А. ДУВІРЯК, Ю. ЯРЕМКО

Інститут фізики конденсованих систем НАН України
(Вул. Свєнціцького, 1, Львів 79011; e-mail: duviryak@icmp.lviv.ua)

УДК 531-9; 539

ДІЯ НА ВІДСТАНІ ТА РЕАКЦІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТОЧКОВИХ ЧАСТИНОК У ПРОСТОРІ ДЕ СІТТЕРА[1]

Двочастинкова система з часо-асиметричною спізнено-випередною взаємодією, відома як модель Старушкевича–Рудда–Гілла, розглядається у часопросторі де Сіттера. Запропоновано явно коваріантні описи моделі в рамках лаґранжевого та гамільтонового формалізмів з в'язями. Показано, що модель є де-сіттер-інваріантною та інтеґровною. Отримано явний розв'язок рівнянь руху. За допомогою коваріантної електромагнітної функції Ґріна отримано рівняння руху точкового заряду в зовнішньому електромагнетному полі, де врахована реакція випромінювання.

Ключові слова: модель Старушкевича–Рудда–Гілла, простір де Сіттера, сила електромагнетної самодії.

1. Модель, запропонована Старушкевичем [1, 2], Руддом і Гіллом [3], описує таку часо-асиметричну взаємодію двох релятивіських точкових заряджених частинок: випередне поле першої частинки діє на другу частинку, спізнене поле другої частинки діє на першу, а реакцією випромінювання знехтувано. Цю модель виведено з часо-нелокального функціоналу дії Тетроде–Фоккера [4, 5], в якому підінтеґральну симетричну функцію Ґріна рівняння Даламбера замінено на спізнену (чи випередну). У такий спосіб модель переформульовано в лаґранжеву, а тоді у гамільтонову форму, що виявляється інтеґровною [6] завдяки її точній пуанкаре-інваріантности. Модель Старушкевича–Рудда–Гілла було узагальнено для різних взаємодій (скалярної, ґравітаційної, утримної тощо) [7, 8], а відповідні квантові версії [9, 10] виявили їх фізичну змістовність, попри неприродність часо-асиметричних взаємодій.

Тут модель Старушкевича–Рудда–Гілла розглянуто у часопросторі де Сіттера. З допомогою представлення часопростору де Сіттера як гіперболоїда в 5-вимірному просторі Мінковського $\mathbb{M}_5$ ми будуємо частинкову динаміку з в'язями та гамільтонів опис. Він є інваріантним щодо групи де Сіттера SO(1,4) та інтеґровним. Для цієї динаміки побудовано формальний розв'язок.

2. Варіаційний функціонал Тетроде–Фоккера [4, 5], що є основою електродинаміки Вілера–Феймана в рамках теорії дії на відстані, було узагальнено на випадок кривого часопростору Гойлом і Нарлікаром [11] та іншими [12]. Для системи двох заряджених частинок з масами m_a та зарядами e_a ($a = 1{,}2$) він має вигляд:

$$I = I_{\text{free}} + I_{\text{int}}, \quad \text{де} \quad I_{\text{free}} = -\sum_{a=1}^{2} m_a \int \mathrm{d}s_a\,, \tag{1}$$

$$I_{\text{int}} = -4\pi e_1 e_2 \iint \mathrm{d}x_1^\mu\, \mathrm{d}x_2^\nu\, G_{\mu\nu}(x_1, x_2), \tag{2}$$

де $x_a^\mu(\tau_a)$ ($\mu = 0, ..., 3$) – часопросторові координати світових ліній частинок, параметризованих параметром еволюції τ_a ($a = 1, 2$). Мірами $\mathrm{d}s_a$ у вільно-частинкових членах I_{free} дії (1) є елементарні інтервали вздовж світових ліній частинок. Підінтеґральним виразом у члені взаємодії (2) є симетрична функція Ґріна $G_{\mu\nu'}(x, x')$ рівняння Даламбера.

3. Часопростір де Сіттера можна представити як 4-вимірний гіперболоїд $\mathbb{H}$ [13, 14]

$$y^2 \equiv y \cdot y \equiv \eta_{MN} y^M y^N = -R^2$$

у 5-вимірному просторі Мінковського $\mathbb{M}_5$ з координатами y^M ($M = 0, 1, ..., 4$) та метрикою $||\eta_{MN}|| = \mathrm{diag}(+, -, ..., -)$. Стала R визначає скалярну

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

кривину $\mathcal{R}$ простору де Сіттера, вона пов'язана з космологічною сталою Λ: $\mathcal{R} = -12/R^2 = 4\Lambda$ (швидкість світла $c = 1$).

