

doi:

Ю.В. ХОРОШКОВ

Вул. Петровського 4, кв. 40, Київ 03087

(e-mail: YuriHoroshkov@gmail.com)

ДЗЕРКАЛЬНА СИМЕТРІЯ ЯК ОСНОВА ПОБУДОВИ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОГО КОНТИНУУМУ

УДК 530.1

За допомогою дзеркального відображення 1-вимірної орієнтованої множини у спеціально створеному на основі симетрії комплексному просторі будується в задзеркалі простір розмірності $n > 1$. Геометрія отриманого простору описується векторною алгеброю Кліффорда. На основі алгебри гіперболічних гіперкомплексних чисел будується псевдоевклідов простір з метрикою простору Мінковського. Одержано умови аналітичності функції від гіперболічного гіперкомплексного аргументу (\hbar -аналітичність), в яких в неявному вигляді містяться рівняння Максвелла для 4-потенціалу у вільному просторі.

Ключові слова: дзеркальне відображення, алгебра Кліффорда, гіперболічні гіперкомплексні числа, простір Мінковського.

1. Вступ

В останні десятиліття гостро виникла необхідність у пошуку фізичних ідей і математичного апарату, здатних з єдиних позицій описувати різноманіття фізичних явищ. Так, намітилася тенденція переосмислення класичних понять простору-часу на користь використання різних методів алгебри. Тут необхідно згадати бінарну геометрофізику (реляційна теорія) [1], алгебраїчну теорію простору-часу на основі кватерніонів [2, 3], і алгебраїчну геометрію на основі алгебри Кліффорда [4, 5, 12], окремим випадком якої і є кватерніони. Геометрична алгебра Кліффорда претендує на роль уніфікованої мови математичної фізики [17], завдяки потужності математичного апарату всіх відомих комплексних і гіперкомплексних чисел, які ця алгебра природним чином включає в себе. Про перспективність даного напрямку свідчить проведення регулярних конференцій та публікації в рамках

ICCA (International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics)¹, а область додатків постійно розширюється від механіки і обробки сигналів до хімії та біології. Торкаючись фізичних додатків, слід зазначити, що навіть виклад традиційних фізичних задач на мові алгебри Кліффорда приводить найчастіше до спрощення математичних викладок і (або) до нових несподіваних результатів. Дійсно, наприклад, аналіз рівнянь руху матеріальної точки в неоднорідному і неізотропному просторі в базисі алгебри Кліффорда частково узгоджується з рівняннями Ейнштейна, а сам принцип побудови рівнянь є альтернативою варіаційним методам [18]. Рівняння руху класичної частинки зі спіном в електромагнітному полі в базисі Кліффорда істотно спрощуються і замість нелінійних рівнянь теорії збурення вирішуються лінійні рівняння [19], а завдання аналізу специфіки нейтрон-ядерної взаємодії та можливо-

¹ 10-а ICCA відбулась 4-8 серпня 2014 р. у м. Тарту, праці ICCA – Journal “Advances in Applied Clifford Algebras”.

сті існування нейтрон-ядерних молекул на основі рівняння Дірака [22] можливо досліджувати на мові алгебри Кліффорда². У свою чергу, алгебру Кліффорда пов'язують зі спінорами [10], специфічними геометричними об'єктами, які іноді називають "полуекторами", оскільки зі спостережними величинами зв'язуються лише спінтензори рангу >1 . Така роль спінів і спірного простору в геометрії схожа на ту роль, яку відіграють хвильові функції в квантовій механіці, і вимагає додаткового аналізу. Оскільки алгебра Кліффорда претендує на роль уніфікованої мови математичної фізики, виникає також питання про її взаємозв'язок із фундаментальними законами природи.

Принципи симетрії, що лежать в основі законів природи [6, 20], останнім часом зазнали серйозного доопрацювання. Недавні дослідження в теорії струн [7, 8] несподівано привернули пильну увагу до розширених можливостей дзеркальної симетрії. У цих дослідженнях дві множини X та X' зв'язувалися як дзеркальні пари за допомогою допоміжного простору. Властивості цих пар цілком залежали від властивостей цього простору в особливих точках і не обмежувалися заміною правого на ліве як у традиційній геометричній дзеркальній симетрії. У цій роботі ідея дзеркальної симетрії за допомогою допоміжного простору використовується для побудови в задзеркаллі (through the looking glass) з 1-вимірної орієнтованої множини векторного простору розмірності $n > 1$. В ролі допоміжного простору використовується спеціально створений на основі симетрії комплексний простір, в якому роль особливих точок виконують певні площини (площини "дзеркал"), щодо яких виконується геометрична дзеркальна симетрія. Послідовно проводиться аналогія отриманого простору з властивостями комплексних чисел, аналізується алгебра, геометрія і фізичні властивості отриманого векторного простору. Для збереження струнності і логічності викладу наведено як відомі, так і оригінальні результати. Дану роботу необхідно розглядати як першу частину – обґрунтування методу – більш широко-

² У мережевих ресурсах заслуговують на увагу лекції А.А. Кедриса <http://toe-physics.org/ru/lectures.htm> або по персоналіях: застосування в теорії поля – (R. Dahm, D. Hestenes, Н.Г. Марчук); електродинаміки – (W.E. Baylis, B. Jancewicz, P. Puska); алгебра Кліффорда – (D. Hestenes, Д.С. Широков)

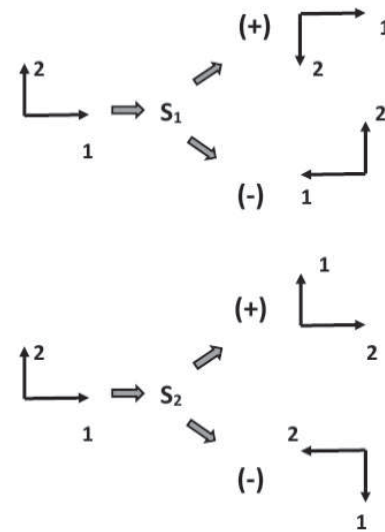


Рис. 1. Дія операторів симетрії на базисні вектори системи координат

го дослідження, яке планується представити в подальшому.

