

В.І. РОМАНЕНКО,¹ Н.В. КОРНІЛОВСЬКА²

¹ Інститут фізики НАН України

(Просп. Науки, 46, Київ 03680; e-mail: vr@iop.kiev.ua)

² Херсонський національний технічний університет

(Бериславське шосе, 24, Херсон 73008)

ПРО ТОЧНІСТЬ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕНЕСЕННЯ ПОХИБОК ЗА АНАЛІТИЧНИМИ ФОРМУЛАМИ ДЛЯ ОБЕРНЕНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

УДК 519.2, 53.08

Оцінено точність розрахунку перенесення похибок при перетворенні $x \rightarrow y = f(x)$ при нормальному розподілі випадкової величини x на основі формул для перенесення похибок, отриманих для оберненого перетворення $y \rightarrow x$ з розподіленою за нормальним законом випадковою величиною y . Показано, що у загальному випадку точність розрахунку середнього значення і дисперсії випадкової величини y має перший порядок за дисперсією випадкової величини x .

Ключові слова: перенесення похибки, дисперсія, середнє значення, нормальний розподіл.

1. Вступ

При опрацюванні результатів фізичного експерименту часто виникає необхідність обчислення точності отриманих результатів за відомою точністю вимірюваних величин. Наприклад, у рентгеноструктурному аналізі виміряні кути дифракції рентгенівських променів використовують для обчислення постійної кристалічної ґратки. Формули для обчислення точності розрахованих величин добре відомі і бездоганно працюють, якщо похибка (середньоквадратичне відхилення σ_x) вимірюваної величини x настільки мала, що у межах цієї похибки залежність результату $y = f(x)$ від вимірюваної величини можна вважати лінійною [1]. В той самий час не виключена можливість досить великої дисперсії величини, що вимірюється. Це може помітно змінити оцінку похибки величини y , яка обчислюється на основі експериментальних даних. Очевидно, у випадку функції розподілу $F(x)$ величини x , для якої аналітично обчислюються інтеграли $\int_{-\infty}^{\infty} x^n F(x) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^n F(x) dx$ ($n = 1, 2$), середнє значення (математичне сподівання) та дисперсія величини y виражаються через характеристики розподілу $F(x)$, а, отже, можна в принципі виразити математичне сподівання \bar{y} і дисперсію σ_y^2 величини y через математичне сподівання \bar{x} і дисперсію σ_x^2 величини x . Такі обчислення проведені, наприклад, для $y = \cos x$

[2], $y = x^2$ [3] у випадку нормального розподілу x і для $y = \sqrt{x}$ [4] у випадку стандартного (з нульовим математичним сподіванням) нормального розподілу x . Якщо ж вказані інтеграли не можна обчислити аналітично, а інтеграли $\int_{-\infty}^{\infty} y^n G(y) dy$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)^n G(y) dy$ ($n = 1, 2$) можна, де $g(y) = x$ – обернена до $f(x)$ функція, а $G(y)$ – функція розподілу y , ми знову отримуємо співвідношення, які пов'язують \bar{x} , σ_x^2 з \bar{y} , σ_y^2 [2, 3]. Це було зроблено у роботах [2] для $y = \arccos(x)$ та [3] для $y = \sqrt{x}$ (обернені перетворення мають вигляд $x = \cos y$, $x = y^2$). Слід зазначити, що для нелінійної функції $f(x)$ (і, відповідно, $g(y)$) вигляд функції розподілу випадкової величини y відрізняється від вигляду розподілу випадкової величини x . Наприклад, якщо випадкова величина x була розподілена за нормальним законом, то розподіл випадкової величини y нормальним вже не буде. В той самий час у роботах [2, 3] пропонується використовувати формули, отримані при оберненому перетворенні $y \rightarrow x$ за припущення про нормальний розподіл y , для розрахунку \bar{y} і σ_y^2 при перетворенні $x \rightarrow y = f(x)$ нормально розподіленої величини x , ігноруючи той факт, що при перетворенні $y \rightarrow x$ розподіл x не нормальний. На жаль, похибка, що виникає при підміні не нормального розподілу x нормальним у роботах [2, 3] не обговорюється. Оскільки ідея запропонованого в цитованих роботах методу в цілому нам видається цікавою, варто оцінити похибку такого методу розрахунку.