Гіперболоїд $\mathbb{H}$ є інваріантний щодо групи де Сіттера SO(1,4), представленої в $\mathbb{M}_5$ стандартними псевдо-ортогональними перетвореннями. Метрика на $\mathbb{H}$ індукується метрикою в $\mathbb{M}_5$: $\mathrm{d}s^2 = \eta_{MN}\mathrm{d}y^M\,\mathrm{d}y^N\,\big|_{\mathbb{H}}$. Тому конфігураційним простором двочастинкової системи є $\mathbb{H}^2$. Його можна параметризувати або незалежними змінними $x_a^\mu(\tau_a)$, або 5-вимірними змінними $y_a^M(\tau_a)$ $(M = 0, 1, ..., 4)$, обмеженими на гіперболоїд (для кожної частинки $a = 1{,}2$).

Для часопростору де Сіттера симетрична функція Ґріна є відомою з роботи [15] [2]:

$$G_{\mu\nu'}(x, x') = G^\delta_{\mu\nu'}(x, x') + G^\theta_{\mu\nu'}(x, x') \tag{3}$$

де

$$G^\delta_{\mu\nu'}(x, x') = \frac{1}{16\pi}\bar{g}_{\mu\nu'}(x, x')\delta(\rho),$$

$$G^\theta_{\mu\nu'}(x, x') = \frac{1}{12\pi}\left\{\partial_\mu\partial_{\nu'}\left(\ln Z - \frac{1}{2Z}\right)\right\}\Theta(\rho);$$

$$\bar{g}_{\mu\nu'}(x, x') = -2R^2\left\{\partial_\mu\partial_{\nu'}Z - \frac{(\partial_\mu Z)(\partial_{\nu'}Z)}{Z}\right\},$$

$$Z(x, x') = 1 + \frac{1}{4}\rho(x, x')/R^2,$$

$$\rho \equiv (y - y')^2 = 2R^2\left(\cosh\frac{s}{R} - 1\right) > 0,$$

і де s є інтервалом між точками y і y' вздовж часоподібної геодезичної (для просторово-подібної геодезичної s уявна, $\cosh(s/R) = \cos|s/R|$, та $\rho < 0$).

4. За прикладом Старушкевича [1], Рудда і Гілла [3] замінимо в (2) симетричну функцію Ґріна на:

$$G^{(\eta)}_{\mu\nu}(x_1, x_2) = 2\Theta[\eta(x_1^0 - x_2^0)]G_{\mu\nu}(x_1, x_2), \tag{4}$$

що є спізненою (для $\eta = +1$) або випередною ($\eta = -1$) функцією Ґріна.

Зауважимо, що функція Ґріна $G_{\mu\nu'}$ містить дві частини: локальну $G^\delta_{\mu\nu'}(x, x')$ з носієм на поверхні світлового конусу $\rho = 0$ та нелокальну $G^\theta_{\mu\nu'}(x, x')$ з носієм всередині світлового конусу $\rho > 0$. Те ж стосується і $G^{(\eta)}_{\mu\nu}$. Це є загальна риса кривого часопростору, на відміну від простору Мінковського, де функція Ґріна безмасового поля має лише локальну частину. Але у випадку простору де Сіттера внесок функції Ґріна $G_{\mu\nu}$ або $G^{(\eta)}_{\mu\nu}$ в інтеґрал (1) можна ефективно звести лише до локального внеску шляхом інтеґрування за частинами:

$$I_{\rm int} = -4\pi e_1 e_2 \iint \mathrm{d}x_1^\mu\,\mathrm{d}x_2^\nu\, G^{(\eta)}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \simeq$$
$$\simeq -e_1 e_2 \iint \mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\; 2\Theta(\eta y^0)\,\dot{y}_1\cdot\dot{y}_2\,\delta(y^2)|_{\mathrm{T}\mathbb{H}^2}, \tag{5}$$

де $\dot{y}_a \equiv \mathrm{d}y_a\,/\mathrm{d}\tau_a$ $(a = 1, 2)$ – 5-вектори швидкостей частинок, $y \equiv y_1 - y_2$ є 5-вектор їх відносного розташування, а символ "$\simeq$" позначає рівність з точністю до позаінтеґральних членів, які не дають внеску у варіаційну задачу.