2. Побудова допоміжного простору на основі симетрії комплексної площини

Симетрія, слідуючи Картанові (E. Cartan) [9], визначається як операція \mathbf{S} геометричного дзеркального відображення від гіперплощини M , що проходить через початок координат, в напрямку неізотропного вектора \mathbf{s} , ортогонального цій гіперплощині. Визначимо операції дзеркальної симетрії $\pm \mathbf{s}_1$ і $\pm \mathbf{s}_2$ у системі координат на площині, які змінюють напрямки базисних векторів і орієнтацію системи координат згідно з діаграмою, зображеною на рис. 1. Для довільної точки $P = (x, y)$ комплексної площини у векторному базисі $1 \rightarrow (1, 0)$; $2 \rightarrow (0, i)$ операцію симетрії можна представити виразом

$$(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де \bar{z} – позначає комплексно сполучену величину. В результаті дзеркальної симетрії (1) комплексна площина в базисі $(1, i)$ відображається в 3-вимірному базисі $(1, 0)$, $(0, 1)$, (i, i) як площина, що проходить через вісь уявних координат по бісектрисі ортогональних осей $(1, 0)$ і $(0, 1)$ (рис. 2).

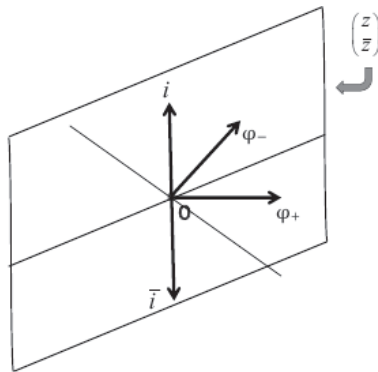


Рис. 2. Допоміжний комплексний простір дзеркальних відображень

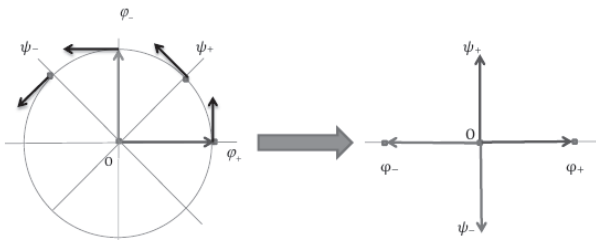


Рис. 3. Побудова ортогональної системи координат в задзеркаллі

Вісь уявних координат представляється комбінацією двох протилежно орієнтованих уявних осей з загальною точкою 0, ортогональних до площини базисних векторів $(1,0)$ і $(0,1)$. Позначимо ці ортогональні вектори як $\varphi_+ = (1,0)$ і $\varphi_- = (0,1)$. Комплексифікація дійсної евклідової площини комбінацією симетричних уявних осей породжує простір \mathcal{E}_2^{++} з двох ортогональних комплексних площин у базисах $(\varphi_+, i\varphi_+)$ і $(\varphi_-, i\varphi_-)$ відповідно. Площини перетинаються по уявних осях, мають одну спільну точку 0 і визначають в загальному випадку комплексний вектор $\gamma = (\xi, \bar{\eta})$. Якщо розглядати \mathcal{E}_2^{++} як 3-вимірний простір, то його довільна точка P має дійсні координати $P = (x_1, x_2, \pm y)$, де координата $\pm y$ відповідає комбінації уявних осей, а вектор γ має координати $\xi = x_1 + iy$, $\bar{\eta} = x_2 - iy$. Подання комплексного числа 2-вимірним комплексним вектором (z, \bar{z}) має своє логічне обґрунтування. Дійсно, множення двох комплексних чисел можна представити у вигляді

$$z_1 z_2 = (z_1 \bullet \bar{z}_2) + i[z_1 \times \bar{z}_2], \tag{2}$$

де $(z_1 \bullet \bar{z}_2)$ – позначає скалярний добуток, а $[z_1 \times \bar{z}_2]$ – векторний добуток векторів z_1 і \bar{z}_2 . Дійсна Re і уявна Im частини (3) представляються симетричною і косиметричною формами:

$$\text{Re}(z_1 z_2) = (z_1 \bullet \bar{z}_2) = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1), \tag{3}$$

$$\text{Im}(z_1 z_2) = [z_1 \times \bar{z}_2] = -\frac{i}{2}(z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1).$$

Як буде показано нижче, вирази (2), (3) справедливі і для гіперкомплексних чисел.

3. Побудова системи координат в задзеркаллі

Побудову системи координат в задзеркаллі будемо виконувати операцією дзеркальної симетрії базисного вектора φ_+ в площині (φ_+, φ_-) простору \mathcal{E}_2^{++} . Для цього запишемо оператор дзеркальної симетрії в загальному вигляді таким чином:

$$\mathbf{S}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{s}_1 + \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{s}_2, \tag{4}$$

де кут $\alpha/2$ відраховується від базисного вектора φ_+ проти годинникової стрілки, а сам кут α визначає кут між новими базисними векторами в задзеркаллі і дзеркальним образом вектора φ_+ . Введення множника $1/2$ зумовлене властивостями дзеркальних відображень. Необхідно відразу зазначити, що, завдяки цьому множнику, перетворення симетрії в межах кутів $0 \leq \alpha/2 < 2\pi$ двічі накривають простір в задзеркаллі. У зв'язку з цим, перетворення в межах $0 \leq \alpha/2 < \pi$ і $\pi \leq \alpha/2 < 2\pi$ будемо аналізувати окремо. Будемо будувати в задзеркаллі ортогональну базисну систему координат на площині, що відповідає кутам $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/4$. Підставивши ці значення в (4), отримаємо в задзеркаллі дві пари протилежно орієнтованих базисних вектора:

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= \mathbf{S}(0)\varphi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_+ = \mathbf{S}(\pi/2)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi_- &= \mathbf{S}(\pi)\varphi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \mathbf{S}(3\pi/4)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Операції дзеркальної симетрії $\mathbf{S}(\alpha)$ щодо вибраних площин у просторі \mathcal{E}_2^{++} відобразили (рис. 3) у задзеркаллі вхідний 1-вимірний векторний простір R_1 як 2-вимірний векторний простір, ортогональні координатні осі якого представлені розширенням двох протилежно орієнтованих базисних

векторів із загальною точкою 0 початку координат (права частина рис. 3). Отримана базисна система векторів добре вписується в концепцію довільності вибору напрямку та орієнтації системи координат, однак її можна розглядати тільки як можливу реалізацію системи координат, оскільки координати довільної точки мають невизначеність у знаку чисельних значень. Формалізувати можливість протилежної орієнтації базисного вектора можна введенням вектор-оператора симетрії e , у якого протилежно орієнтовні пари векторів є власними векторами, а власні значення ± 1 відповідають за ту чи іншу орієнтацію базисного вектора. Оскільки власні вектори визначені виразами (5), неважко отримати матричне подання вектор-операторів у вигляді

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$e_i \varphi_{i\pm} = \pm 1 \varphi_{i\pm}, \quad e_i e_i = e_i^2 = \mathbf{1},$$

де $\mathbf{1}$ – одиниця, представлена діагональною матрицею, може розглядатися як тотожний оператор симетрії. Якщо звернутися до правої частини рис. 3, то його можна вважати геометричним образом базисних вектор-операторів.

Для перетворень $\mathbf{S}(\alpha)$ в межах кутів $2\pi \leq \alpha < 4\pi$ з (4) впливає співвідношення

$$\mathbf{S}(2\pi \leq \alpha < 4\pi) = -\mathbf{S}(0 \leq \alpha < 2\pi). \quad (7)$$

Перетворення (7) дозволяють отримати ще дві пари ортогональних базисних вектора в задзеркаллі $\bar{\varphi}_{\pm}$ і $\bar{\psi}_{\pm}$, які пов'язані з векторами (5) співвідношеннями

$$\bar{\varphi}_{\pm} = -\varphi_{\pm}; \quad \bar{\psi}_{\pm} = -\psi_{\pm}. \quad (8)$$

Неважко помітити, що базисні вектори (8) визначають вектор-оператори $\bar{e}_i = -e_i$. Вирази (7), (8) відображають відому проблему знакової невизначеності перетворень у спірному просторі³. Однак, можна розглянути цю проблему під іншим кутом зору. Дійсно, використовуючи аналогію з векторним поданням комплексного числа у

допоміжному комплексному просторі спільно з його сполученим значенням, будемо вважати вектор \bar{e}_i сполученим значенням вектора e_i . Такий підхід дозволяє розглядати перетворення в спір-просторі тільки в межах кутів $0 \leq \alpha < 2\pi$ за умови введення операції сполучення як самостійної базової операції. Таким чином, операції дзеркальної симетрії (5) у допоміжному комплексному просторі формально виконали операцію $\mathbf{S}: R_1 \mapsto R_{2(2)}$, де $R_{2(2)}$ – позначає 2-вимірний векторний простір у задзеркаллі з розшаруванням протилежно орієнтовних базисних векторів. У свою чергу, $R_{2(2)}$ є геометричним образом алгебри матричних операторів e_i , на яких будемо далі будувати векторний евклідовий простір E_2 .

4. Алгебра та геометрія E_2 у задзеркаллі

Для побудови евклідового простору необхідно визначити скалярний добуток. Оскільки вектори представлені матрицями, їх добуток у загальному випадку некомутативний, тому формально можна записати

$$e_1 e_2 = \frac{1}{2}(e_1 e_2 + e_2 e_1) + \frac{1}{2}(e_1 e_2 - e_2 e_1). \quad (9)$$

Симетрична білінійна форма визначає внутрішній або скалярний добуток векторів:

$$e_1 \bullet e_2 = \frac{1}{2}(e_1 e_2 + e_2 e_1). \quad (10)$$

Кососиметрична форма визначає зовнішній добуток векторів:

$$e_{12} = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{2}(e_1 e_2 - e_2 e_1). \quad (11)$$

Умова ортогональності векторів $e_1 \bullet e_2 = 0$, і з (9), (10) отримаємо

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1, \quad e_{12} = e_1 e_2, \quad e_{21} = -e_{12}. \quad (12)$$

З (12) впливає, що *ортогональні вектори антикомутують* між собою. Зовнішній добуток утворює бівектор e_{12} , який для ортогональних векторів є просто їх добутком і змінює знак при зміні порядку співмножників (порядку індексів). Зміна знака бівектора при зміні порядку індексів є властивістю кососиметричної форми для ортогональних векторів, а не некомутативності матричного множення.

³ Ця проблема описана як у підручниках (наприклад, М.М. Постников. Лекції по геометрії. Семестр II. Лінійна алгебра. М., изд. 1 "Наука", 1986, лекція 24), так і в спеціальній літературі [15] с. 33.

