В.О. ПЕЛИХ, Ю.В. ТАЙСТРА

Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Вул. Наукова, 3-б, Львів 79060; e-mail: pelykh@iapmm.lviv.ua, ythelloworld@gmail.com)

УДК 537.8+517.9

ХВИЛЬОВА ОПТИКА У ПРОСТОРІ КЕРРА З ВРАХУВАННЯМ СПІН-СПІРАЛЬНОЇ ВЗАЄМОДІЇ [1]

Ми застосовуємо алгебраїчно-спеціальний вихідний в сенсі Чандрасекара розв'язок рівнянь Максвелла у просторі Керра, отримуємо вирази хвильових векторів право- та лівополяризованих хвиль і доводимо, що з умови ізотропності як умови рівності нулеві інваріантів поля не випливає ізотропність хвильових векторів, а також, що інтегральна конгруенція хвильового векторного поля не є геодезійною. Ми встановлюємо зв'язок отриманих результатів із умовою Старобінського та Пресса-Тюкольського існування супервипромінювання в просторі-часі Керра.

Ключові слова: однонапрямлене ізотропне поле, спінор Максвелла, простір-час Керра, відокремлення змінних, хвильовий вектор, геодезійні.

1. Вступ

Відкриття чорних дір за спостереженням гравітаційного випромінювання від їх злиття [1], злиття чорних дір та нейтронних зірок [2] та спостереження Телескопом горизонту подій (Event Horizon Telescope) надмасивної чорної діри в центрі еліптичної галактики Messier 87 [3] не тільки підтверджують передбачення загальної теорії відносності, але й доводять ефективність методів, розвинутих для аналізу таких процесів, як аналітичних так і числових. Проте ці спостереження не виключають повністю можливості, що гравітація має неайштайнівську природу, або що шварцшільдівська чорна діра чи безгоризонтний компактний об'єкт імітують чорну діру Керра (ЧДК) [4–6]. Тому не зменшується потреба в подальшому розвитку аналітичних методів для вивчення поведінки пробних фізичних полів в околі ЧДК як джерел інформації про неї, які б дозволили описувати явища у широкому діапазоні зміни координат та параметрів і обійти проблему точності та збіжності апроксимаційних методів, в першу чергу у сильних полях.

Основою для аналітичного опису поведінки електромагнітного поля є рівняння Максвелла, використання яких у ріманових просторах загальної теорії відносності зіштовхується з фундаментальними труднощами. Головною з них є сильна зв'язаність системи рівнянь – у кожному рівнянні системи є похідні від усіх невідомих функцій. Ця трудність відсутня у випадку скалярного поля, що дозволило Старобінському [7] та Прессу і Тюкольському [8] довести існування супервипромінювання у просторі-часі Керра (ПЧК). Тюкольський [9] частково розщепив до окремих рівнянь системи рівнянь для гравітаційного, електромагнітного та нейтринного полів у просторі типу D за Петровим та підтвердив існування супервипромінювання у ПЧК також у випадку електромагнітного поля. У роботах Старобінського [7], Старобінського та Чурілова [10], Тюкольського [9] було використано розклади у ряди за сфероїдальними гармоніками. Цей підхід, детально описаний Тюкольським у роботі [11], як і всі інші, дозволяє отримати наближені розв'язки у вигляді рядів за системою сфероїдальних функцій з коефіцієнтами, що визначаються тричленними рекурентними співвідношеннями. Хоча сучасні чисельні методи і обчислювальні засоби дозволяють отримати розв'язки з довільною точністю, їх використання для передбачення ефектів у всьому діапазоні параметрів джерела (маси та кутового моменту), змінних і констант відокремлення залишається складним. Наближені аналітичні розв'язки можуть бути отримані у високочастотному та низькочастотному діапазонах (див., наприклад, [12] та поси-

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

лання у статті), однак через складність обчислень вони часто містять помилки.

Моделюючи гравітаційне поле матеріальним середовищем та обмежившись якісним аналізом, Мешхун [13] вперше зауважив, що внаслідок взаємодії спіну фотона з гравітаційним полем, фотони з правою круговою поляризацією повинні розсіюватися інакше ніж фотони з лівою круговою поляризацією (ефект Мешхуна).