Підінтеґральний вираз у правій частині (5) обмежено на $\mathrm{T}\mathbb{H}^2$ – дотичну в'язку над конфігураційним простором $\mathbb{H}^2$.

5. У цьому місці інтеґрал (5) можна один раз проінтеґрувати, подібно до випадку моделі Старушкевича–Рудда–Гілла у пласкому часопросторі [2]. Як наслідок, дія (1), (5) зводиться до одночасової лаґранжевої дії, представленої тут у явноковаріантній 5-вимірній формі:

$$I = \int \mathrm{d}\tau\;\left\{L + \lambda_0 y^2 + \sum_{a=1}^{2}\lambda_a(y_a^2 + R^2)\right\}. \tag{6}$$

Лаґранжіан, означений на $\mathrm{T}\mathbb{M}_5^2$, є такий:

$$L \;\equiv\; -\sum_{a=1}^{2} m_a\sqrt{\dot{y}_a^2} \;-\; e_1 e_2\frac{\dot{y}_1\cdot\dot{y}_2}{|\dot{Y}\cdot y|}, \tag{7}$$

де $Y \equiv \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, а лаґранжеві множники λ_a і λ_0 враховують голономні в'язі: гіперболоїдні

$$y_a^2 + R^2 = 0, \quad a = 1, 2, \tag{8}$$

та в'язь світлового конусу, породжену δ-функцією у правій частині (5):

$$y^2 \equiv (y_1 - y_2)^2 = 0, \quad \eta y^0 \equiv \eta(y_1^0 - y_2^0) > 0. \tag{9}$$

Ці в'язі визначають 7D конфігураційний простір системи $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{M}_5^2$.

6. де Сіттер-інваріантність лаґранжіану (7) та в'язей (8), (9) породжує 10 нетериних інтеґралів руху, зібраних у тензорі моменту імпульсу:

$$J_{MN} = \sum_{a=1}^{2}(y_{aM}\pi_{aN} - y_{aN}\pi_{aM}) =$$

[2] Раніша пропозиція [16] видається хибною, оскільки не відповідає вимогам де-сіттер-інваріантности.

$$= Y_M \Pi_N - Y_N \Pi_M + y_M \pi_N - y_N \pi_M, \qquad (10)$$

де

$$\pi_{aM} = \partial L / \partial \dot{y}_a^M \quad (a = 1, 2), \qquad (11)$$

$$\Pi_M = \pi_{1M} + \pi_{2M}, \quad \pi_M = \frac{1}{2}(\pi_{1M} - \pi_{2M}).$$

Крім цього, лаґранжіан (7) є інваріантним щодо довільної заміни параметру еволюції: $\tau \to \tau' = f(\tau)$. Тому перетворення Лежандра (11) у 20-вимірний фазовий простір $\mathrm{T}^*\mathbb{M}_5^2$, оснащений стандартними дужками Пуасона $\{y_a^M, \pi_{aN}\} = \delta_{ab}\delta_N^M$,..., є вироджене, і приводить до явноковаріантного гамільтонового опису зв'язями [17].

10 нетериних інтеґралів руху (10) стають в гамільтоновому описі ґенераторами канонічної реалізації групи де Сіттера, тобто вони задовольняють канонічні співвідношення алгебри SO(1,4):

$$\{J_{MN}, J_{LK}\} = \eta_{ML} J_{NK} + \eta_{NL} J_{ML} -$$
$$- \eta_{MK} J_{NL} - \eta_{NL} J_{MK}.$$

В силу параметричної інваріантності лаґранжіану (7) канонічний гамільтоніан дорівнює нулю, тоді як динаміка системи ґенерується *динамічною* в'яззю $\Phi(y_a, \pi_b) = 0$, яка становить разом з голономними в'язями (8), (9) систему первинних в'язей. Вигляд *динамічної* в'язі (тобто функції $\Phi(y_a, \pi_b)$) визначається лаґранжіаном (7), але не однозначно. Можна сконструювати в'язь $\Phi(y_a, \pi_b)$ 1-го класу щодо голономних в'язей (8), (9), тоді динаміка буде самоузгодженою і вторинні в'язі не виникнуть. Для цього функція $\Phi(y_a, \pi_b)$ повинна задовольняти умови: $\{\Phi, y_a^2\} = \{\Phi, y^2\} = 0$, з яких випливає, що Φ є функцією таких 4-х 5-скалярних аргументів: $\Pi \cdot y$, $\pi \cdot y$, $J^2 \equiv J_{MN}J^{MN}$ та $V^2 \equiv V_M V^M$, де $V_M \equiv \frac{1}{8}\epsilon_{MABCD}J^{AB}J^{CD}$. Аргументи J^2 і V^2 є функціями Казимира групи SO(1,4), тобто збережними величинами, від'ємними для фізично змістовних систем.