Бівектор e_{12} також визначає симетрію системи координат, оскільки є комбінацією симетрій. Щоб її визначити, скористаємося виразом для дзеркального відображення вектора x в базисі (e_1, e_2) в напрямку одиничного вектора s [10]: $x' = -sxs$. Якщо $x = e_i$, а операцію відображення провести двічі, спочатку при $s = e_2$, а потім $s = e_1$, отримуємо

$$e'_i = e_1 e_2 e_i e_2 e_1 = -e_i, \tag{13}$$

де використані властивості (12). Оскільки парні відображення породжують обертання, то (13) відповідає оберту базисної системи координат на кут 180° . Для $R_{2(2)}$ це відповідає тому, що базисні вектори з індексами “+” і “-” міняються місцями. Бівектор e_{12} визначає орієнтовну площу паралелограма, побудованого на векторах e_1, e_2 , тому вісь обертання в $R_{2(2)}$ будемо вважати віссю координат бівектора. Тоді аналогічно (8) маємо

$$e_{12} \varphi_{12\pm} = \pm i \varphi_{12\pm}, e_{12}^2 = -1, \tag{14}$$

де i – уявна одиниця. Комплексифікація $R_{2(2)} \rightarrow R_{2(2)}^{+(+)}$ введенням розшарування уявних координатних осей обертання стала можливою завдяки розширенню для площині поняття симетрії як обертання на кут $\pm 180^\circ$. Бівектор $e_{21} = -e_{12}$ має протилежну орієнтацію і змінює в цілому орієнтацію базисної системи векторів e_1, e_2, e_{21} на $R_{2(2)}^{+(+)}$. Якщо до отриманої системи вектор-операторів симетрії додати тотожну симетрію 1 , то отримаємо систему лінійно незалежних векторів, на яких будується алгебра Кліффорда C_2 над полем дійсних або комплексних чисел:

$$A = a^0 1 + a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^{12} e_{12}. \tag{15}$$

Таблиці множення базисних векторів кватерніонів для правої та лівої орієнтації системи координат

	i	j	k		i^*	j^*	k^*
i	-1	- k	j	i^*	-1	k^*	- j^*
j	k	-1	- i	j^*	k^*	-1	i
- k	- j	i	-1	k^*	j^*	- i^*	-1

Вираз (15) будемо називати агрегатом [10], де a^0 – скаляр, a^1, a^2 – компоненти вектора, а a^{12} – компонента бівектора. В алгебрі C_2 містяться всі три відомі системи комплексних чисел з парами базисів $(1, i), (1, e), (1, \epsilon)$, які мають свої аналоги в C_2 :

- звичайні комплексні числа $a+ib, i^2 = -1, 1 \rightarrow 1; i \rightarrow e_{12}$;
- подвійні числа $a+eb, e^2 = 1, 1 \rightarrow 1; e \rightarrow e_1, e_2$;
- дуальні числа $a+\epsilon b, \epsilon^2 = 0, 1 \rightarrow 1; \epsilon \rightarrow (e_1 + e_{12})$.

За властивостями модулів $|z|^2 = z\bar{z}$, які визначаються виразами $|z|^2 = a^2 + b^2; |z|^2 = a^2 - b^2; |z|^2 = a^2$, ці числа іноді називають еліптичними, гіперболічними або параболічними комплексними числами відповідно [11]. Можливості C_2 цим не обмежуються. Якщо в $R_{2(2)}^{+(+)}$ від базису $(\varphi_{1\pm}, \varphi_{2\pm})$ формально перейти до базису $(i\varphi_{1\pm}, i\varphi_{2\pm})$, то в C_2 маємо новий базис (ie_1, ie_2, e_{12}) у правій системі координат і (ie_1, ie_2, e_{21}) – в лівій. Введемо нові позначення цих векторів (i, j, k) для правої системи координат і (i^*, j^*, k^*) – для лівої. Алгебри Кліффорда (15), побудовані на цих базисних векторах, утворюють системи еліптичних гіперкомплексних чисел, відомі як кватерніони. При цьому історично склалося так, що більшість авторів використовують систему з лівою орієнтацією базисних векторів. Якщо виразити кватерніон через скалярну та векторну частину $Q(a, u)$, то неважко перевірити за допомогою таблиці множення базисних векторів, що добуток двох кватерніонів $Q(a, u)Q(b, v)$ для правої системи координат Q_R і Q_L для лівої системи мають вигляд

$$\begin{aligned} Q_R(ab - u \bullet v, av + bu - u \times v), \\ Q_L(ab - u \bullet v, av + bu + u \times v), \end{aligned} \tag{16}$$

де $u \bullet v$ – позначає скалярний добуток векторів, а $u \times v$ – векторний добуток. Відмінність виразів (16) полягає в різних знаках векторного добутку.

Необхідно зазначити, що базисні вектори кватерніонів Q_R і Q_L за своїми властивостями є бівекторами і утворюють 3-вимірний простір бівекторів B_3 з правою і лівою орієнтацією. Необхідність розглядати орієнтації системи координат пов'язана з тим фактом, що інваріант комплексного, або гіперкомплексного числа, в загальному випадку, утворюється як квадратична форма вихідного і

сполученого числа. Сполучене число в даній роботі вводиться за допомогою операцій симетрії, які змінюють орієнтацію систем координат. Дійсно, розглядаючи агрегат (15) як гіперкомплексне число загального вигляду в 4-вимірному просторі, сполучний агрегат \mathbf{A} будується в базисі:

$$\mathbf{1}, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_{12}. \quad (17)$$

Інваріант або *фундаментальна квадратична форма* (ФКФ), яку визначимо як $|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}$, має вигляд

$$|\mathbf{A}|^2 = (a^0)^2 + (a^{12})^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2. \quad (18)$$

Така невизначена ФКФ відповідає псевдоевклідовому простору $H_4^{(2)}$. Неважко перевірити, що для кватерніонів ФКФ позитивно певна і відповідає евклідовому простору H_4 . Необхідність уважного ставлення до орієнтації систем базисних векторів і бівекторів істотно зростає при переході від 2-вимірного простору до 3-вимірного, який розглядається в наступному розділі. Дійсно, 3-вимірний простір формально включає в себе три орієнтовані площини, в яких визначені ортогональні полярні базисні вектори, а їх орієнтація задається відповідним бівектором. Спільна орієнтація базису полярних векторів, таким чином, тісно пов'язана з орієнтацією базисних бівекторів. За загально прийнятою угодою за замовчуванням використовуються базиси з правою орієнтацією, якщо тільки якісь особливі причини не змушують від нього відійти – і тоді це зумовлюється явно.