Ґуаданьніні [18], Барб'єрі та Ґуаданьніні [19] у наближенні геометричної оптики обчислили параметр асиметрії спіральності розсіяних фотонів, пов'язаної з поляризацією світла при гравітаційному відхиленні променів тілом, що обертається. Залежність траєкторій фотонів від їх спіральності з використанням модифікованого підходу геометричної оптики була досліджена Фроловом та Шумом [20]. Передбачення Мешхуном взаємодії спіну фотона з гравітаційним полем підтверджено Асенйо і Хожманом [21], які використовували точний розв'язок для випадку електромагнітних хвиль в метриці Ґеделя та наближений – у випадку простору Керра.

Нашою метою є отримання точного опису поведінки в просторі-часі Керра хвильового вектора електромагнітного поля шляхом аналізу поведінки однонапрямленого ізотропного поля (ОІП), яке є алгебраїчно спеціальним та вихідним за термінологією Чандрасекара. Для цього ми використаємо відповідний аналітичний розв'язок рівнянь Максвелла [14–16]. Стосовно цього розв'язку необхідно зробити два зауваження. По-перше, він є частковим, але це не є перешкодою для опису ним найбільш загальних рис поширення електромагнітного випромінювання, які притаманні кожному розв'язку. По-друге, розв'язок є особливим на осі обертання $\theta = 0$, $\theta = \pi$ (навіть у пласкому просторі). Тим не менше, відомо, що особливість на осі обертання не має інваріантного характеру і розв'язок є фізично змістовним на інтервалі $0 < \theta < \pi$.

Сигнатурою метрики є $(+,-,-,-)$. Рівняння записуємо в геометризованій системі одиниць, де $c = G = 1$, і припускаємо необхідну гладкість всіх функцій, що не обмежує фізичної загальності.

2. Хвильовий вектор ОІП Максвелла в просторі Керра

У роботі [16] ми розглянули електромагнітне поле у просторі Керра, що є частковим випадком алгебраїчно-спеціального поля, оскільки його кратні головні спінори є орієнтованими вздовж одного з кратних головних спінорів Вейля. Якщо кратний головний спінор Вейля є орієнтовним вздовж спінора o_A, спінор Максвелла має вигляд $\varphi_{AB} = \varphi_2 o_A o_B$, і поле Максвела є ОІП, вихідним за Чандрасекаром [22].

У калібруванні Кіннерслі частковий розв'язок рівнянь Максвелла у формі ОІП з частково відокремленими змінними, який є обмеженим за часовою та 2π-періодичним за азимутальною змінною, має вигляд [15, 16]

$$\varphi_{2,m} = C_m \frac{e^{i\omega\eta_1 + im\eta_2 + a\omega\cos\theta + m\ln\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)}}{\sin\theta(r - ia\cos\theta)}, \tag{1}$$

де

$$\eta_1 = t - r - M\ln\Delta - \frac{M^2}{\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right), \tag{2}$$

$$\eta_2 = \phi - \frac{a}{2\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right), \tag{3}$$

t, r, θ, ϕ – координати Бойєра–Ліндквіста, M – параметр маси, a – питомий кутовий момент, $C_m = C_m(\omega) \in \mathbb{C}$ – довільні сталі, $\omega \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ – частота хвилі та азимутальне число відповідно, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $r_+ = M + \sqrt{M^2-a^2}$, $r_- = M - \sqrt{M^2-a^2}$.

Фаза хвилі (1)

$$\Phi = \omega\left(t - r - M\ln\Delta - \frac{M^2}{\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)\right) + m\left(\phi - \frac{a}{2\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)\right) \tag{4}$$

визначає хвильовий 4-вектор з компонентами

$$k_\mu = \left[\omega, -\frac{\omega(r^2+a^2)+am}{\Delta}, 0, m\right] \tag{5}$$

і

$$k^\mu = k_\nu g^{\mu\nu} = \left[\omega\left(1 + \frac{2Mr\left(r^2+a^2+\frac{ma}{\omega}\right)}{\Sigma\Delta}\right), \frac{\omega\left(r^2+a^2\right)+am}{\Sigma}, 0, -\frac{m}{\Delta\sin^2\theta} + \frac{2Mr\left(a\omega\sin^2\theta+m\right)}{\Sigma\Delta\sin^2\theta}\right], \tag{6}$$

та встановлює закон дисперсії. На відміну від розглянутого в [21] випадку ми знаємо динаміку амплітуди і тому отримуємо скалярний квадрат цього вектора явно:

$$k^\mu k_\mu = -\frac{\left(a\omega \sin^2\theta + m\right)^2}{\Sigma \sin^2\theta}. \tag{7}$$

Звідси випливає, що в загальному випадку хвильовий вектор не є ізотропним і стає таким лише на просторовій нескінченості, або при виконанні умови $a\omega\sin^2\theta + m = 0$, або у випадку простору Шварцшильда для фундаментальної моди ($m = 0$). Він не є особливим на горизонті подій та, на відміну від висновків [21], не може бути просторовоподібним.