Для лаґранжіану (7) динамічна в'язь є така:

$$\Phi = \pi_\perp^2 + \tfrac{1}{4}\Pi_\perp^2 - \frac{m_1^2 \pi_2 \cdot y + m_2^2 \pi_1 \cdot y}{\Pi \cdot y} -$$
$$- \alpha \frac{\Pi_\perp^2 - m_1^2 - m_2^2}{\eta \Pi \cdot y} + \alpha^2 \left(\frac{m_1^2}{\eta \pi_1 \cdot y - \alpha} + \frac{m_2^2}{\eta \pi_2 \cdot y - \alpha} \right) +$$
$$+ \frac{1}{4R^2} \left(\frac{(\pi_1 \cdot y)(\pi_2 \cdot y)}{\eta \Pi \cdot y} - \alpha \right) (\eta \Pi \cdot y - 4\alpha) = 0, \qquad (12)$$

де

$$\alpha = e_1 e_2, \quad \Pi_\perp^2 = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2}J^2 + (\pi \cdot y)^2\right)$$

і

$$\pi_\perp^2 = -\frac{1}{R^2(\Pi \cdot y)^2}\left(V^2 - \frac{1}{2}(\pi \cdot y)^2 J^2 - (\pi \cdot y)^4\right).$$

7. Щоб довести інтеґровність системи, що розглядається, почнімо з рівняння Гамільтона для 5-вектора відносного розташування y:

$$\dot{y} = \lambda \left\{ y, \Phi(\Pi \cdot y,\, \pi \cdot y;\, J^2, V^2) \right\} =$$
$$= \lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial\, \pi \cdot y} - 4 \frac{\partial \Phi}{\partial J^2} \mathcal{J} - \frac{\partial \Phi}{\partial V^2} \mathcal{K} \right) y; \qquad (13)$$

тут $\mathcal{J} = ||J^M{}_N||$ і $\mathcal{K} = ||K^M{}_N|| \equiv ||\epsilon^M{}_{NABC} V^A J^{BC}||$ – збережні матриці, а лаґранжевий множник $\lambda(\tau)$ є довільною функцією, що фіксує калібрування.

Якщо $\Pi \cdot y = \Psi(\tau)$ була б відома як функція τ, то $\pi \cdot y = \psi(\tau) \equiv \psi(\Psi(\tau); J^2, V^2)$ також була б відома з динамічної в'язі $\Phi(\Psi(\tau), \psi(\tau); J^2, V^2) = 0$ (оскільки J^2, V^2 є збережними).

У свою чергу, рівняння Гамільтона для $\Pi \cdot y = \Psi(\tau)$ є самодостатнім і зводиться до квадратур:

$$\dot{\Psi} = \lambda\{\Psi, \Phi\} = \lambda \frac{\partial \Phi(\Psi, \psi_{(\Psi; J^2, V^2)}; J^2, V^2)}{\partial \psi} \Psi,$$

де лаґранжевий множник $\lambda(\tau)$ вважаємо вже фіксованою функцією τ.

8. Тепер рівняння (13) стає лінійним щодо 5-вектора y з відомими τ-залежними матричними коефіцієнтами. Щоб розділити і розв'язати це рівняння, застосуємо техніку проєкційних операторів.

Згідно з теоремою Гамільтона–Келі, матриця $\mathcal{J}$ має 5 власних значень: $\pm\Sigma$, $\pm\,\mathrm{i}\,S$ і 0, де $\Sigma^2 = \sqrt{J^4/16 - V^2} - \frac{1}{4}J^2 > 0$ і $S^2 = \sqrt{J^4/16 - V^2} + \frac{1}{4}J^2 > 0$. Відповідно, можна побудувати 5 проєкційних операторів: $\mathcal{P}^{(\pm\Sigma)}$, $\mathcal{P}^{(\pm\,\mathrm{i}S)}$ і $\mathcal{P}^{(0)}$ [18], явний вигляд яких тут упускаємо.