5. Алгебра та геометрія E_3 у задзеркаллі

Для отримання третього вектора базису Кліффорда будемо виконувати операцію дзеркальної симетрії (4) для базисного вектора φ_+ в площині $(\varphi_+, \bar{i}\varphi_-)$. Враховуючи орієнтацію цієї площини (рис. 2), для отримання 3-вимірного базису Кліффорда з правою орієнтацією кути α повинні набувати значення $\alpha = -\pi/2, -3\pi/4$. У цьому випадку власні вектори $\varphi_{3\pm}$ і базисний вектор e_3 мають вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_{3+} &= \mathbf{S}_3(-\pi/2)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \\ \varphi_{3-} &= \mathbf{S}_3(-3\pi/4)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Повна алгебра Кліффорда на \mathbf{C}_3 містить вісім базисних векторів:

- скаляр (0-вектор) $a^0\mathbf{1} = A_S$,
- вектор $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = A_V$,
- бівектор $a^{23}\mathbf{e}_{23} + a^{31}\mathbf{e}_{31} + a^{12}\mathbf{e}_{12} = A_B$,
- тривектор $a^{123}\mathbf{e}_{123} = a^{123}\mathbf{i} = A_{PS}$.

Базисний тривектор або псевдоскаляр $\mathbf{i} = \mathbf{e}_{123}$ комутує з усіма векторами і бівекторами, а його властивості визначаються виразами

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{i}^{-1} = \mathbf{e}_{321} = -\mathbf{e}_{123}, \quad \mathbf{i}\mathbf{i}^{-1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{1}, \quad (20)$$

де \mathbf{i} – уявна одиниця. Геометричним образом тривектора є об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах \mathbf{e}_i . Таблицю множення базисних векторів отримуємо досить легко, якщо врахувати, що парні перестановки індексів дають в результаті множник $+1$, а непарні -1 . Алгебра \mathbf{C}_3 включає в себе всі операції звичайної векторної алгебри в класичній механіці [4], однак властивості \mathbf{C}_3 на цьому не обмежуються. Сформуємо систему гіперболічних гіперкомплексних чисел \mathbf{H} і сполучених йому $\bar{\mathbf{H}}$ таким чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= a^0\mathbf{e}_0 + a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, \\ \bar{\mathbf{H}} &= a^0\mathbf{e}_0 - a^1\mathbf{e}_1 - a^2\mathbf{e}_2 - a^3\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (21)$$

де $\mathbf{e}_0 = \mathbf{1}$. Фундаментальна квадратична форма $|\mathbf{H}|^2 = \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}$ має вигляд

$$|\mathbf{H}|^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2. \quad (22)$$

ФКФ (22) відповідає метриці псевдоевклідового простору Мінковського $M_4^{(3)}$. Для того щоб довести, що $\mathbf{H} \in M_4^{(3)}$, визначимо метричний тензор $g_{\alpha\beta}$ через скалярний добуток базисних векторів \mathbf{e}_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), аналогічний виразу для комплексних чисел (3):

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \bullet \bar{\mathbf{e}}_\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\beta + \mathbf{e}_\beta \bar{\mathbf{e}}_\alpha). \quad (23)$$

Якщо використовувати $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n\mathbf{e}_0$ ($n = 1, 2, 3$), то неважко перевірити, що $g_{\alpha\beta}$ має діагональний вигляд з сигнатурою $\text{diag}(g_{\alpha\beta}) = (+1, -1, -1, -1)$. Іншими словами, гіперболічне гіперкомплексне число \mathbf{H} являє собою вектор у псевдоевклідовому просторі Мінковського $M_4^{(3)}$ з ортогональними базисними векторами \mathbf{e}_α , ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). Гіперкомплексне число \mathbf{H} можна розглядати як гіперболічний кватерніон або \mathbf{H} -кватерніон, який, на відміну від звичайних кватерніонів, не утворює тіло і

алгебру з поділом, хоча і з деякими застереженнями. Тим не менш, **H**-кватерніони зі структурою простору Мінковського вимагають подальших досліджень у фізичних задачах. Перші спроби побудови алгебраїчної теорії простору-часу і матерії на основі 2-вимірних гіперболічних чисел вже відомі [13, 14]. У цій роботі відзначимо лише деякі особливості диференціальних операцій над гіперболічними гіперкомплексними числами.

