реалізацію лише звичайними ферміонами. Випадок (i) розглянуто повністю та знайдено хвильові функції разом із мірами заплутаності. Випадок (ii) розглянуто в межах декількох мод, як для СФ-нів так і для складових. Ентропію заплутаності та “п'юріті” визначено через задіяні параметри і проілюстровано графічно.

Ключові слова: складені ферміони (коферміони), складені бозони (кобозони, квазібозони), деформовані осцилятори, двочастинкова заплутаність, ентропія заплутаності, “п'юріті”.

1. Вступ

Складені ферміони відіграють важливу роль в сучасній квантовій фізиці. Достатньо навести кілька прикладів СФ-нів: до них належать квазічастинки, задіяні в теорії дробового квантового ефекту Хола [1]; також можна згадати баріони та пентакварки як відомі приклади з фізики гадронів [2–4]. В цій роботі ми зосередимося на властивостях заплутаності складених ферміонів, в рамках реалізації їх ферміонним осцилятором, у двох відносно простих випадках: коферміон, побудований із чистого ферміона та чистого бозона, а також коферміон, що є композитом, утвореним із чистого ферміона та деформованого бозона (взятого в загальній формі).

В попередніх наших роботах [5–8] ми вивчали біпартитні (двокомпонентні) “бозони” двох типів: “ферміон + ферміон” і “бозон + бозон” із операто-

рами народження та знищення в типовому анзаці

$$A_{\alpha}^{\dagger} = \sum_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} a_{\mu}^{\dagger} b_{\nu}^{\dagger}, \quad A_{\alpha} = \sum_{\mu\nu} \overline{\Phi}_{\alpha}^{\mu\nu} b_{\nu} a_{\mu}, \quad (1)$$

де оператори народження a_{μ}^{\dagger} , b_{ν}^{\dagger} для (розрізняваних) складових взято або обидва ферміонні, або ж обидва бозонні. В роботах [5, 6] було показано, що складені бозони часткового вигляду (з належними хвильовими функціями $\Phi_{\alpha}^{\mu\nu}$) можна реалізувати, в операторному сенсі, за допомогою прийнятних деформованих бозонів (деформованих осциляторів).

Важливим у квантовій теорії інформації, квантовій комунікації і телепортації [9, 10] є поняття заплутаності чи квантової кореляції між компонентами складеної частинки або складеної системи.

¹ Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції “XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics.”

Недавно воно вивчалось саме в контексті складених бозонів [7, 11–13]. Серед мір, які характеризують ступінь запутаності, найліпше відомі ентропія запутаності та “п’юріті” (= обернена величина до числа Шмідта) [9, 10]. Міри міжкомпонентної запутаності у квазібозоні показують наскільки його властивості близькі до властивостей справжнього бозона [11, 12, 14, 15].

Для складених бозонів, реалізованих деформованими квантовими осциляторами, є можливим напряму пов’язати відповідний параметр деформації із характеристиками запутаності складеного бозона [7]. Тоді, характеристики (чи міри) біпартитної запутаності щодо a - і b -підсистем, див. (1), можуть бути знайдені явно [7] в термінах параметра деформації: для окремого складеного бозона, для мультиквазібозонних станів, а також для когерентних станів, побудованих для таких квазібозонів.

Як дуже важливий аспект, вивчався вплив енергії системи на квантову кореляцію та/або властивості квантової статистики системи для цих квазібозонів [8]. Енергія квазібозона відрізняється від енергії відповідного ідеального бозона, і різниця (включно із енергією зв’язаних станів) суттєво залежить від запутаності квазібозона, чітко показуючи відхилення від поведінки бозона [8]. Такий зв’язок енергії із запутаністю є істотним для досліджень в квантовій інформації, квантовій комунікації, генеруванні запутаності [16], квантових дисоціації [17], додавання чи віднімання частинки [18, 19] тощо.

В цій роботі ми досліджуємо коферміони і передусім знайдемо ентропію запутаності S_{ent} , що характеризує складений ферміон. Наш аналіз ми проведемо для одно-СФ-них станів (для порівняння, відповідні результати для одноквазібозонних станів наведені стисло). У деякій аналогії з випадком складених бозонів, ми розглядаємо коферміони як біпартитні системи, реалізовані через модово-незалежні² ферміонні осцилятори. Розглядаємо також, в спеціальному випадку, і іншу міру запутаності – п’юріті.

Варто наголосити, що дослідження запутаності в цій роботі стосується не багатокоферміонної системи, а станів одного (чи окремого) коферміо-

на. Відповідно, запутаність та її ентропія стосуються двох складових біпартитного СФ. Через це наш підхід і аналіз суттєво відмінні від розгляду ентропії запутаності системи вільних чи складених ферміонів, див. наприклад [20, 21], коли основну роль відіграє просторовий розмір підсистеми, а ентропія запутаності розглядалась у інший, ніж у нас, спосіб.

В розд. 2 дається короткий опис реалізованих складених бозонів. У розділах 3–5 проведено аналіз операторної реалізації коферміонів (деформованими) ферміонними осциляторами. Далі, досліджується ентропія запутаності одночастинкових станів коферміонів. Модифіковані СФ (утворені з ферміона та деформованого бозона) аналізуємо в розд. 5(б). П’юріті для СФ-стану розглянемо в розд. 5(а). Завершується стаття висновками.

2. Квазібозони, утворені як двоферміонні (двобозонні) композити [5]

Наведемо основні факти про складені бозони, реалізовані [5, 6] набором незалежних мод деформованих бозонів (деформованих осциляторів), які задаються структурною функцією деформації $\varphi(n)$ [22]. На рівні алгебри квазібозонні оператори A_α , A_α^\dagger і оператор числа частинок N_α задовольняють на станах ті самі співвідношення, що і відповідні співвідношення для операторів народження/знищення та числа збуджень деформованого осцилятора:

$$A_\alpha^\dagger A_\alpha \simeq \varphi(N_\alpha), \quad [A_\alpha, A_\beta^\dagger] \simeq \delta_{\alpha\beta} (\varphi(N_\alpha + 1) - \varphi(N_\alpha)), \\ [N_\alpha, A_\beta^\dagger] \simeq \delta_{\alpha\beta} A_\beta^\dagger, \quad [N_\alpha, A_\beta] \simeq -\delta_{\alpha\beta} A_\beta.$$

Тут \simeq означає слабку еквівалентність (тобто на станах), символ $\delta_{\alpha\beta}$ забезпечує незалежність мод. В такій реалізації структурна функція $\varphi(n)$ містить [5, 6] дискретний параметр деформації f і є квадратичною за числом квазічастинок n ($\kappa = +1$ чи -1 для двох бозонних чи двох ферміонних складових):

$$\varphi(n) = \left(1 + \kappa \frac{f}{2}\right)n - \kappa \frac{f}{2}n^2, \quad f = \frac{2}{m}, \quad (2)$$

$m = 1, 2, \dots$. Матриці Φ_α із (1) є такими [5, 6]:

$$\Phi_\alpha = U_1(d_\alpha) \text{diag}\{0..0, \sqrt{f/2} U_\alpha(m), 0..0\} U_2^\dagger(d_b), \quad (3)$$

² Це розуміється у ферміонному, тобто антикомутативному сенсі.