Далі, здійснимо підставлення: $y(\tau) = \frac{\Psi(\tau)}{\Psi(0)}\, r(\tau)$, розкладемо r за власними підпросторами:

$$r^{(\Sigma)} = (\mathcal{P}^{(+\Sigma)} + \mathcal{P}^{(-\Sigma)})r,$$
$$r^{(S)} = (\mathcal{P}^{(+\,\mathrm{i}\,S)} + \mathcal{P}^{(-\,\mathrm{i}\,S)})r, \quad r^{(0)} = \mathcal{P}^{(0)}r$$

і таким чином отримаємо лінійні рівняння руху для проєкцій $r^{(\Sigma)}$, $r^{(S)}$ та $r^{(0)}$:

$$\dot{r}^{(i)}(\tau) = f^{(i)}(\tau)\, \mathcal{J}\, r^{(i)}(\tau), \quad i = \Sigma, S, 0,$$

де

$$f^{(0)}(\tau) = 0,$$

$$f^{(\Sigma)}(\tau) = -\lambda\left(4\frac{\partial\Phi}{\partial J^2} + 2S^2\frac{\partial\Phi}{\partial V^2}\right),$$

$$f^{(S)}(\tau) = -\lambda\left(4\frac{\partial\Phi}{\partial J^2} - 2\Sigma^2\frac{\partial\Phi}{\partial V^2}\right).$$

Формальний розв'язок цих рівнянь такий:

$$r^{(i)}(\tau) = \exp\{F^{(i)}(\tau)\mathcal{J}\}y^{(i)}(0),$$

де $F^{(i)}(\tau) = \int\limits_0^\tau \mathrm{d}\tau\, f^{(i)}(\tau)$. Розплутування матричних експонент дає:

$$r^{(\Sigma)}(\tau) = \left(\cosh\left(\Sigma F^{(\Sigma)}(\tau)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathcal{J}}{\Sigma}\sinh\left(\Sigma F^{(\Sigma)}(\tau)\right)\right)y^{(\Sigma)}(0),$$

$$r^{(S)}(\tau) = \left(\cos\left(SF^{(S)}(\tau)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathcal{J}}{S}\sin\left(SF^{(S)}(\tau)\right)\right)y^{(S)}(0),$$

$$r^{(0)}(\tau) = y^{(0)}(0).$$

Таким чином, отримуємо остаточний розв'язок:

$$y_a^{(i)}(\tau) = Y^{(i)}(\tau) - \frac{1}{2}(-)^a\, y^{(i)}(\tau) =$$

$$= \frac{\mathcal{J} - \psi(\tau) - \frac{1}{2}(-)^a\,\Psi(\tau)}{\Psi(0)}\, r^{(i)}(\tau),$$

де $a = 1{,}2$ та $i = \Sigma, S, 0$.

Нарешті, з допомогою перетворення Лежандра (11) сталі $\Psi(0)$ і $\mathcal{J}$ (10) можна виразити в термінах початкових 5-векторів $y_a(0)$ та $\dot{y}_a(0)$ (a=1,2). Якщо $\{y_a(0), \dot{y}_a(0)\} \in \mathrm{T}\mathbb{K}$, то $\{y_a(\tau), \dot{y}_a(\tau)\} \in \mathrm{T}\mathbb{K}$; зокрема, $y_a(\tau) \in \mathbb{K}$ за побудовою.

9. Згідно з роботами [15, 19], електромагнетний потенціал точкового заряду q у просторі де Сіттера є такий:

$$A_\mu(x) = q\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\sqrt{-g[z(\tau)]}G_{\mu\nu'}(x, z(\tau))u^{\nu'}(\tau), \quad (14)$$

де $G_{\mu\nu'}$ є однією з функцій Ґріна (3), (4); 4 функції $z^{\nu'}(\tau)$ параметризують світову лінію заряду q, а $u^{\nu'}(\tau) = \mathrm{d}z^{\nu'}(\tau)/\mathrm{d}\tau$. Щоб отримати електромагнетне поле $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta(x) - \partial_\beta A_\alpha(x)$ використовуємо 4-вимірні стереографічні координати [20]

$$y^\alpha = \Omega(x)x^\alpha, \quad y^4 = -R\Omega(x)\left(1 + \frac{\sigma^2}{4R^2}\right), \quad (15)$$