Як і для звичайних комплексних чисел, будемо координати 4-вектора вважати функціями 4-х змінних $a^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Введемо просторово-часовий 4-градієнт як коваріантний вектор у взаємному базисі (e^0, e^n) :

$$\nabla = e^\alpha \partial_\alpha = \nabla(e^0 \partial_0, e^n \partial_n), \quad \partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (24)$$

де використовується правило підсумовування по повторюваних індексах. Сформулюємо умови аналітичності функції $\mathbf{G}(\mathbf{H})$ від гіперболічного гіперкомплексного аргументу, подібні умовам Коші-Рімана для звичайних комплексних чисел. Для цього скористаємося побудовою інваріанта гіперкомплексного числа як його комбінації у вихідному і сполученому базисах (правої і лівої орієнтації системи координат). Для 4-градієнта зв'язок між вихідним і взаємним базисами задається метричним тензором $e_\alpha = g_{\alpha\beta} e^\beta$, тому 4-градієнт у вихідному базисі визначається виразом

$$\bar{\nabla} = \nabla(e_0 \partial_0, \bar{e}_n \partial_n). \quad (25)$$

Умову аналітичності $\mathbf{G}(\mathbf{H})$ запишемо у вигляді рівняння $\bar{\nabla} \mathbf{G}(a^0 e_0, a^n e_n) = 0$. Безпосередні обчислення і прирівнювання нулю компонент скаляра, вектора і бівектора дають в скороченому записі:

$$\partial_0 a^0 = \operatorname{div} \bar{\mathbf{a}}; \quad \partial_0 \bar{\mathbf{a}} = \operatorname{grad} a^0; \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{a}} = 0, \quad (26)$$

де використовується позначення $\bar{\mathbf{a}} = a^n e_n$. Якщо розглянути простий випадок подвійних чисел, то з (26) випливає

$$\frac{\partial a^0}{\partial x^0} = \frac{\partial a^1}{\partial x^1}; \quad \frac{\partial a^1}{\partial x^0} = \frac{\partial a^0}{\partial x^1}. \quad (27)$$

Вираз (27) відповідає умові гіперболічної аналітичності або h -аналітичності для подвійних чисел [16]. Тому будемо припускати, що умови (26) є розширенням h -аналітичності на випадок гіперкомплексних гіперболічних чисел. Якщо визначити функцію $\mathbf{G}(\mathbf{H})$ як вектор 4-потенціалу

$\mathbf{A}(\varphi^0 e_0, A^n e_n)$, обчислити div другої рівності і підставити результат у першу рівність в (26), одержимо рівняння Максвелла для скалярного потенціалу φ . Можна використовувати інший спосіб, а саме обчислити $\bar{\nabla} \bar{\mathbf{A}}$:

$$\bar{\nabla} \bar{\mathbf{A}} = (\partial_0 \varphi^0 + \operatorname{div} \bar{\mathbf{A}}) e_0 - \partial_0 \bar{\mathbf{A}} - \operatorname{grad} \varphi^0 + i \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}, \quad (28)$$

де $\bar{\mathbf{A}} = A^n e_n$. Вираз (28) містить скаляр $A_S = \partial_0 \varphi^0 + \operatorname{div} \bar{\mathbf{A}}$, вектор $\mathbf{E} = -\partial_0 \bar{\mathbf{A}} - \operatorname{grad} \varphi^0$ і бівектор $i\mathbf{H} = i \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}$. Якщо покласти $A_S = 0$ (калібрування Лоренца (Lorenz gauge condition)) і асоціювати \mathbf{E}, \mathbf{H} з векторами електричного і магнітного полів відповідно, то вираз (28) визначає комплексний вектор Рімана-Зільберштейна (Riemann-Silberstein vector) $\mathbf{R} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$. Необхідно особливо відзначити, що введення сполучення 4-потенціалу $\bar{\mathbf{A}}$ пов'язане з необхідністю зрівнювання орієнтації базисних систем координат у виразі (28). І, нарешті, рівняння $\nabla \mathbf{R} = 0$ включає в себе рівняння Максвелла для вектора \mathbf{R} у вільному просторі $(\epsilon, \mu = 1)$.

6. Перетворення координат у \mathcal{E}_2^{++} та задзеркаллі

Комплексний евклідовий простір \mathcal{E}_2^{++} , в якому виконуються дзеркальні відображення, по суті, є простором власних векторів вектор-операторів симетрії e_i . Тому довільний вектор γ у цьому просторі розкладається по будь-якій парі $(\varphi_{i+}, \varphi_{i-})$ ортогональних власних векторів e_i , і вплив e_i на γ описується виразами

$$\gamma_i = \xi^i \varphi_{i+} + \eta^i \varphi_{i-}; \quad e_i \gamma = \xi^i \varphi_{i+} + (-\eta^i) \varphi_{i-}, \quad (29)$$

де ξ^i, η^i – представлення γ у відповідному базисі. У розділі 3 були розглянуті дзеркальні відображення в \mathcal{E}_2^{++} , які утворюють групу невластних обертань. У цьому розділі будуть розглянуті власні обертаня системи координат \mathbf{V} в \mathcal{E}_2^{++} і в задзеркаллі. Якщо піддати обидві частини виразу (29) деякому перетворенню \mathbf{V} , то неважко отримати зв'язок перетворення в \mathcal{E}_2^{++} і базисних векторів e_i у вигляді

$$e'_i \gamma' = \xi^i \varphi'_{i+} + (-\eta^i) \varphi'_{i-}, \quad (30)$$

де перетворені величини визначаються виразами

$$e'_i = \mathbf{V} e_i \mathbf{V}^{-1} \gamma' = \mathbf{V} \gamma, \quad (31)$$

$$\varphi'_{i+} = \mathbf{V} \varphi_{i+} \varphi'_{i-} = \mathbf{V} \varphi_{i-}.$$