де через $U_j(r)$ позначено довільні унітарні $r \times r$ матриці, а розмірності d_a або d_b дають повне число мод для складових з операторами a_μ відпов. b_ν .

Зауважимо, що стан одного складеного бозона

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} |\mu\rangle \otimes |\nu\rangle, \quad |\mu\rangle \equiv a_\mu^\dagger |0\rangle, \quad |\nu\rangle \equiv b_\nu^\dagger |0\rangle,$$

є в загальному випадку біпартітно-заплутаним щодо станів двох складових ферміонів (чи двох бозонів). Відомими є наступні міри заплутаності [9,10]: ранг Шмідта s , число Шмідта K чи його обернена величина – п'юріті, ентропія заплутаності S та конкурентність C . Як доведено в [7], ентропія (внутрішньої) заплутаності одного складеного бозона

$$S_{\text{ent}} = \ln(m) = \ln(2/f). \quad (4)$$

Для мультіквасібозонних станів відповідні результати були також отримані, див. [7, 8].

Інша відома міра заплутаності [9, 10] – п'юріті виражається через число Шмідта: $P = 1/K$. Зауважимо, що *п'юріті* використовувалася у зв'язку з ентропією породження через процеси розсіяння [16] (стосовно інших контекстів див. [18, 23]). Для одного *заплутаного квазібозона* п'юріті також пов'язана [7] з параметром деформації $m = \frac{2}{f}$:

$$P = \sum_k \lambda_k^4 = \frac{1}{m} \quad (5)$$

і, отже, набуває дискретних значень.

3. Коферміон як ферміон плюс деформований бозон

Надалі розглядаємо складені ферміони, утворені з чистого (або ж деформованого) бозона та чистого ферміона з точки зору їх реалізації деформованими ферміонами. Як і у випадку складених бозонів, реалізацію СФ-нів будемо у спосіб, який уможливилюватиме розгляд операторів народження, знищення та числа збуджень СФ-нів як відповідних операторів деформованих осциляторів. Це у свою чергу надасть нам переваги порівняно із стандартним квантовомеханічним або ж макроскопічним підходом з явним прямим врахуванням складеної структури – при виконанні обчислень, у ефективному або наближеному описі. Оператори народження і знищення СФ-нів задаємо тим самим

“анзацем”, як і в (1), але тепер a_μ^\dagger, a_μ відповідно є оператори народження і знищення для складених бозонів (деформованих чи ні), а b_ν^\dagger, b_ν – оператори для складених ферміонів, із їх стандартними антикомутаційними співвідношеннями. З метою спрощення будемо вважати, що різні моди деформованих бозонів є незалежними. Тоді маємо наступні визначальні співвідношення для операторів складених бозонів (деформованих чи ні; n_μ^a – оператор числа частинок для деформованих бозонів у μ -вій моді):

$$a_\mu^\dagger a_\mu = \chi(n_\mu^a), \quad [a_\mu, a_{\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'} (\chi(n_\mu^a + 1) - \chi(n_\mu^a)); \\ [a_\mu^\dagger, a_{\mu'}^\dagger] = 0; \quad [n_\mu^a, a_\mu^\dagger] = a_\mu^\dagger.$$

Тут структурна функція деформації $\chi(n)$ описує загальний випадок деформованого складеного бозона. Для недеформованого, тобто звичайного бозона, $\chi(N) \equiv N$. У деформованому випадку $\chi(N)$ залежить від одного чи кількох параметрів деформації, які допускають границю “без деформації”. Зручно працювати із станами деформованого бозона, нормованими як $|\mu\rangle = a_\mu^\dagger |0\rangle$. Це саме стосується станів СФ-нів, які задовольняють умови нормування для структурних матриць (хвильових функцій):

$$\text{Tr}(\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Будемо вважати, що СФ-ни поведуться на станах як деформовані частинки із структурною функцією $\varphi(N)$. Відповідні деформовані ферміони, які дають реалізацію, вважаємо незалежними (у сенсі ферміонів). Визначаючи оператор числа СФ-нів N_α як $\varphi(N_\alpha) \simeq A_\alpha^\dagger A_\alpha$, запишемо умови реалізації:

$$\{A_\alpha, A_\beta^\dagger\} \simeq \delta_{\alpha\beta} [\varphi(N_\alpha + 1) + \varphi(N_\alpha)], \quad (7)$$

$$\{A_\alpha^\dagger, A_\beta^\dagger\} \simeq 0, \quad \alpha \neq \beta; \quad [N_\alpha, A_\beta^\dagger] \simeq \delta_{\alpha\beta} A_\beta^\dagger. \quad (8)$$

Перша умова в (8) виконується автоматично, навіть у сильному сенсі, для всіх α, β :

$$\{A_\alpha^\dagger, A_\beta^\dagger\} = 0, \quad \text{зокрема } (A_\alpha^\dagger)^2 = 0. \quad (9)$$

Ця рівність, тобто ферміонна нільпотентність, а також (7), розглядувані на вакуумному та одно-СФ станах, разом із другою рівністю в (8), дає звичайну *ферміонну структурну функцію* $\varphi(N)$:

$$\varphi(0) = \varphi(2) = \dots = 0, \quad \varphi(1) = \chi(1) = 1. \quad (10)$$

Проаналізуємо умову (7), діючи як в [5], але альтернуючи (через взаємозаміну) комутатор і антикомутатор у лівій частині з $A_{\gamma_i}^\dagger$. Позначаючи

$$\Delta^k \chi(n_\mu^a) \equiv \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \chi(n_\mu^a + l), \quad k = 0, 1, \dots,$$