© В.І. РОМАНЕНКО, Н.В. КОРНІЛОВСЬКА, 2019

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2019. Т. 64, № 3

Робота побудована так: у наступному розділі описана схема розрахунку точності статистичних характеристик розподілу величини $y = f(x)$, сам розрахунок викладено у розділі 3, у четвертому розділі наведено приклад розрахунку для $f(x) = \sqrt{x}$ та його порівняння з чисельним розрахунком, в кінці роботи сформульовано короткий висновок.

2. Схема розрахунку

Оцінювати точність розрахунку статистичних характеристик $y = f(x)$ за аналітичними формулами, отриманими для оберненого перетворення $x = g(y)$, будемо таким чином.

1. Уважаємо, що випадкова величина x характеризується нормальним розподілом із середнім значенням \bar{x} та дисперсією σ_x^2 . Змінна y пов'язана з x співвідношенням $y = f(x)$, яке можна записати у вигляді ряду Тейлора.

2. Розраховуємо середнє значення \bar{y} та дисперсію σ_y^2 величини y .

3. Уважаємо, що випадкова величина y характеризується нормальним розподілом із середнім значенням \bar{y}_a та дисперсією $\sigma_{y_a}^2$. Величина x пов'язана з y співвідношенням $x = g(y)$, яке можна записати у вигляді ряду Тейлора.

4. Розраховуємо середнє значення \bar{x}_a та дисперсію $\sigma_{x_a}^2$ величини x . Очевидно, розподіл x не буде нормальним.

5. Ототожнюємо величини \bar{x}_a та $\sigma_{x_a}^2$, які характеризують не нормальний розподіл величини x для перетворення $y \rightarrow x = g(y)$ нормально розподіленої величини y , з \bar{x} та σ_x^2 (саме це ототожнення, яке є основою робіт [2, 3], призводить до обмеження точності наведених в [2, 3] формул).

6. Порівнюємо \bar{y} з \bar{y}_a та σ_y^2 з $\sigma_{y_a}^2$. Відмінність цих величин і дасть похибку запропонованого в [2, 3] методу розрахунку математичного сподівання та дисперсії при перетворенні $x \rightarrow y = f(x)$ з використанням аналітичних формул для цих величин при оберненому перетворенні $y \rightarrow x = g(y)$ нормально розподіленої величини y .

3. Точність перенесення похибок $x \rightarrow y = f(x)$ на основі результатів для $y \rightarrow x$

Нехай випадкова величина x характеризується функцією нормального розподілу із середнім зна-

ченням \bar{x} та дисперсією σ_x^2 (σ_x – середньоквадратичне відхилення):

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (1)$$

Для цієї функції розподілу у випадку цілого n справедливі співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^{2n+1} F(x) dx = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^{2n} F(x) dx = (2n - 1)!! \sigma_x^{2n} \quad (n \geq 1), \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 1. \quad (4)$$

Змінна y пов'язана з x співвідношенням $y = f(x)$, яке також можна записати у вигляді ряду Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \bar{x})^n, \quad (5)$$

де

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=\bar{x}}. \quad (6)$$

3.1. Середнє значення та дисперсія при перетворенні $y = f(x)$

Беручи до уваги формули (2) і (3), знаходимо середнє значення \bar{y} функції $y = f(x)$ при розподілі випадкової величини x за законом (1):

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n F(x) dx = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (2n - 1)!! \sigma_x^{2n}. \end{aligned} \quad (7)$$

З точністю до четвертого порядку по σ_x маємо

$$\bar{y} = a_0 + a_2 \sigma_x^2 + 3a_4 \sigma_x^4. \quad (8)$$

Обчислимо тепер дисперсію y (середній квадрат відхилення від середнього значення):

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})^2 F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 F(x) dx - \bar{y}^2. \quad (9)$$

Середнє значення y^2

$$\overline{y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 F(x) dx \quad (10)$$

можна також записати у вигляді

$$\overline{y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n a_m \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^{n+m} F(x) dx \quad (11)$$

або

$$\overline{y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} a_n a_{m-n} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^m F(x) dx. \quad (12)$$

Беручи до уваги формули (2) і (3), останню рівність можна також подати як

$$\overline{y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{\infty} a_n a_{2m-n} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^{2m} F(x) dx. \quad (13)$$