Конгруенція, до якої векторне поле k_μ є дотичним, взагалі кажучи, не є геодезійною:

$$k^\mu\nabla_\mu k_0 = k^\mu\nabla_\mu k_1 = 0, \tag{8}$$

$$k^\mu\nabla_\mu k_2 = r\frac{\left(a\omega\sin^2\theta + m\right)^2}{\Sigma^2\sin^2\theta}, \tag{9}$$

$$k^\mu\nabla_\mu k_3 = \frac{\cos\theta}{\Sigma^2\sin^3\theta}\times$$
$$\times\Big(\left(m^2 - a^2\omega^2\sin^4\theta\right)\left(r^2+a^2\right) -$$
$$- 2a^2 m\sin^2\theta\left(a\omega\sin^2\theta + m\right)\Big). \tag{10}$$

При $a \to 0$

$$k^\mu\nabla_\mu k_0 = k^\mu\nabla_\mu k_1 = 0, \tag{11}$$

$$k^\mu\nabla_\mu k_2 = \frac{m^2}{r^3\sin^2\theta}, \tag{12}$$

$$k^\mu\nabla_\mu k_3 = \frac{m^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}. \tag{13}$$

Для порівняння наших результатів з результатами Старобінського та Тюкольського перейдемо до нової радіальної змінної – "черепашачої" координати r^*, яка усуває особливість на горизонті

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{r^2+a^2}{\Delta}. \tag{14}$$

Тоді тензор Максвелла та тензор енергії-імпульсу, які відповідають однонапрямленому ізотропному розв'язку, набувають вигляду

$$F_{ab} = \sqrt{2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 0 & -\frac{aP}{r^2+a^2} & -\frac{1}{\sin\theta}Q & P \\ \frac{aP}{r^2+a^2} & 0 & \frac{\Sigma Q}{(r^2+a^2)\sin\theta} & -P \\ \frac{1}{\sin\theta}Q & -\frac{\Sigma Q}{(r^2+a^2)\sin\theta} & 0 & -a\sin\theta Q \\ -P & P & a\sin\theta Q & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$T_{ab} = \frac{|\varphi_2|^2}{2\pi}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Sigma}{r^2+a^2} & 0 & -a\sin^2\theta \\ -\frac{\Sigma}{r^2+a^2} & \frac{\Sigma^2}{(r^2+a^2)^2} & 0 & \frac{a\sin^2\theta\Sigma}{r^2+a^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a\sin^2\theta & \frac{a\sin^2\theta\Sigma}{r^2+a^2} & 0 & a^2\sin^4\theta \end{pmatrix}, \tag{16}$$

де

$$P = \left(c_1\sin(\omega\eta_1 + m\eta_2) + c_2\cos(\omega\eta_1 + m\eta_2)\right)\times$$
$$\times e^{-a\omega\cos\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^m, \tag{17}$$

$$Q = \left(c_1\cos(\omega\eta_1 + m\eta_2) - c_2\sin(\omega\eta_1 + m\eta_2)\right)\times$$
$$\times e^{-a\omega\cos\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^m, \tag{18}$$

і стають регулярними на горизонті r_+.

k_{r^*} компонента хвильового вектора (5) стає

$$k_{r^*} = \frac{d\Phi}{dr^*} = -\omega - \frac{d}{dr^*}\left(\frac{ma}{2\sqrt{M^2-a^2}}\ln\frac{r-r_+}{r-r_-}\right) =$$
$$= -\omega - \frac{ma}{r^2+a^2}, \tag{19}$$