із кількома першими членами

$$\Delta^0 \chi(n_\mu^a) = \chi(n_\mu^a), \quad \Delta^1 \chi(n_\mu^a) = \chi(n_\mu^a + 1) - \chi(n_\mu^a),$$

$$\Delta^2 \chi(n_\mu^a) = \chi(n_\mu^a + 2) - 2\chi(n_\mu^a + 1) + \chi(n_\mu^a),$$

для антикомутатора $\{A_\alpha, A_\beta^\dagger\}$ в (7), маємо

$$\begin{aligned} \{A_\alpha, A_\beta^\dagger\} &= \sum (\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu\mu} \Delta^1 \chi(n_\mu^a) + \\ &+ \sum_{\mu\mu'} (\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu'\mu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu - \sum_{\mu\nu\nu'} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \Phi_\beta^{\mu\nu'} \Delta^1 \chi(n_\mu^a) b_{\nu'}^\dagger b_\nu. \end{aligned}$$

Це буде використано нижче. Для *недеформованого складеного бозона* ($\chi(n) \equiv n$) останнє з врахуванням (6) зведеться до

$$\{A_\alpha, A_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\mu\mu'} (\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu'\mu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu - \sum_{\nu\nu'} (\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta)^{\nu\nu'} b_{\nu'}^\dagger b_\nu.$$

Тепер обчислимо комутатор

$$\begin{aligned} [\{A_\alpha, A_\beta^\dagger\}, A_\gamma^\dagger] &= \sum_{\mu\mu\nu_1} [(\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1\mu} \Phi_\gamma^{\mu\nu_1} - \\ &- (\Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu_1\mu} \Phi_\beta^{\mu\nu_1}] a_{\mu_1}^\dagger b_{\nu_1}^\dagger \cdot (\Delta^1 \chi(n_\mu^a) + \delta_{\mu\mu_1} \Delta^2 \chi(n_\mu^a)) + \\ &+ \sum_{\mu\nu\nu_2} \overline{\Phi_\alpha^{\mu\nu}} \Phi_\beta^{\mu\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu\nu_2} a_\mu^\dagger b_{\nu_1}^\dagger \Delta^2 \chi(n_\mu^a) b_{\nu_2}^\dagger b_\nu. \end{aligned} \quad (11)$$

Недеформованим аналогом (при $\chi(n) \equiv n$) останнього є

$$[\{A_\alpha, A_\beta^\dagger\}, A_\gamma^\dagger] = \sum_{\mu\nu} (\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma - \Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta)^{\mu\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger.$$

Отже, умова (7) на одно-СФ станах $|\gamma\rangle$ дає базове співвідношення для хвильових функцій:

$$\begin{aligned} &(\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma)^{\mu\nu} - (\Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta)^{\mu\nu} + \\ &+ (\chi(2) - 2) [(\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu\mu} \Phi_\gamma^{\mu\nu} - (\Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger)^{\mu\mu} \Phi_\beta^{\mu\nu}] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Зауважимо, що у випадку недеформованого складового бозона це співвідношення дає

$[\{A_\alpha, A_\beta^\dagger\}, A_\gamma^\dagger] = 0$. А це приводить до замкнутого набору умов реалізації на матриці Φ_α , див. (6),(7), а саме:

$$\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\gamma - \Phi_\gamma \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta = 0, \quad \text{Tr}(\Phi_\beta \Phi_\alpha^\dagger) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Однак, для нетривіальної деформації, тобто $\chi(N) \not\equiv N$, важливими є подвійний та вищі комутатори (чи антикомутатори), і вони мають бути взяті до уваги (ми це опускаємо).

4. Складені квазіферміони з недеформованим компонентним бозоном

Розглянемо реалізацію СФ, утворених із звичайних бозона та ферміона. Відповідні хвильові функції СФ, реалізованих звичайним ферміоном, задовільняють рівняння (13), які ми розв'яжемо нижче. Виберемо матрицю $\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha_1}$ максимального рангу і здійснимо розклад сингулярного значення (РСЗ, або Шмідта):

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha_1} &= U_1 D_{\alpha_1} V_1^\dagger, \\ D_{\alpha_1} &= \text{diag}\{\lambda_i^{\alpha_1}, i = \kappa_1, \dots, \kappa_r, \dots\} = \\ &= \text{diag}\{\lambda_{\kappa_1}^{\alpha_1} E_{m_1}, \lambda_{\kappa_2}^{\alpha_1} E_{m_2}, \dots, \lambda_{\kappa_r}^{\alpha_1} E_{m_r}\} \end{aligned} \quad (14)$$

із дійсними невід'ємними $\lambda_{\kappa_l}^{\alpha_1}$, взятими у спадному порядку³, $\lambda_{\kappa_1}^{\alpha_1} > \dots > \lambda_{\kappa_r}^{\alpha_1} \geq 0$, для яких виконується $\sum_l m_l (\lambda_{\kappa_l}^{\alpha_1})^2 = 1$, та унітарними матрицями U_1, V_1 . Для решти матриць $\Phi_\gamma, \gamma \neq \alpha_1$ робимо підстановку $\Phi_\gamma \rightarrow \tilde{\Phi}_\gamma$:

$$\Phi_\gamma = U_1 \tilde{\Phi}_\gamma V_1^\dagger, \quad \gamma \neq \alpha_1. \quad (15)$$

Перше рівняння в (13) при $\alpha = \beta = \alpha_1$ дає

$$D_{\alpha_1}^2 \tilde{\Phi}_\gamma - \tilde{\Phi}_\gamma D_{\alpha_1}^2 = 0 \quad \text{or} \quad ((\lambda_i^{\alpha_1})^2 - (\lambda_j^{\alpha_1})^2) (\tilde{\Phi}_\gamma)_{ij} = 0.$$

Якщо $\lambda_i^{\alpha_1} \neq \lambda_j^{\alpha_1}$, то $(\tilde{\Phi}_\gamma)_{ij} = 0$. Відповідно до блочно-діагональної форми D_{α_1} , див. (14), інші матриці $\tilde{\Phi}_\gamma$ також набувають блочно-діагональну форму:

$$\tilde{\Phi}_\gamma = \text{diag}\{\tilde{\Phi}_{\gamma,1}, \tilde{\Phi}_{\gamma,2}, \dots, \tilde{\Phi}_{\gamma,r}\}, \quad \gamma \neq \alpha_1.$$