Тут квадратні дужки означають виділення цілої частини числа. Останній вираз можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \overline{y^2} &= a_0 a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_0 a_{2m} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^{2m} F(x) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{\infty} a_n a_{2m-n} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^{2m} F(x) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Звідси та з (3) випливає

$$\begin{aligned} \overline{y^2} &= a_0 a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_0 a_{2m} (2m - 1)!! \sigma_x^{2m} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{\infty} a_n a_{2m-n} (2m - 1)!! \sigma_x^{2m}. \end{aligned} \quad (15)$$

З точністю до σ_x^4 останній вираз має вигляд:

$$\overline{y^2} = a_0 a_0 + (2a_0 a_2 + a_1^2) \sigma_x^2 + 3(2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) \sigma_x^4. \quad (16)$$

Беручи до уваги (8), (9) і (16), маємо

$$\sigma_y^2 = a_1^2 \sigma_x^2 + 2(a_2^2 + 3a_1 a_3) \sigma_x^4. \quad (17)$$

Отримані вирази для \bar{y} (8) та σ_y^2 (17) повністю збігаються з отриманими для $f(x) = x^2$ ($a_0 = \bar{x}^2$, $a_1 = 2\bar{x}$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 0$) у роботі [3] і збігаються з точністю до σ_x^4 з отриманими для $f(x) = \cos x$ ($a_0 = \cos \bar{x}$, $a_1 = -\sin \bar{x}$, $a_2 = -\frac{1}{2} \cos \bar{x}$, $a_3 = \frac{1}{6} \sin \bar{x}$, $a_4 = \frac{1}{24} \cos \bar{x}$) у роботі [2].

3.2. Середнє значення

та дисперсія при перетворенні $x = g(y)$

Розглянемо тепер обернену до $y = f(x)$ функцію $x = g(y)$. Вважаємо, що випадкова величина y розподілена за нормальним законом

$$G(y) = \frac{1}{\sigma_{y_a} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(y - \bar{y}_a)^2}{2\sigma_{y_a}^2} \right] \quad (18)$$

із середнім значенням \bar{y}_a та дисперсією $\sigma_{y_a}^2$ (σ_{y_a} – середньоквадратичне відхилення). Нехай розклад функції $g(y)$ в ряд Тейлора має вигляд

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n, \quad (19)$$

де

$$b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dy^n} g(y) \right|_{y=y_0}, \quad y_0 = f(\bar{x}) = a_0. \quad (20)$$

Далі обчислюємо середнє значення \bar{x}_a та дисперсію $\sigma_{x_a}^2$ значень функції $x = g(y)$. Звернемо увагу на те, що точка y_0 , поблизу якої записано розвинування функції $g(y)$ в ряд Тейлора (19), у загальному випадку не збігається з максимумом розподілу $G(y)$, який досягається при $y = \bar{y}_a$. У зв'язку з цим зручно $g(y)$ записати у вигляді

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - \bar{y}_a + \delta)^n, \quad (21)$$

де $\delta = \bar{y}_a - y_0$, і користуватися при обчисленні \bar{x}_a та $\sigma_{x_a}^2$ інтегралами

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y}_a)^{2n+1} G(y) dy = 0, \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y}_a)^{2n} G(y) dy = (2n - 1)!! \sigma_{y_a}^{2n} \quad (n \geq 1), \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(y) dy = 1. \quad (24)$$

З точністю до четвертого порядку за σ_{y_a} маємо

$$\begin{aligned} \bar{x}_a &= \int_{-\infty}^{\infty} G(y) g(y) dy = b_0 + b_1 \delta + \\ &+ b_2 (\delta^2 + \sigma_{y_a}^2) + b_3 (\delta^3 + 3\delta \sigma_{y_a}^2) + \\ &+ b_4 (\delta^4 + 6\delta^2 \sigma_{y_a}^2 + 3\sigma_{y_a}^4). \end{aligned} \quad (25)$$

Дисперсію $\sigma_{x_a}^2$ розраховуємо за формулою:

$$\sigma_{x_a}^2 = \overline{x_a^2} - \overline{x_a}^2, \quad (26)$$

де

$$\overline{x_a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} G(y)g(y)^2 dy. \quad (27)$$

З точністю до четвертого порядку за σ_{y_a} маємо, вважаючи δ того ж порядку малості,

$$\sigma_{x_a}^2 = b_1^2 \sigma_{y_a}^2 + 4b_1 b_2 \delta \sigma_{y_a}^2 + 2\sigma_{y_a}^4 (3b_1 b_3 + b_2^2) + 2\sigma_{y_a}^2 \delta^2 (3b_1 b_3 + 2b_2^2). \quad (28)$$