де $\Omega(x) = \left(1 - \frac{1}{4R^2}\sigma^2\right)^{-1}$ та $\sigma^2 = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$. Стандартні детальні обчислення дають таке електромагнетне поле $F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha A^{\mathrm{ret}}_\beta(x) - \partial_\beta A^{\mathrm{ret}}_\alpha(x)$

$$F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}(x) = \frac{q}{4\pi}\left\{\Omega^2[z(\tau)]\frac{u_\alpha k_\beta - u_\beta k_\alpha}{r^2} + \Omega^4[z(\tau)]\times\right.$$

$$\times\frac{a_\alpha k_\beta - a_\beta k_\alpha - a_k\left(u_\alpha k_\beta - u_\beta k_\alpha\right)}{r} -$$

$$- \frac{2}{R^2}\Omega^5[z(\tau)](z\cdot u)\left[\frac{k_\alpha u_\beta - k_\beta u_\alpha}{r} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2R^2}\Omega(x)\left(k_\alpha z_\beta - k_\beta z_\alpha\right)\right]\right\}, \quad (16)$$

де всі члени у правій частині беруться у спізнений момент $\tau^{\mathrm{ret}}(x)$. Тут $k_\alpha = [x^\alpha - z^\alpha(\tau^{\mathrm{ret}})]/r$, а скаляр r є спізненою відстанню $r = \eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - z^\alpha(\tau^{\mathrm{ret}}))\times\times u^\beta(\tau^{\mathrm{ret}})$; $a_k = (a\cdot k)$ і $\dot{a}_k = (\dot{a}\cdot k)$.

Припускаємо [21], що радіаційна частина електромагнетного поля дається виразом

$$F^{\mathrm{rr}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta} - F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\beta}\right), \quad (17)$$

де 1-й член є спізненим полем, а 2-й – випередним. Випередне поле задається функцією Ґріна (4) з носієм на майбутньому світловому конусі точки x. Ми розкладаємо кінематичні змінні у тензорі випередного поля в ряд за параметром $\triangle\tau(r) = \tau^{\mathrm{adv}}(x) - \tau^{\mathrm{ret}}(x)$:

$$\triangle\tau = 2\Omega^2(z)r + 2\Omega^4(z)\left[a_k + \frac{1}{R^2}\Omega(z)(z\cdot u)\right]r^2 +$$

$$+ \frac{2}{3}\Omega^5(z)\left\{\Omega(z)\left(3a_k^2 + 2\dot{a}_k\right) + \Omega^3(z)a^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{R^2}\left[\Omega^2(z)\left(2(z\cdot a) + 9(z\cdot u)a_k\right) + 2\right] +$$

$$\left. + \frac{5}{R^4}\Omega^3(z)(z\cdot u)^2\right\}r^3. \quad (18)$$

Аналог рівняння Лоренца–Абрагама–Дірака у часопросторі де Сіттера є такий:

$$m\left\{a^\mu + \frac{1}{2R^2}\Omega(z)\left[2(z\cdot u)u^\mu - \Omega^{-2}(z)z^\mu\right]\right\} =$$

$$= q\Omega^{-2}(z)\eta^{\mu\alpha}(F^{\text{ext}}_{\alpha\beta} + F^{\text{rr}}_{\alpha\beta})u^{\beta}, \qquad (19)$$

де $F^{\text{ext}}_{\alpha\beta}$ – зовнішнє поле. Поле реакції випромінювання (17) отримуємо перейшовши до границі $r \to 0$:

$$F^{\text{rr}}_{\alpha\beta}[z(\tau)] = \frac{2q}{3}\Omega^8[z(\tau)]\,(u_\alpha \dot{a}_\beta - u_\beta \dot{a}_\alpha) + $$
$$+ \frac{3q}{R^2}\Omega^9[z(\tau)]\,(z\cdot u)\,(u_\alpha a_\beta - u_\beta a_\alpha) - $$
$$- \frac{q}{R^4}\Omega^8[z(\tau)]\,(z\cdot u)\,(u_\alpha z_\beta - u_\beta z_\alpha). \qquad (20)$$

де кінематичні характеристики обчислюються в момент τ, що визначає точку $z(\tau)$ на світовій лінії.

10. Електромагнетне поле у кривому часопросторі поширюється не тільки вздовж поверхні світлового конуса, як у пласкому часопросторі, а ще й проникає у його середину. Тому загалом радіаційна самодія та взаємодія між зарядженими частинками є нелокальними, тобто вони залежать від цілої передісторії частинок [19].