Розмірності одиничних матриць E_{m_k} та квадратних $\tilde{\Phi}_{\alpha,k}$ дорівнюють кратності сингулярних значень $\lambda_{\kappa_k}^{\alpha_1}$. Перше рівняння в (13) зводиться до набору r незалежних систем, $k = 1, 2, \dots, r$:

$$\lambda_{\kappa_k}^{\alpha_1} (\tilde{\Phi}_{\beta,k}^\dagger \tilde{\Phi}_{\gamma,k} - \tilde{\Phi}_{\gamma,k} \tilde{\Phi}_{\beta,k}^\dagger) = 0, \quad (16)$$

³ Фізичним змістом індексів κ_l може бути відносний імпульс складових у с.д.м., а також інші квантові числа.

$$\lambda_{\kappa_k}^{\alpha_1} (\tilde{\Phi}_{\beta,k} \tilde{\Phi}_{\gamma,k} - \tilde{\Phi}_{\gamma,k} \tilde{\Phi}_{\beta,k}) = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi}_{\beta,k} \tilde{\Phi}_{\alpha,k}^\dagger \tilde{\Phi}_{\gamma,k} - \tilde{\Phi}_{\gamma,k} \tilde{\Phi}_{\alpha,k}^\dagger \tilde{\Phi}_{\beta,k} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \neq \alpha_1. \quad (18)$$

Із (16)–(17) виводимо, що матриці $\tilde{\Phi}_{\gamma,k}$, $\gamma \neq \alpha_1$, утворюють набір комутуючих *нормальних* матриць (які комутують із їх ермітово-спряженими) при фіксованих $k = 1, 2, \dots, r-1$ і можливо при фіксованих $k = r$, якщо $\lambda_{\kappa_r}^{\alpha_1} \neq 0$. У такому разі, як відомо [24], існує фіксована унітарна матриця \tilde{U}_k така, що $\tilde{\Phi}_{\gamma,k} = \tilde{U}_k \tilde{D}_{\gamma,k} \tilde{U}_k^\dagger$ з діагональною $\tilde{D}_{\gamma,k}$, $\gamma \neq \alpha_1$. Якщо $\lambda_{\kappa_r}^{\alpha_1} \neq 0$, рівняння (18) автоматично задовольняються, і ми маємо

$$\Phi_\alpha = U D_\alpha V^\dagger, \quad D_\alpha|_{\alpha \neq \alpha_1} = \text{diag}\{\tilde{D}_{\alpha,1}, \dots, \tilde{D}_{\alpha,r}\}, \quad (19)$$

із $U = U_1 \text{diag}\{\tilde{U}_k\}$, $V = V_1 \text{diag}\{\tilde{U}_k\}$, $k = \overline{1, r}$.

Якщо $\lambda_{\kappa_r}^{\alpha_1} = 0$, рівняння (18) при $k = \overline{1, r-1}$ задовольняються, а останнє з них, при $k = r$, для $\tilde{\Phi}_{\alpha,r}$, $\alpha \neq \alpha_1$, розв'язується як це було вище для Φ_α . Тобто, індукцією по числу $\#\alpha \equiv m_{CF}$ матриць (мод) Φ_α ми можемо показати, що (19), із довільними U і V , дає загальний розв'язок рівн. (13)⁴.

Навпаки: усі матриці (19) із $\text{Tr}(D_\beta \overline{D_\alpha}) = \delta_{\alpha\beta}$ задовольняють систему (13) і, отже, дають її загальний розв'язок. Діагональні елементи у D_α є компонентами ортонормованих векторів λ^α у комплексному просторі:

$$D_\alpha = \text{diag}\{\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \dots\}, \quad (\lambda^\alpha; \lambda^\beta) \equiv \sum_i \lambda_i^\alpha \overline{\lambda_i^\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (20)$$

Отже, ентропія заплутаності частинки “бозон-ферміон” для реалізованого СФ, в α -моді дається, разом з умовою ортогональності, так

$$S_{\text{entang}}^{(\alpha)} = - \sum_i |\lambda_i^\alpha|^2 \ln |\lambda_i^\alpha|^2, \quad (\lambda^\alpha; \lambda^\beta) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (21)$$

Зауважимо, що для параметризації розв'язку (19) можна скористатися зручною параметризацією в $SU(n)$: це стосується як унітарних матриць U , V , так і діагональних матриць D_α , оскільки їх елементи (λ_i^α) утворюють рядки (стовпчики) унітарної матриці, див (20).

Зауваження 1. В той час як для реалізованих складених бозонів блок $U_\alpha(m)$ у (3) асоційовано з

⁴ Справді, якщо $\#\alpha = 1$, це є саме РСЗ. Нехай (19) справедливо для $(\#\alpha) - 1$ мод. Тоді, при $\lambda_{\kappa_r}^{\alpha_1} = 0$, припущення індукції має бути застосовано до (18).

α -ю модою, даючи $m^2 - 1$ вільних *дійсних* параметрів у хвильові функції (максимум, $m^2/2$ вимірною *комплексного* простору станів), реалізовані СФ-ни допускають більш загальні хвильові функції. Справді, *часткові* ортонормовані хвильові функції СФ-нів

$$\Phi_\alpha = U \text{diag}\{0..0, \underbrace{U_\alpha(m) D_m^{(\alpha)} V_\alpha^\dagger(m)}_{GL(m)}, 0..0\} V^\dagger$$

уже мають $m^2 - 1$ вільних *комплексних* параметрів на одну моду.

5. Коферміони у випадку малої кількості мод

Розглянемо більш детально підвипадки малої кількості мод із СФ-нами в двох модах $\alpha = 1, 2$, і складовими – до трьох мод включно. Нагадаємо, що загальний розв'язок у випадку недеформованого складового бозона було дано в розділі 4.

5(a). Дві або три моди складового ферміона + звичайний бозон

Спочатку, візьмемо обидві складові у двох модах, тобто $\mu, \nu = \overline{1, 2}$. Розв'язок для реалізованих хвильових функцій записується як

$$\Phi_\alpha = e^{-i\tilde{\alpha}\psi} U \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\alpha} + \theta) e^{i\phi} & 0 \\ 0 & \sin(\tilde{\alpha} + \theta) e^{-i\phi} \end{pmatrix} V^\dagger, \quad (22)$$

де $\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2}(\alpha - \alpha_c) = \mp \frac{\pi}{4}$, $\alpha_c = 3/2$. Завдяки низькій розмірності матриць, зручно скористатися кутковою параметризацією $SU(2)$ (хоча можлива також і інша параметризація).