Обмежимося тут унімодулярними перетвореннями \mathbf{V} з детермінантом рівним $+1$. Обертання будемо аналізувати в п'яти площинах \mathcal{E}_2^{++} , які визначаються парами базисних векторів (φ_+, φ_-) ; $(\varphi_+, i\varphi_+)$; $(\varphi_-, \bar{i}\varphi_-)$; $(\varphi_+, \bar{i}\varphi_-)$; $(\varphi_-, i\varphi_+)$. Позначення i для уявної одиниці вказує на те, що уявна вісь координат $\bar{i}\varphi_-$ орієнтовна протилежно уявній осі $i\varphi_+$ (рис. 2). Перетворення базису в дійсній площині (φ_+, φ_-) проти годинникової стрілки описується виразом

$$\begin{aligned}\varphi'_{i+} &= \cos \frac{\alpha}{2} \varphi_+ + \sin \frac{\alpha}{2} \varphi_-, \\ \varphi'_{i-} &= -\sin \frac{\alpha}{2} \varphi_+ + \cos \frac{\alpha}{2} \varphi_-.\end{aligned}\quad (32)$$

Матриця, що описує обертання базису на кут $\alpha/2$ навколо розшарування уявних осей, має вигляд

$$\mathbf{V}(\alpha/2) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Перетворення базису в площині $(\varphi_+, \bar{i}\varphi_-)$ на кут $\beta/2$ навколо осі φ_- в напрямку від осі φ_+ до позитивного напрямку осі $\bar{i}\varphi_-$ (за годинниковою стрілкою) має вигляд

$$\begin{aligned}\varphi'_{i+} &= \cos \frac{\beta}{2} \varphi_+ + \sin \frac{\beta}{2} (i\varphi_-), \\ (i\varphi_-)' &= -\sin \frac{\beta}{2} \varphi_+ + \cos \frac{\beta}{2} (i\varphi_-).\end{aligned}\quad (34)$$

Такий напрям обертання вибрано з міркувань позитивної визначеності кута β . Множенням другої рівності в (34) на $-i$ обертання навколо осі φ_- в площині $(\varphi_+, i\varphi_-)$ перетворюється в відповідне обертання близько розшарування уявних осей в площині (φ_+, φ_-) . Матриця такого перетворення має вигляд

$$\mathbf{V}(\beta/2) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & i \sin \frac{\beta}{2} \\ i \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Перетворення базису в площині $(\varphi_-, i\varphi_+)$ на кут $\gamma/2$ навколо осі φ_+ проти годинникової стрілки описується подібно (35), а матриця перетворення має вигляд

$$\mathbf{V}(\gamma/2) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & i \sin \frac{\gamma}{2} \\ i \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Перетворення в площинах $(\varphi_+, i\varphi_+)$ і $(\varphi_-, \bar{i}\varphi_-)$ – спільне перетворення пари комплексних чисел і в загальному вигляді описується виразом

$$\mathbf{V}(k, \delta/2) = \begin{pmatrix} k \exp(i\delta/2) & 0 \\ 0 & k^{-1} \exp(-i\delta/2) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Перетворення вигляду (37) – гомотетія (стиснення-розширення) з поворотом у комплексній площині.

Для аналізу перетворень базису в задзеркаллі перенумеруємо базисні вектори \mathbf{e}_i таким чином, щоб компоненти вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$ у задзеркаллі $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ відповідали матричному поданню:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Матриці перетворення координат (33), (35)–(37) можна розкласти по базису Кліффорда $(\mathbf{1}, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$ і визначити обертання в задзеркаллі через кватерніонні змінні \mathbf{Q} . Наприклад, обертання (33) перетвориться до вигляду

$$\mathbf{V}(\alpha/2) = \mathbf{Q}(\alpha/2) = \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{1} + \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1. \quad (39)$$

Оскільки $\mathbf{e}'_i = \mathbf{V} \mathbf{e}_i \mathbf{V}^{-1}$, а \mathbf{e}_{31} антикомутують з $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ і комутують з \mathbf{e}_2 , перетворення вектора \mathbf{r} в задзеркаллі запишеться у вигляді

$$\mathbf{r}' = \mathbf{Q}(\alpha)(x\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_3) + y\mathbf{e}_2. \quad (40)$$

Вираз (40) описує обертання навколо базисної осі \mathbf{e}_2 . Аналогічно для перетворення (35) отримаємо обертання навколо базисного вектора \mathbf{e}_1 у вигляді

$$\mathbf{r}' = x\mathbf{e}_1 + \mathbf{Q}(\beta)(y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3), \quad (41)$$

де $\mathbf{Q}(\beta) = \cos \beta \mathbf{1} + \sin \beta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$. Вирази (35), (36) є прикладом ефекту “виродження” за наявності симетрії, в даному випадку симетрії уявних осей. Подібне явище має місце в квантовій механіці, коли енергетичне виродження по спінових станах знімається тільки пониженням симетрії за допомогою магнітного поля. Тому обертання навколо базисного вектора \mathbf{e}_3 будемо описувати виразом (37) і, вважаючи $k = 1$ і $\delta = \gamma$, відповідний кватерніон має вигляд $\mathbf{Q}(\gamma) = \cos \gamma \mathbf{1} + \sin \gamma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$. Для $k \neq 1$ аналогі перетворень 3-вимірного простору невідомі.

Однак у просторі метрики Мінковського змінна k відповідає за перетворення буста спеціальної теорії відносності. Необхідно зазначити, що у виразах (40), (41) дія кватерніона на координати в дужках можлива не тільки зліва-направо, а й зправа-наліво. При цьому необхідно змінити знаки кутів перетворення на протилежні.