3.3. Зв'язок коефіцієнтів у рядоз Тейлора для функцій $y = f(x)$ і $x = g(y)$

Для подальших обчислень слід знайти зв'язок сукупності коефіцієнтів b_n ($n = 1, 2, 3, 4$) із сукупністю коефіцієнтів a_n ($n = 1, 2, 3, 4$), які визначаються рівнянням (6) через похідні функції $f(x)$. Цей зв'язок знаходимо з тотожності

$$g(f(x)) = x, \quad (29)$$

яка, переписана через ряди Тейлора для функцій $f(x)$ і $g(x)$, набуває вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - \bar{x})^m - a_0 \right)^n = x. \quad (30)$$

Прирівнюючи члени при однакових ступенях x у правій і лівій частині рівняння (30), можна знайти рівняння, що визначають сукупність коефіцієнтів b_n через відому сукупність коефіцієнтів a_n . Для обчислень зручно ввести $\xi = x - \bar{x}$ і прирівнювати до нуля суму членів при кожному ступені ξ у правій і лівій частині рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \xi^m \right)^n = \bar{x} + \xi. \quad (31)$$

Перші п'ять рівнянь мають вигляд:

$$b_0 = \bar{x}, \quad (32)$$

$$b_1 a_1 = 1, \quad (33)$$

$$a_1^2 b_2 + a_2 b_1 = 0, \quad (34)$$

$$a_1^3 b_3 + 2a_1 a_2 b_2 + a_3 b_1 = 0, \quad (35)$$

$$a_1^4 b_4 + 3a_1^2 a_2 b_3 + 2a_1 a_3 b_2 + a_2^2 b_2 + a_4 b_1 = 0. \quad (36)$$

Вони дають:

$$b_0 = \bar{x}, \quad (37)$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad (38)$$

$$b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad (39)$$

$$b_3 = \frac{-a_1 a_3 + 2a_2^2}{a_1^5}, \quad (40)$$

$$b_4 = \frac{-a_1^2 a_4 + 5a_1 a_2 a_3 - 5a_2^3}{a_1^7}. \quad (41)$$

3.4. Похибки в обчисленні середнього значення та дисперсії у запропонованому в [2, 3] методі

Для розрахунку похибок обчислення \bar{y} і σ_y ототожнимо величини \bar{x}_a та σ_{x_a} , які характеризують не нормальний розподіл величини x для перетворення $y \rightarrow x = g(y)$ нормально розподіленої величини y , з \bar{x} та σ_x . Як зазначалося вище, саме це ототожнення, яке є основою робіт [2, 3], призводить до обмеження точності наведених в [2, 3] формул. Далі порівняємо \bar{y} з \bar{y}_a і σ_y^2 з $\sigma_{y_a}^2$. Різниця значень цих величин і дадуть похибку запропонованого в [2, 3] методу розрахунку математичного сподівання та дисперсії випадкової величини $y = f(x)$. Обчислення проводимо з точністю до четвертого порядку за σ_x .

Розв'язок рівнянь

$$\bar{x} = b_0 + b_1 \delta + b_2 (\delta^2 + \sigma_{y_a}^2) + b_3 (\delta^3 + 3\delta \sigma_{y_a}^2) + b_4 (\delta^4 + 6\delta^2 \sigma_{y_a}^2 + 3\sigma_{y_a}^4), \quad (42)$$

$$\sigma_x^2 = b_1^2 \sigma_{y_a}^2 + 4b_1 b_2 \delta \sigma_{y_a}^2 + 2\sigma_{y_a}^4 (3b_1 b_3 + b_2^2) + 2\sigma_{y_a}^2 \delta^2 (3b_1 b_3 + 2b_2^2) \quad (43)$$