Ентропію заплутаності всередині СФ-на, реалізованого звичайним ферміоном, для кожної і двох мод отримуємо у вигляді

$$S_{\text{ent}}^{(\alpha)} \equiv - \sum_k (\lambda_k^\alpha)^2 \ln (\lambda_k^\alpha)^2 \Big|_{\alpha=1,2} = S_2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right), \quad (23)$$

де $S_2(x) \equiv - \sin^2 x \ln \sin^2 x - \cos^2 x \ln \cos^2 x$. Цей результат проілюстровано на рис. 1, а. Максимум ентропії $S_{\text{ent}} = \ln 2$ може відповідати найбільш сильно зв'язаному стану реалізованого СФ-на. Ясно, що $S_{\text{ent}} = 0$ значить протилежне, тобто найбільш слабо зв'язаний стан. Іншою мірою заплутаності СФ-стану – *n'оріті* $P \in$

$$P|_{\alpha=1,2} \equiv \sum_k (\lambda_k^\alpha)^4 = \frac{1}{4}(3 - \cos 4\theta).$$

П'юріті може набувати значення від $P = 1/2$ (при $\theta = 0$) до $P = 1$ (при $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$), див. рис. 1, б.

Зауваження 2. Несепарабельні СФ-стани з фіксованою ентропією внутрішньої заплутаності ($0 < S_{\text{ent}} < \ln 2$) та двома відповідними хвильовими функціями $\Phi_{\alpha}^{\mu\nu}$ параметризуються 6 незалежними дійсними параметрами.

Недеформовані складові в трьох модах

У цьому випадку візьмемо $\alpha = \overline{1, 2}$, $\mu, \nu = \overline{1, 3}$, такщ $\Phi_{\alpha}^{\mu\nu}$ є деякі 3×3 -матриці. Загальний розв'язок (19) має вигляд

$$\Phi_{\alpha} = e^{-i\psi(\alpha)} U \text{diag}\{\lambda_1^{\alpha}, \lambda_2^{\alpha}, \lambda_3^{\alpha}\} V^{\dagger}, \quad U, V \in SU(3),$$

із комплексними λ_k^{α} , $k = \overline{1, 3}$, що задовільняють умови ортонормованості (20), та U, V , незалежні від α .

Параметризація двох ортонормованих векторів (λ_k^1) та (λ_k^2) витікає з групи з $SU(3)$, оскільки рядки/стовпці матриць $SU(3)$ окремо утворюють ортонормовані вектори. Дійсно, скориставшись параметризацією з [25], отримуємо ($\alpha = 1 \leftrightarrow \alpha = 2$) симетричних, об'єднаних виразів:

$$(\lambda_k^{\alpha}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1}(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\tilde{\alpha} + \theta_3) - \sin \theta_2 \sin(\tilde{\alpha} + \theta_3) e^{i\phi_2}), \\ \cos \theta_1 \cos(\tilde{\alpha} + \theta_3), \\ e^{-i\phi_3}(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\tilde{\alpha} + \theta_3) + \cos \theta_2 \sin(\tilde{\alpha} + \theta_3) e^{i\phi_2}) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

де $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi/4 \leq \pi/2$, $0 \leq \phi_{1,2,3} \leq 2\pi$. Ентропія заплутаності $S_{\text{ent}}^{(\alpha)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \phi_2)$ для СФ в α -моді впливає з (21) із "симетризованими" квадратами абсолютних значень коефіцієнтів Шмідта:

$$|\lambda_{1,3}^{\alpha}|^2 = \frac{1}{4}(1 + \sin^2 \theta_1) \pm \frac{1}{4} \frac{\cos^4 \theta_1 \sin 2(\theta_3^+ - \theta_3^-)}{1 + \sin^2 \theta_1 \sin 2(\theta_3^+ + \theta_3^-)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta_3^{\pm}}{\sin 2(\theta_3^+ + \theta_3^-)} \cos^2 \theta_1 \cos 2(\theta_3 \mp \theta_3^{\mp} + \tilde{\alpha}),$$

$$|\lambda_2^{\alpha}|^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} \cos^2 \theta_1 \cos 2(\theta_3 + \tilde{\alpha}), \quad (25)$$

де два "зсувні" кути θ_3^{\pm} замінили θ_2, ϕ_2 , тоді як верхній чи нижній знак відповідає першому чи, відповідно, третьому коефіцієнту Шмідта. Перехід $(\theta_2, \phi_2) \rightarrow (\theta_3^-, \theta_3^+)$ дається єдиною формулою

$$\text{tg } 2\theta_3^{\pm} = \pm \frac{2 \sin \theta_1 \text{tg}(\theta_2 + \frac{\pi}{2} \delta_{\mp 1,1}) \cos \phi_2}{1 - \sin^2 \theta_1 \text{tg}^2(\theta_2 + \frac{\pi}{2} \delta_{\mp 1,1})}.$$

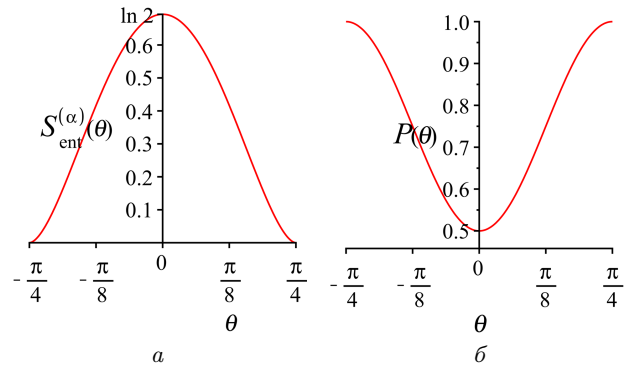


Рис. 1. Ентропія заплутаності $S_{\text{ent}}^{(\alpha)}$ (а) та п'юріті P як функція (б) параметра θ для моди $\alpha = 1, 2$

Зауважимо, що "зсув" відраховується від параметра θ_3 , який має особливу роль, бо на пряму пов'язаний із числом мод α , див. (24).

Зауваження 3. Параметризація, асиметрична стосовно заміни ($\alpha = 1$) \leftrightarrow ($\alpha = 2$) мод, див. [25], також може грати певну роль. З фізичної точки зору це можливо тоді, коли реалізація застосована до системи, яка з самого початку асиметрична, наприклад, через прикладене асиметричне зовнішнє поле, або ж як це є для s - проти p -рівнів/мод СФ-на.