Ми показали, що у випадку максимально симетричного простору де Сіттера часо-нелокальний член сили реакції випромінювання зникає, що обумовлено специфічною структурою коваріантної електромагнетної функції Ґріна (3), (4). Крім цього, така особливість допускає інтеґровне узагальнення моделі Старушкевича–Рудда–Гілла на простір де Сіттера.

1. A. Staruszkiewicz. An example of a consistent relativistic mechanics of point particles. *Ann. Phys.* **25**, 362 (1970).
2. A. Staruszkiewicz. Canonical theory of the two-body problem in the classical relativistic electrodynamics. *Ann. I. H. Poincaré* **14**, 69 (1971).
3. R.A. Rudd, R.N. Hill. Exactly solvable electrodynamic two-body problem. *J. Math. Phys.* **11**, 2704 (1970).
4. H. Tetrode. Über der wirkungzusammenhang der welt. Eine erweiterung der klassischen dynamik. *Z̃. Phys.* **10**, 317 (1922).
5. A.D. Fokker. Ein invarianter variationsatz für die bewegung mehrerer elektrischer massenteilchen. *Z. Phys.* **28**, 386 (1929).
6. H.P. Künzle. A relativistic analogue of the Kepler problem. *Int. J. Theor. Phys.* **11**, 395 (1974).
7. A. Duviryak. The two-body time-asymmetric relativistic models with field-type interaction. *Gen. Relat. Gravit.* **30**, 1147 (1998).
8. A. Duviryak. Fokker-type confinement models from effective Lagrangian in classical Yang-Mills theory. *Int. J. Mod. Phys. A* **14**, 4519 (1999).
9. A. Duviryak. The two-particle time-asymmetric relativistic model with confinement interaction and quantization. *Int. J. Mod. Phys. A* **16**, 2771 (2001).
10. A. Duviryak, V. Shpytko. Relativistic two-particle mass spectra for time-asymmetric Fokker action. *Rep. Math. Phys.* **48**, 219 (2001).
11. F. Hoyle, J.V. Narlikar. *Action at a distance in physics and cosmology* (Freemen, 1974).
12. Yu.S. Vladimirov, A.Yu. Turygin, *Theory of direct interparticle interaction* (Energoatomizdat, 1986).
13. H.S.M. Coxeter. A geometrical background for de Sitter's world. *American Mathematical Monthly* **50**, 217 (1976).
14. U. Moschella. The de Sitter and anti-de Sitter sightseeing tour. *Séminaire Poincaré* **1**, 1 (2005).
15. A. Higuchi, L.Y. Cheong. How to use retarded Green's functions in de Sitter spacetime.*Phys. Rev. D* **78**, 084031 (2008).
16. J.V. Narlikar. Biscalar and bivector Green's functions in de Sitter space time. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **65**, 483 (1970).
17. P.A.M. Dirac. Generalized Hamiltonian dynamics. *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).
18. D.M. Fradkin. Covariant electromagnetic projection operators and a covariant description of charged particle guiding centre motion. *J. Phys. A* **11**, 1069 (jun 1978).
19. E. Poisson, A. Pound, I. Vega. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Reviews in Relativity* **14**, 7 (2011).
20. R. Aldrovandi *et al.* de Sitter relativity and quantum physics. *AIP Conf. Proc.* **962**, 175 (2007).
21. Yu. Yaremko. Self-force via energy-momentum and angular momentum balance equations. *J. Math. Phys.* **52**, 012906 (2011).

Одержано 02.09.19

A. Duviryak, Yu. Yaremko

ACTION-AT-A-DISTANCE
AND RADIATION REACTION OF POINT-LIKE
PARTICLES IN DE SITTER SPACE

Р е з ю м е

The two-particle system with the time-asymmetric retarded-advanced electromagnetic interaction known as the Staruszkiewicz–Rudd–Hill model is considered in the de Sitter spacetime. The manifestly covariant descriptions of the model within the Lagrangian and Hamiltonian formalisms with constraints are proposed. It is shown that the model is de Sitter-invariant and integrable. An explicit solution of the equations of motion is derived. We use the covariant electromagnetic Green function in the de Sitter space in order to derive the equation of motion of a point charge in an external electromagnetic field, where the radiation reaction is taken into account.