і ми отримуємо радіальні компоненти групової та фазової швидкості у вигляді [2]

$$v_{\rm gr} = -\frac{dk}{d\omega} = -1, \tag{20}$$

$$v_{\rm ph} = -\frac{k}{\omega} = -1 + \frac{am}{\omega\left(r^2+a^2\right)} = -1 + m\frac{\Omega(r)}{\omega}. \tag{21}$$

Формула (21) точно визначає критичні точки (поверхні) хвиль, що виходять від ЧДК – точки, де фазова швидкість $v_{\rm ph}$ змінює свій знак (див. також [15, 17])

$$r_{\rm cr} = \sqrt{\frac{am}{\omega} - a^2}, \tag{22}$$

[2] З цього місця ми змінимо знак перед ω, щоб порівняти з результатами Старобінського та Тюкольського.

в порівнянні з Старобінським [7] і Тюкольським ((5.11) в [9]), де таке співвідношення отримано лише в околі горизонту ($r \to r_+$)

$$r_{\rm cr} = r_+ = \sqrt{\frac{am}{\omega} - a^2}. \qquad (23)$$

Очевидно, що

$$\Omega(r_+) = \frac{a}{\left(r_+^2 + a^2\right)} \qquad (24)$$

є кутовою швидкістю ЧДК, яка означена як кутова швидкість горизонту подій. Звідси випливає, що умова зміни характеру хвилі із вхідного на вихідний у довільній точці має такий самий вигляд, як і на горизонті.

Групова швидкість вихідної однонапрямленої хвилі є завжди швидкістю світла (у вакуумі), але фазова швидкість є меншою за швидкість світла для частот, для яких виконується умова

$$\omega < \frac{am}{\left(r^2 + a^2\right)}, \qquad (25)$$

і має протилежний до групової швидкості напрямок. Фазова швидкість стає орієнтованою в тому ж напрямку, що й групова швидкість та прямує до швидкості світла при $\omega \to \infty$ або $r \to \infty$. Як видно з формули (21), правильної у всьому діапазоні частот, фазова швидкість залежить від знаку ω, який визначає поляризацію хвилі, що є проявом спін-спіральної взаємодії.

3. Висновки

Відомо, що концепція групової та фазової швидкостей поширення хвиль є найбільш змістовною у випадках, коли середовище або простір допускають існування пласких хвиль. Ця умова, взагалі кажучи, не виконується у ріманових просторах загальної теорії відносності. Використання спінорного представлення рівнянь Максвелла та отриманого нами алгебраїчно-спеціального розв'язку в ПЧК дозволяє отримати висновки, що у цьому просторі-часі

1. з умови, що поле Максвелла є ізотропним

$$F_{ab}F^{ab} = 0, \varepsilon_{abcd}F^{ab}F^{cd} = 0 \qquad (26)$$

не випливає, що його хвильовий вектор є ізотропним;

2. вплив гравітаційного поля маси, що обертається, на поле Максвелла проявляється у частотній дисперсії хвильового вектора за законом, визначеним формулою (5);

3. групова та фазова швидкості електромагнітної хвилі можуть бути протилежно орієнтованими в залежності від співвідношення між характеристиками гравітаційного та електромагнітного полів відповідно до формул (20)–(21).

Хоча теорема Маріота–Робінсона гарантує, що якщо електромагнітне поле є ізотропним, то кратні головні ізотропні напрямки генерують геодезійну безсувну ізотропну конгруенцію, проте, відомо, що рух частинок зі спіном в гравітаційному полі описується рівняннями Матісона–Папапетру, розв'язки яких не є геодезійними. Більше того, у випадку ультрарелятивістського руху частинок відхилення траєкторій від геодезійних стає значним [23], [24]. Тому геодезійні, існування яких передбачено теоремою Маріота–Робінсона, не можуть бути асоційовані з хвильовими фронтами електромагнітних хвиль, і опис руху електромагнітної хвилі в термінах хвильового вектора є більш сумісним з фізичним передбаченням, навіть якщо фаза не є білінійною функцією компонент хвильового вектора та координат, як є в випадку нашого розв'язку. Напрямок і абсолютна величина групової та фазової швидкостей визначаються співвідношеннями (20)–(21), які узагальнюють подібні співвідношення Старобінського та Тюкольського, є точними та виконуються у всьому просторі, а не лише поблизу горизонту подій.

Ця робота виконана за підтримки бюджетної програми „Підтримка розвитку пріоритетних наукових напрямків“ (6451230) та Наукової космічної програми Національної академії наук України.