Отже, ентропії заплутаності СФ-на $S_{\text{ent}}^{(1)}, S_{\text{ent}}^{(2)}$ параметризуються трьома кутами і однією фазою. На відміну від випадку складових у двох модах $\mu, \nu = \overline{1, 2}$, де $S_{\text{ent}}^{(1)} - S_{\text{ent}}^{(2)} = 0$ і $0 \leq S_{\text{ent}}^{(\alpha)} \leq \ln 2$, тепер для випадку $\mu, \nu = \overline{1, 3}$ $|S_{\text{ent}}^{(1)} - S_{\text{ent}}^{(2)}| \leq \ln 2$, в той час як $0 \leq S_{\text{ent}}^{(\alpha)} \leq \ln 3$. Границі для згаданих різниць накладають обмеження на реалізовані стани. Для ілюстрації залежностей $S_{\text{ent}}^{(\alpha)} = S_{\text{ent}}^{(\alpha)}(\theta_1, \theta_3, \theta_3^{\mp})$ при C_3 -симетричному виборі $\theta_3^{\mp} = \frac{\pi}{3}$, для обох мод $\alpha = 1, 2$, на рис. 2 (зверху) ми даємо екві-ентропійні криві, залежні від θ_1, θ_3 -кутів. Подібна поведінка, хоча і для ентропії змішування [26] в рамках трирівневої системи, виникала в контексті $SU(3)$ -параметризації кутритів (див. [26]).

Як видно, при $\theta_3^{\pm} = \frac{\pi}{3}$ і $\sin^2 \theta_1 = \frac{1}{3}$ ентропія для α -ї моди набуває C_3 -циклічно симетричної форми

$$S_{\text{ent}}^{(\alpha)} = \sum_{l=-1}^1 S_1\left(\frac{2}{3} \cos^2(\theta_3 + \frac{\pi}{3} l + \tilde{\alpha})\right), \quad (26)$$

де $S_1(x) \equiv -x \ln x$.

**5(б). СФ-ни типу
“ферміон + деформований бозон”**

Розглянемо двомодовий випадок ($\alpha = 1, 2$) СФ, утвореного із звичайного ферміона та χ -деформованого бозона. Завдяки специфіці двох мод достатньо розглянути умови реалізації (7)–(8) на вакуумі та станах одного СФ. Тоді для єдиного ненульового стану $A_1^\dagger A_2^\dagger |0\rangle$ двох СФ умови реалізації будуть виконуватись автоматично. При введенні позначення $\delta\chi_2 \equiv \chi(2) - 2$ вимога (12) на відповідних “станах одного СФ” зводиться до двох незале-

жних рівнянь:

$$L(\Phi_1, \Phi_2) \equiv \Phi_1 \Phi_1^\dagger \Phi_2 - \Phi_2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + \delta\chi_2 [\text{diag}\{(\Phi_1 \Phi_1^\dagger)^{\mu\mu}\} \Phi_2 - \text{diag}\{(\Phi_2 \Phi_1^\dagger)^{\mu\mu}\} \Phi_1] = 0, \quad (27)$$

$$-L(\Phi_2, \Phi_1) = 0. \quad (28)$$

Використовуючи підстановку (15), обмежуючись $\mu, \nu = 1, 2$, беручи

$$U_1 = U(u, v) \equiv \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in SU(2), \quad |u|^2 + |v|^2 = 1$$

та застосовуючи тотожність

$$U^\dagger \text{diag}\{(UXU^\dagger)^{\mu\mu}\} U = \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} R X R$$

з ермітовою матрицею

$$R = \begin{pmatrix} |u|^2 - |v|^2 & 2\bar{u}v \\ 2u\bar{v} & |v|^2 - |u|^2 \end{pmatrix},$$

приходимо до матричних рівнянь

$$\chi(2)(D_1^2 \tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_2 D_1^2) + \delta\chi_2 R(D_1^2 R \tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_2 D_1 R D_1) = 0, \quad (29)$$

$$\chi(2)(D_1 \tilde{\Phi}_2^\dagger \tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_2 \tilde{\Phi}_2^\dagger D_1) +$$

$$+ \delta\chi_2 (R D_1 \tilde{\Phi}_2^\dagger R \tilde{\Phi}_2 - R \tilde{\Phi}_2 \tilde{\Phi}_2^\dagger R D_1) = 0. \quad (30)$$

В силу тривимірності простору матриць $\tilde{\Phi}_2^\dagger$, що задовольняють умову ортогональності $\text{Tr}(D_1 \tilde{\Phi}_2^\dagger) = 0$, запишемо їх як лінійну комбінацію:

$$\tilde{\Phi}_2 = x_1 \begin{pmatrix} \lambda_2^{(1)} & 0 \\ 0 & -\lambda_1^{(1)} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \lambda_1^{(1)} \\ \bar{\varkappa} \lambda_2^{(1)} & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa \lambda_2^{(1)} \\ \bar{\varkappa} \lambda_1^{(1)} & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varkappa = e^{i(\arg v - \arg u)}$. Рівняння (30) зводиться до трьох лінійних (по x_1, x_2, x_3) рівнянь, асоційований детермінант яких повинен бути нульовим:

$$\det(\dots) = -\chi(2)(\chi(2) - 2)|u|^2|v|^2(|\lambda_1^{(1)}|^2 - |\lambda_2^{(1)}|^2)^2 = 0.$$

Це можливо в таких випадках:

а) $\chi(2) = 0$. Розв’язок рівнянь (27)–(28) має вигляд

$$\Phi_\alpha = U(u, (-1)^{\alpha-1} v) \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\alpha} + \theta) & 0 \\ 0 & \sin(\tilde{\alpha} + \theta) \end{pmatrix} V^\dagger. \quad (31)$$