7. Обговорення результатів

1. Отримані дзеркальними відображеннями у допоміжному комплексному просторі 2- або 3-вимірні простори в “задзеркаллі” мають базис векторної алгебри Кліффорда. Базисні вектори алгебри Кліффорда e_i , в свою чергу, є операторами симетрії, які описують дві протилежні орієнтації базисного вектора. Ці властивості дзеркальних відображень підкреслюють безпосередній зв’язок алгебри Кліффорда з фундаментальними принципами симетрії. Побудований за допомогою операцій симетрії допоміжний комплексний простір \mathcal{E}_2^{++} , в якому виконуються операції дзеркального відображення, по суті, є простором власних векторів для вектор-операторів симетрії e_i базису Кліффорда. Цей простір має евклідову метрику з ортогональними базисними векторами і не підпадає під класичне визначення спін-простору [21], яке має антисиметричну метрику на ізотропних базисних векторах. Разом з тим, \mathcal{E}_2^{++} має певну схожість з властивостями класичного спін-простору. Це стосується ідентичності виразів для перетворень координат і їх знакової неоднозначності. Однак введення операції сполучення базису Кліффорда на етапі його побудови дозволило в певному сенсі вирішити проблему неоднозначності перетворень.

2. Послідовне застосування в алгебрі Кліффорда векторного формалізму комплексних чисел дозволило перевизначити скалярний добуток для базису Кліффорда і коректно ввести для гіперболічних гіперкомплексних чисел метричний тензор $g_{\alpha\beta}$ ортогонального базису простору Мінковського $M_4^{(3)}$. Для цього простору отримано умови h -аналітичності функцій від гіперкомплексного аргументу, аналогічні умовам Коші-Рімана комплексних чисел. При цьому в умовах h -аналітичності в неявному вигляді присутні рівняння Максвелла для 4-потенціалу у вільному просторі.

3. У векторному трактуванні гіперкомплексних чисел важливу роль виконує орієнтація системи координат. Зміні орієнтації системи базисних ве-

кторів гіперкомплексних чисел відповідає операція сполучення в комплексних числах. Побудова інваріанта або модуля комплексного числа як композиції сполучених чисел відповідає для гіперкомплексних чисел композиції чисел в лівій і правій орієнтації системи координат. Саме на підставі цих міркувань і отримано умови h -аналітичності. Облік орієнтації систем координат дозволив також розрізнити праві і ліві кватерніони, тим самим підкреслюючи векторний характер алгебри Кліффорда.

Дякую професору В.І. Висоцькому за цінні зауваження та обговорення, які дозволили розглянути цю роботу під іншим кутом зору.

1. Ю.С. Владимиров, *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1* (Изд. МГУ, Москва 1996); *Часть 2*, (Изд. МГУ, Москва 1998).
2. А.П. Ефремов, *Кватернионные пространства, системы отсчета и поля* (Изд. РУДН, Москва, 2005).
3. А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев, *Кватернионы в релятивистской физике* (Редакционный журнал, УРСС, 2003).
4. D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics* (Kluwer Academic, New York, 2002).
5. D. Hestenes, *Clifford Algebra to Geometric Calculus* (D. Reidel, Dordrecht, 1987).
6. H. Weyl, *Symmetry* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956).
7. Sh.-T. Yau and S. Nadis, *The Shape of Inner Space: String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions* (Basic Books, New York, 2010), p. 151.
8. А.Н. Капустин, Д.О. Орлов, *Успехи математических наук* **59**, вып. 5(359), 101 (2004).
9. É. Cartan, *Leçons sur la Théorie des Spinors* (Hermann, Paris, 1938).
10. П.К. Рашевский, *Успехи математических наук* **10**, вып. 2(64), 110, (1955).
11. И.М. Яглом, *Комплексные числа и их применение в геометрии* (Издательство Физико-математической литературы, Москва, 1963).
12. E. Hitzler, *SICE J. Control Meas.* **4**, 1 (2011).
13. Д.Г. Павлов, С.С. Кокарев, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* **7**, вып. 1(13), 78 (2010).
14. Д.Г. Павлов, С.С. Кокарев, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* **7**, вып. 2(14), 11 (2010).
15. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time, Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).
16. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели* (Наука, Москва, 1973).

17. D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus, A Unified Language for Mathematics and Physics* (Kluwer, Dordrecht, 1984).
18. С.В. Терехов, Вестник Новгородского Государственного Университета, № 26, 56 (2004).
19. А.Л. Глебов, Теоретическая и математическая физика **48**, № 3, 340 (1986).
20. Е. Вигнер, Успехи физических наук **83**, вып. 4, 729 (1964).
21. Ю.Б. Румер, *Спинорный анализ* (Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, Москва, 1936).
22. V.I. Vysotskii and M V. Vysotskiy, Eur. Phys. J. A **44**, 279 (2010).

Одержано 27.05.14

Ю.В. Хорошков

ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ
КАК ОСНОВА ПОСТРОЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО
КОНТИНУУМА

Р е з ю м е

С помощью зеркального отражения 1-мерного ориентированного множества в специально созданном на основе симметрии комплексном пространстве строится в зазеркалье

пространство размерности $n > 1$. Геометрия полученного пространства описывается алгеброй Клиффорда. На основе алгебры гиперболических гиперкомплексных чисел строится псевдоевклидовое пространство с метрикой пространства Минковского. Получены условия аналитичности функции от гиперболического гиперкомплексного аргумента (h -аналитичность), в которых в неявном виде содержатся уравнения Максвелла для 4-потенциала в свободном пространстве.

Yu. V. Khoroshkov

MIRROR SYMMETRY
AS A BASIS FOR CONSTRUCTING
A SPACE-TIME CONTINUUM

S u m m a r y

By mirroring a one-dimensional oriented set in a complex space specially created on the basis of a symmetry, a mirror n -dimensional space with $n > 1$ has been constructed. The geometry of the resulting space is described by the Clifford algebra. On the basis of the algebra of hyperbolic hypercomplex numbers, a pseudo-Euclidean space has been constructed with the metric of the Minkowski space. The conditions for a function of a hyperbolic hypercomplex argument to be analytic (h -analyticity) are obtained. The conditions implicitly contain the Maxwell equations for the 4-potential in a free space.