1. B.P. Abbott *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 6 (2016).
2. https://gcn.gsfc.nasa.gov/gcn3/25333.gcn3.
3. K. Akiyama *et al.* First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole. *Astrophys. J.* **875**, (2019).
4. R. Konoplya, L. Rezzolla, A. Zhidenko. General parametrization of axisymmetric black holes in metric theories of gravity. *Phys. Rev. D* **93**, 064015 (2016).
5. J. Abedi, H. Dykaar, N. Afshordi. Echoes from the Abyss: Tentative evidence for Planck-scale structure at black hole horizons. *Phys. Rev. D* **96**, 082004 (2017).

6. A. Mitra, C. Corda, H.J. Mosquera Cuesta. How to distinguish an actual astrophysical magnetized black hole mimicker from a true (theoretical) black hole. http://arxiv.org/abs/1908.06815v1.
7. A. Starobinskii. Amplification of waves during reflection from a rotating "black hole". *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **64**, 48 (1973).
8. W.H. Press, S.A. Teukolsky. Floating orbits, superradiant scattering and the black-hole bomb. *Nature* **238**, 211 (1972).
9. S. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *The Astrophysical Journal* **185**, 635 (1973).
10. A. Starobinsky, S. Churilov. Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating black hole. *Sov. Phys. – JETP* **38**, 1 (1974).
11. S. Teukolsky. The Kerr metric. *Astrophys. J.* **32**, 124006 (2015).
12. M. Casals, A. C. Ottewill, N. Warburton. High-order asymptotics for the spin-weighted spheroidal equation at large real frequency. arXiv:1810.00432v1 [gr-qc].
13. B. Mashhoon. Scattering of electromagnetic radiation from a black hole. *Phys. Rev. D* **7**, 2807 (1973).
14. V. Pelykh, Y. Taistra. A class of general solutions of the Maxwell equations in the Kerr space-time. *J. Math. Sci.* **229**, No. 2, 162 (2018).
15. V. Pelykh, Y. Taistra. Solution with separable variables for null one-way Maxwell field in Kerr space-time. *Acta Phys. Polon. Supp.* **10**, 387 (2017).
16. V. Pelykh, Y. Taistra. Null one-way fields in the Kerr spacetime. *Ukr. J. Phys.* **62**, No. 11, 1007 (2017).
17. V. Pelykh, Y. Taistra. On the null one-way solution to Maxwell equations in the Kerr space-time. *Math. Model. Comput.* **5**, No. 2, 201 (2018).
18. E. Guadagnini. Gravitational deflection of light and helicity asymmetry. *Phys. Lett. B* **548**, Iss. 1–2, 19 (2002).
19. A. Barbieri, E. Guadagnini. Gravitational optical activity. *Nucl. Phys.* **703**, Iss. 1, 391 (2004).
20. V. Frolov, A. Shoom. Scattering of circularly polarized light by a rotating black hole. *Phys. Rev. D* **86**, Iss. 2, 024010 (2012).
21. F. Asenjo, S. Hojman. Do electromagnetic waves always propagate along null geodesics? *Class. and Quant. Gravity* **34**, No. 20, 205011 (2017).
22. S. Chandrasekhar. On algebraically special perturbations of black holes. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392**, 1 (1984).
23. R. Plyatsko. *Manifestations of Gravitational Ultrarelativistic Spin-Orbit Interaction* (Naukova Dumka, 1988) (in Ukrainian).
24. R. Plyatsko, M. Fenyk. Highly relativistic circular orbits of spinning particle in the Kerr field. *Phys. Rev. D* **87**, No. 4, 044019 (2013).

Одержано 31.08.19

V.O. Pelykh, Y.V. Taistra

WAVE OPTICS IN THE KERR
SPACE-TIME TAKING THE SPIN-HELICITY
INTERACTION INTO ACCOUNT

Р е з ю м е

We apply an algebraically special solution of the Maxwell equations in the Kerr space-time, which we specify as outgoing in the Chandrasekhar meaning, to obtain the wave vectors of right- and left-polarized waves and prove that the nullity condition of field invariants yield the non-nullity of wave vectors and that the wave vector is not geodesic. We also show how these are related to the analysis of radiation in the Kerr space-time, provided by Starobinskii and Teukolsky.