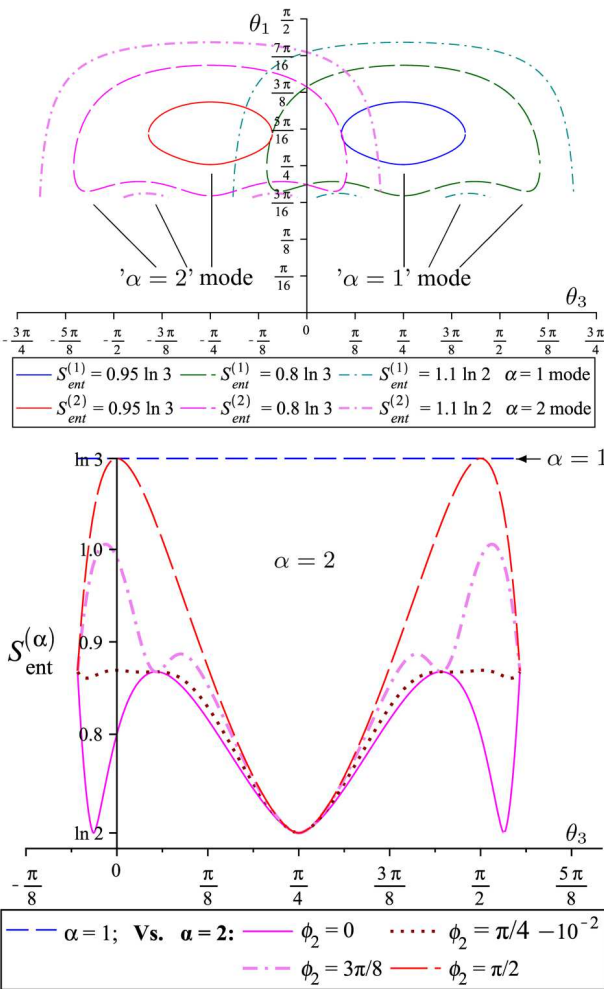


Рис. 2. Зверху: еквіентропійні криві ($S_{ent}^{(\alpha)} = \text{const}$) як функції кутів θ_1 і θ_3 при фіксованому $\theta_3^{\mp} = \frac{\pi}{3}$. Знизу: Ентропія заплутаності $S_{ent}^{(2)}(\theta_3, \phi_2)$ для коферміона в $\alpha = 2$ моді при фіксованій ентропії заплутаності $S_{ent}^{(1)} = \max = \ln 3$ для $\alpha = 1$ коферміона

б) $\chi(2) = 1$. Знаходимо два класи розв'язків:

$$\Phi_\alpha = \text{diag}\{\cos(\tilde{\alpha} + \theta), \sin(\tilde{\alpha} + \theta)\} V^\dagger, \quad (32)$$

$$\Phi_\alpha \equiv (\Phi_\alpha^{\mu\nu}) = \left(\delta_{\mu\mu_0} \overline{V_{\nu\alpha}} \right), \quad \text{і фіксовано } \mu_0 = 1 \text{ чи } 2. \quad (33)$$

с) $\chi(2) = 2$ тобто $\delta\chi_2 = 0$, – недеформований випадок, див. (22).

д) При $\chi(2) \neq 0, 1, 2$, розв'язок того ж вигляду, що і (32).

Отже, *ентропія заплутаності коферміона*, що містить деформований бозон, дається загальним однопараметричним виразом, див. (23), або є постійною $S_{\text{ent}} = 0$ у частковому випадку $\chi(2) = 1$, для (33). Деформації $\chi(2) = 0, 1$ чи 2 виділені з континуума. Яким чином параметр деформації $\chi(2)$ відображається у фізичних величинах, буде проаналізовано в іншій роботі.

6. Висновки

Після розв'язку задачі реалізації складених ферміонів (СФ-нів) звичайними ферміонами ми дослідили двочастинкову заплутаність (всередині СФ-на), мірою якої є ентропія заплутаності СФ. Аналіз проведено у відносно простих випадках: *i*) СФ-ни з недеформованим *складовим бозоном*, для яких розглянуто приклади, коли обидві складові можуть бути лише у двох чи трьох модах, *ii*) СФ-ни, що містять *деформований бозон*, причому з двома допустимими модами СФ-нів і складових. Результуючі вирази наведено: в (21) у випадку недеформованих складових, в (23) для двохмодового випадку, як для СФ-нів так і складових, та, нарешті, в (24), (26) для двох мод СФ-нів з трьома модами складових.

Знайдено, що для реалізованих СФ-нів типу “ферміон + деформований бозон”, деформація складового бозона не проявляє себе в явних формулах для ентропії заплутаності та чистоти (purity) стану СФ у підвипадках розглянутого двохмодового випадку. На перший погляд це *дещо розходиться* із дослідженою раніше ентропією заплутаності квазібозонів [7], де основним питанням була саме залежність від параметра деформації f . Усі інші параметри станів (наприклад із $U_1(d_a)$, $U_2(d_b)$, $U_\alpha(m)$ в (3)) там не ввійшли в міри заплутаності. В даному випадку СФ-нів ситуація інша: СФ-ни реалізуються *недеформованими* ферміонами, а тому аналогічний параметр деформа-

ції, що стосується СФ як цілого, відсутній. Задіяна величина $\chi(2)$, будучи пов'язаною з параметром(ами) деформації, для СФ-нів має інше походження, оскільки вона стосується складового компонента СФ-на. Тим не менше, з'являються додаткові параметри, що входять до матриці Φ анзацу (1), які разом із $\chi(2)$ задають ентропію заплутаності СФ-нів. Таким чином, ці параметри визначають вигляд станів СФ (їх хвильові функції). Відповідна залежність від задіяного параметра показана на рис. 1. Також заслуговують на увагу властивості ентропії заплутаності СФ, відображені на рис. 2. В останньому випадку поведінка явно багатша.

Звернемо увагу знову, що дана робота представляє явні формули для ентропії заплутаності *всередині окремого складеного ферміона* (тобто для між-компонентної заплутаності), див. також вступ. На противагу, в [20, 21] автори дослідили (статистичну) ентропію заплутаності *багатоферміонних систем*, що займають певну область у просторі. Зокрема, в [21] дієві числові методи були застосовані до систем із 37 складених ферміонів, і в кінцевий результат для ентропії заплутаності ввійшов лінійний розмір підсистеми. В той час як результати роботи [20] залежать явно від розмірності області простору, в нашій роботі розглянуто дві чи більше мод незалежно від конкретної розмірності простору.

В ситуації з квазібозонами [7, 8] було природньо, що ентропія заплутаності збільшувалась із зменшенням значень f , тобто з наближенням до істинно бозонної поведінки; як для фоківських станів у фіксованій моді, так і для когерентних. В даному випадку СФ-нів фізичне значення параметра (ів), від яких ентропія заплутаності та “п'юріті” залежать, не є достатньо зрозумілим, і це питання заслуговує подальшого вивчення. Однак, оскільки єдиними параметрами, що впливають на міжкомпонентну заплутаність СФ кутіє θ (2-модовий випадок, див. (23)) або θ_i , $i = \overline{1, 3}$, із ϕ_2 (3-модовий випадок, див. (24)), вони повинні відповідати внутрішнім квантовим числам СФ – таким як спіні, параметр(и) енергії зв'язування СФ тощо.