для δ і σ_{y_a} шукаємо у вигляді

$$\delta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4, \quad (44)$$

$$\sigma_{y_a}^2 = s_2 + s_4, \quad (45)$$

де вважаємо величини d_n і s_n порядку σ_x^n . Підставляючи (44), (45) в (42) і (43) та прирівнюючи коефіцієнти при членах з однаковим порядком малості у правій і лівій частині рівнянь, маємо, беручи до уваги рівняння (37)–(41):

$$d_1 = 0, \quad (46)$$

$$d_2 = a_2 \sigma_x^2, \quad (47)$$

$$d_3 = 0, \quad (48)$$

$$d_4 = 3a_4 \sigma_x^4 - 6 \frac{a_2 a_3}{a_1} \sigma_x^4, \quad (49)$$

$$s_2 = a_1^2 \sigma_x^2, \quad (50)$$

$$s_4 = 6a_1 a_3 \sigma_x^4 - 10a_2^2 \sigma_x^4, \quad (51)$$

що дає

$$\overline{y_a} = a_0 + a_2 \sigma_x^2 + 3a_4 \sigma_x^4 - 6 \frac{a_2 a_3}{a_1} \sigma_x^4, \quad (52)$$

$$\sigma_{y_a}^2 = a_1^2 \sigma_x^2 + 6a_1 a_3 \sigma_x^4 - 10a_2^2 \sigma_x^4. \quad (53)$$

Порівнюючи (52) і (53) з (8) і (17), бачимо, що похибки середнього значення і дисперсії випадкової змінної y , пов'язаної з нормально розподіленою випадковою змінною x співвідношенням $y = f(x)$, обчислених запропонованим в [2, 3] методом, становлять відповідно

$$\overline{y_a} - \overline{y} = -6 \frac{a_2 a_3}{a_1} \sigma_x^4, \quad (54)$$

$$\sigma_{y_a}^2 - \sigma_y^2 = -12a_2^2 \sigma_x^4. \quad (55)$$

4. Обговорення результатів

Для ілюстрації отриманих результатів порівняємо середнє значення і дисперсію випадкової величини $y = f(x) = \sqrt{x}$, отриманих різними способами:

- 1) чисельним інтегруванням виразів (7) і (9);
- 2) за формулами роботи [3];
- 3) за отриманими нами формулами (8) і (17);
- 4) за отриманими нами формулами (52) і (53).

Крім того, наведемо розраховану нами оцінку точності запропонованого в [2, 3] методу переносу похибок за формулами (54) і (55).

Для обчислення \overline{y} , $\overline{y_a}$, σ_y^2 , $\sigma_{y_a}^2$ треба знати коефіцієнти розкладу функції $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора поблизу середнього значення \bar{x} випадкової величини x . Користуючись (6), маємо

$$a_0 = \sqrt{\bar{x}}, \quad (56)$$

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}, \quad (57)$$

$$a_2 = -\frac{1}{8\bar{x}\sqrt{\bar{x}}}, \quad (58)$$

$$a_3 = \frac{1}{16\bar{x}^2\sqrt{\bar{x}}}, \quad (59)$$

$$a_4 = -\frac{5}{128\bar{x}^3\sqrt{\bar{x}}}. \quad (60)$$

Наведемо також формули для середнього значення і дисперсії, отримані у роботі [3]:

$$\overline{y_{\text{Rode}}} = \sqrt[4]{\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\sigma_x^2}, \quad (61)$$

$$\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2 = \bar{x} - \sqrt{\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\sigma_x^2}. \quad (62)$$

Порівнювати результати розрахунків за наведеними вище формулами будемо з $\overline{y_{\text{Numerical}}}$ і $\sigma_{y_{\text{Numerical}}}^2$, отриманими при чисельному інтегруванні виразів (7) і (9) з точністю 10^{-10} , вважаючи $f(x) = \sqrt{|x|}$. Далі на ці результати чисельного інтегрування будемо посилалися як на "точні" значення. Похибку визначаємо як різницю між величиною, що обчислюється, і відповідним їй результатом чисельного інтегрування.

В таблиці наведено результати обчислення середнього значення і дисперсії після перетворення $y = \sqrt{x}$ для розподіленої згідно з (1) випадкової величини з $\bar{x} = 25$, $\sigma_x = 5$. Як і слід було очікувати, найближче до точних значень лежать \overline{y} і σ_y^2 . Похибки обчислення $\overline{y_{\text{Rode}}}$ і $\overline{y_a}$ приблизно однакові, так само, як і похибки обчислення $\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2$ і $\sigma_{y_a}^2$. Це означає, що вирази для $\overline{y_a}$ (52) і $\sigma_{y_a}^2$ (53) добре описують залежності (61) і (62), отримані у роботі [3]. Їх різниці за вказаних параметрів становлять $\overline{y_{\text{Rode}}} - \overline{y_a} = -2,2 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2 - \sigma_{y_a}^2 = 1,3 \cdot 10^{-5}$. З наведених у таблиці даних також випливає, що підміна нормального розподілу на не нормальний, для якого справедливі формули (52), (53) і (61), (62), зроблена в роботах [2, 3], вносить похибки $\overline{y_a} - \overline{y} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ і $\sigma_{y_a}^2 - \sigma_y^2 = -7,5 \cdot 10^{-3}$.