Зауважимо також, що вищенаведені параметри (як θ) реалізованих станів можуть бути пов'язані з такими (досить несподіваними) параметрами, як відношення мас складових СФ або приведена маса. Це стосується, напр., такого СФ як тріон, скла-

деного з ексітона, змодельованого деформованим бозоном, та електрона або дірки. Це змотивовано, скажімо, рисунком 2 в [27], де енергія зв'язування тріона залежить від приведеної маси електрон-дірочної пари, тоді як ступінь двочастинкової заплутаності, звичайно, пов'язаний із енергією зв'язку складеної частинки. Ми збираємось дослідити таке співвідношення “заплутаність-енергія” та інші застосування деінде.

Дана робота була частково підтримана Національною академією наук України (Проект № 0117U000237).

1. J.K. Jain. *Composite Fermions* (Cambridge Univ. Press, 2007) [ISBN: 978-0-521-86232-5].
2. D. Hadjimichef *et al.* Mapping of composite hadrons into elementary hadrons and effective hadronic hamiltonians. *Ann. Phys.* **268**, 105 (1998).
3. Y. Oh, H. Kim. Pentaquark baryons in the $SU(3)$ quark model. *Phys. Rev. D* **70**, 094022 (2004).
4. T.E. Browder, I.R. Klebanov, D.R. Marlow. Prospects for pentaquark production at meson factories. *Phys. Lett. B* **587**, 62 (2004).
5. A.M. Gavriliuk, I.I. Kachurik, Yu.A. Mishchenko. Quasibosons composed of two q -fermions: realization by deformed oscillators. *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 475303 (2011).
6. A.M. Gavriliuk, I.I. Kachurik, Yu.A. Mishchenko. Two-fermion composite quasibosons and deformed oscillators. *Ukr. J. Phys.* **56**, 948 (2011).
7. A.M. Gavriliuk, Yu.A. Mishchenko. Entanglement in composite bosons realized by deformed oscillators. *Phys. Lett. A* **376** (19), 1596 (2012).
8. A.M. Gavriliuk, Yu.A. Mishchenko. Energy dependence of the entanglement entropy of composite boson (quasiboson) systems. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (14), 145301 (2013).
9. R. Horodecki *et al.* Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
10. M.C. Tichy, F. Mintert, A. Buchleitner. Essential entanglement for atomic and molecular physics. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 192001 (2011).
11. C.K. Law. Quantum entanglement as an interpretation of bosonic character in composite two-particle systems. *Phys. Rev. A* **71**, 034306 (2005).
12. C. Chudzicki, O. Oke, W.K. Wootters. Entanglement and composite bosons. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 070402 (2010).
13. Z. Lasmar *et al.* Assembly of $2N$ entangled fermions into multipartite composite bosons. *Phys. Rev. A* **100**, 032105 (2019).
14. T. Morimae. Vacuum entanglement governs the bosonic character of magnons. *Phys. Rev. A* **81**, 060304 (2010).
15. R. Ramanathan, P. Kurzynski, T.K. Chuan *et al.* Criteria for two distinguishable fermions to form a boson. *Phys. Rev. A* **84**, 034304 (2011).
16. R. Weder. Entanglement creation in low-energy scattering. *Phys. Rev. A* **84**, 062320 (2011).
17. R.O. Esquivel *et al.* Quantum entanglement and the dissociation process of diatomic molecules. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 175101 (2011).
18. P. Kurzynski *et al.* Particle addition and subtraction channels and the behavior of composite particles. *New J. Phys.* **14**, 093047 (2012).
19. T.J. Bartley *et al.* Strategies for enhancing quantum entanglement by local photon subtraction. *Phys. Rev. A* **87**, 022313 (2013).
20. D. Gioev, I. Klich. Entanglement entropy of fermions in any dimension and the widom conjecture. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 100503 (2006).
21. J. Shao, E.-A. Kim, F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi. Entanglement entropy of the $\nu = 1/2$ composite fermion non-fermi liquid state. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 206402 (2015).
22. S. Meljanac, M. Milekovic, S. Pallua. Unified view of deformed single-mode oscillator algebras. *Phys. Lett. B* **328**, 55 (1994).
23. D. McHugh, M. Ziman, V. Bužek. Entanglement, purity, and energy: Two qubits versus two modes. *Phys. Rev. A* **74**, 042303 (2006).
24. F.R. Gantmacher. *The Theory of Matrices* (AMS Chelsea Publishing, 2000), Vol. 1 [ISBN: 0-8218-1376-5].
25. J.B. Bronzan. Parametrization of $SU(3)$. *Phys. Rev. D* **38**, 1994 (1988).
26. A.T. Bolukbasi, T. Dereli. On the $SU(3)$ parametrization of qutrits. *J. Phys.: Conf. Ser.* **36**, 28 (2006).
27. G.G. Spink, P.López Ríos, N.D. Drummond, R.J. Needs. Trion formation in a two-dimensional hole-doped electron gas. *Phys. Rev. B* **94**, 041410 (2016).

Одержано 12.11.19

A.M. Gavriliuk, Yu.A. Mishchenko

COMPOSITE FERMIONS
AS DEFORMED OSCILLATORS:
WAVEFUNCTIONS AND ENTANGLEMENT

S u m m a r y

Composite structure of particles somewhat modifies their statistics, compared to the pure Bose- or Fermi-ones. The spin-statistics theorem, so, is not valid anymore. Say, π -mesons, excitons, Cooper pairs are not ideal bosons, and, likewise, baryons are not pure fermions. In our preceding papers, we studied bipartite *composite boson* (i.e. quasiboson) systems via a realization by deformed oscillators. Therein, the interconstituent entanglement characteristics such as entanglement entropy and purity were found in terms of the parameter of deformation. Herein, we perform an analogous study of composite *Fermi-type* particles, and explore them in two major cases: (i) “boson + fermion” composite fermions (or cofermions, or CFs); (ii) “deformed boson + fermion” CFs. As we show, cofermions in both cases admit only the realization by ordinary fermions. Case (i) is solved explicitly, and admissible wavefunctions are found along with entanglement measures. Case (ii) is treated within few modes both for CFs and constituents. The entanglement entropy and purity of CFs are obtained via the relevant parameters and illustrated graphically.