Зазначимо, що ілюстративний приклад, наведений в [3] як додатковий аргумент на підтримку запропонованого в [2, 3] методу розрахунку переносу

Результати обчислення середнього значення і дисперсії величини $y = \sqrt{x}$ для $\bar{x} = 25$, $\sigma_x = 5$

Величина	Значення	Похибка
$\overline{y_{\text{Rode}}}$	4,9748103	$8,7 \cdot 10^{-4}$
\overline{y}	4,9740625	$1,2 \cdot 10^{-4}$
$\overline{y_a}$	4,9748125	$8,7 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{y_{\text{Numerical}}}^2$	0,2599280	0
$\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2$	0,2512627	$-8,7 \cdot 10^{-3}$
σ_y^2	0,2587500	$-1,2 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{y_a}^2$	0,2512500	$-8,7 \cdot 10^{-3}$

похибок на основі обернених функцій, для яких інтеграли в (7), (9) обчислюються аналітично, виглядає переконливо. Причина дуже проста – використані при розрахунку параметри $\bar{x} = 40,45$, $\sigma_x = 0,89$ відповідають досить малому відношенню $\sigma_x/\bar{x} = 2,2 \cdot 10^{-2}$. У цьому разі можна чекати, що одного – двох членів розкладу $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора буде цілком достатньо для досить точного обчислення середнього значення і дисперсії. Проведені нами розрахунки для цих значень статистичних параметрів дають $\overline{y_{\text{Rode}}} - \overline{y_{\text{Numerical}}} = 1,4 \cdot 10^{-7}$, $\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2 - \sigma_{y_{\text{Numerical}}}^2 = -1,8 \cdot 10^{-6}$.

5. Висновок

Проведений нами аналіз точності перенесення похибок при перетворенні $y = f(x)$ на основі формул, отриманих для оберненої функції $x = g(y)$ за умови нормального розподілу випадкової величини y означає, що запропонований в [2, 3] метод обчислення середнього значення і дисперсії випадкової величини y при розрахунку дисперсії не має, взагалі кажучи, переваг перед звичайним методом розкладення функції $f(x)$ в ряд Тейлора з врахуванням тільки нульового і першого членів [1]. В той самий час він дає точнішу, з точністю до σ_x^2 , величину середнього значення, що еквівалентно врахуванню другого члена у ряді Тейлора. Як видно з формул (52)–(55), винятком є випадок, коли друга похідна

$f(x)$ при $x = \bar{x}$ дорівнює нулю. У цьому разі запропонований в [2, 3] метод дає середнє значення і дисперсію принаймні з точністю до σ_x^4 .

1. Д. Худсон. *Статистика для фізиків*. Мир (1970).
2. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій $\cos x$ та $\arccos x$. *УФЖ* **61**, 355 (2016).
3. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій x^2 та \sqrt{x} . *УФЖ* **62**, 184 (2017).
4. П. Кособуцький. Аналітичні співвідношення обчислення математичного сподівання і середньої квадратичної похибки стандартно $N(0, \sigma_X)$ розподіленої випадкової величини, підданої перетворенню \sqrt{x} . *УФЖ* **63**, 215 (2018).

Одержано 04.02.19

V.I. Romanenko, N.V. Kornilovska

ON THE ACCURACY OF ERROR PROPAGATION CALCULATIONS BY ANALYTIC FORMULAS OBTAINED FOR THE INVERSE TRANSFORMATION

S u m m a r y

The accuracy of error propagation calculations is estimated for the transformation $x \rightarrow y = f(x)$ of the normally distributed random variable x . The estimation is based on the formulas for the error propagation obtained for the inverse transformation $y \rightarrow x$ of the normally distributed random variable y . In the general case, the calculation accuracy for the mean value and the variance of the random variable y is shown to be of the first order of magnitude in the variance of the random variable x .