

В.В. ГОЖЕНКО

Інститут фізики НАН України

(Просп. Науки, 46, Київ 03028; e-mail: vigo@iop.kiev.ua)

УДК 539

## ПРО ЕФЕКТИВНУ МАСУ ЕЛЕКТРОНА ЗА ПЕНДРІ

У 1996 р. англійський фізик-теоретик Дж. Пендрі, пояснюючи діелектричний відгук металевих сіток, висунув ідею про залежність ефективної маси електрона від магнітного поля. Ця ідея ґрунтується на відомому співвідношенні між кінематичним і канонічним імпульсами заряду, що рухається в магнітному полі. В даній статті, виходячи з універсальності зазначеного співвідношення, досліджується можливість застосування поняття ефективної маси електрона за Пендрі  $m_{\text{eff}}$  не лише до електронів у металевих сітках, а й до більш широкого кола задач про рух зарядів у магнітному полі. Встановлено загальні властивості ефективної маси  $m_{\text{eff}}$ , які впливають безпосередньо з її означення. Виявлено аналогію між  $m_{\text{eff}}$  та ефективною масою електронів  $m^*$ , що розглядається у теорії твердого тіла. Запропоновано фізичну інтерпретацію  $m_{\text{eff}}$ . На кількох прикладах показано, що, незважаючи на універсальність використовуваного в означенні  $m_{\text{eff}}$  співвідношення між кінематичним і канонічним імпульсами, застосування поняття  $m_{\text{eff}}$  поза межами проблематики діелектричного відгуку металевих сіток не дозволяє одержати правильні результати.

*Ключові слова:* ефективна маса, магнітне поле, канонічний імпульс, гамільтоніан.

## 1. Вступ

Поняття ефективної маси носіїв заряду широко використовується для опису різноманітних явищ, що відбуваються в металах і напівпровідниках. Зокрема, воно використовується в теорії електропровідності, ефекту Холла і циклотронного резонансу в металах [1–3].

В теорії твердого тіла ефективна маса електронів провідності  $m^*$  зазвичай визначається з їхнього закону дисперсії  $E(\mathbf{k})$  ( $E$  і  $\mathbf{k}$  – енергія і хвильовий вектор електрона). Наприклад, у найпростішому випадку ізотропного квадратичного закону дисперсії [3]:

$$m^* \equiv \left( \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)^{-1}.$$

Відмінність  $m^*$  від маси спокою  $m$  вільних електронів зумовлена, як відомо, взаємодією електро-

нів провідності твердого тіла з періодичним внутрішньокристалічним полем. Внаслідок цієї взаємодії електрони всередині твердого тіла прискорюються під дією зовнішніх електромагнітних полів не як вільні частинки з масою  $m$ , а як деякі уявні частинки (квазічастинки) з масою  $m^*$ . За експериментальними даними, величина  $m^*$  може значно (на 1-2 порядки) відрізнятись від  $m$  [4].

У випадку анізотропної дисперсії ефективна маса електрона залежить від напрямку його прискорення. В цьому випадку динамічні властивості електрона характеризують не одним скаляром  $m^*$ , а набором трьох скалярів  $m_i^*$  ( $i = x, y, z$ ), що є оберненими до головних значень тензора обернених ефективних мас електрона [3]:

$$(m^*)_{ij}^{-1} = \left( \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j} \right).$$

Варто зауважити, що ефективна маса  $m^*$  (або  $m_i^*$ ) визначається особливостями енергетичного спектра електронів в тому чи іншому твердому тілі

і є функцією хвильового вектора  $\mathbf{k}$ , а також температури і тиску [5].

В 1996 р. Пендрі та ін. [6], розглядаючи частотну залежність діелектричної функції металевих сіток, ввели поняття залежної від магнітного поля ефективної маси електронів. На відміну від ефективної маси електронів  $m^*$ , яка розглядається в теорії твердого тіла, введена в [6] ефективна маса  $m_{\text{eff}}$  (будемо називати її ефективною масою за Пендрі) визначається на основі відомого з класичної механіки співвідношення між кінематичним і канонічним імпульсами зарядженої нерелятивістської безспінової частинки, що рухається в магнітному полі (як і в [6–8], всюди в даній статті використовуються одиниці СІ):

$$m_{\text{eff}}\mathbf{v} \equiv \mathbf{P}, \quad (1)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$  та  $\mathbf{P} \equiv \partial L/\partial \mathbf{v}$  – кінематичний та канонічний імпульси частинки;  $m$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $q$  та  $L$  – маса частинки, її швидкість, заряд та функція Лагранжа,  $\mathbf{A}$  – векторний потенціал магнітного поля ( $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ ). Використовуючи поняття  $m_{\text{eff}}$ , Пендрі та ін. отримали аналітичний вираз для плазмової частоти  $\omega_p$  сіток, який непогано підтверджується експериментальними даними (див., наприклад, [9, 10]).

Ефективна маса за Пендрі  $m_{\text{eff}}$  кардинально відрізняється від розглядуваної в теорії твердого тіла маси  $m^*$  не лише за своїм означенням, а й за своїми властивостями. Наприклад, на відміну від  $m^*$ , для  $m_{\text{eff}}$  легко досяжними є гігантські значення порядку  $(10^4\text{--}10^6)m$  [6, 7]. Більше того, внаслідок калібровочної інваріантності векторного потенціалу  $\mathbf{A}$ , який фігурує в (2),  $m_{\text{eff}}$  виявляється неоднозначно визначеною величиною [11]. З огляду на це висловлювались критичні зауваження стосовно як коректності самого означення  $m_{\text{eff}}$  [11], так і реальності тих передбачень, до яких призводить використання  $m_{\text{eff}}$  [12, 13].

Критичні зауваження щодо  $m_{\text{eff}}$  спонукали деяких авторів шукати шляхів виведення основних результатів роботи [6] без залучення поняття  $m_{\text{eff}}$ . Успішність цих пошуків [14–17] свідчить про те, що, незважаючи на продемонстровану Пендрі та ін. продуктивність цього поняття, його введення не є необхідним для пояснення діелектричного відгук металевих сіток. Тим не менш, в останніх моно-

графіях з метаматеріалів [7, 8] цей відгук пояснюється саме із залученням  $m_{\text{eff}}$ .

Чи можна використовувати поняття  $m_{\text{eff}}$  поза межами проблематики роботи [6]? Співвідношення (2) між  $\mathbf{p}$  і  $\mathbf{P}$  є досить загальним і використовується не лише в класичній, а й у квантовій механіці. Виходячи з його універсальності і керуючись принципом єдності фізики, можна сподіватися на те, що і поняття  $m_{\text{eff}}$  має бути застосовним до розгляду широкого кола задач (як класичних, так і квантово-механічних) про рух зарядів у магнітному полі. Проте можливість такого застосування до цього часу ніким не розглядалася.

До цього часу не розглядалося і питання інтерпретації  $m_{\text{eff}}$ . Відсутність такої інтерпретації, яка була б сумісною хоча б з результатами роботи [6], залишає низку запитань щодо фізичного змісту ефективної маси  $m_{\text{eff}}$ . Наприклад, чи характеризує  $m_{\text{eff}}$  інертні властивості електрона в магнітному полі? Зокрема, чи означає співвідношення  $m_{\text{eff}} = 10^4 m$ , що інертна (а внаслідок принципу еквівалентності Ейнштейна – і гравітаційна) маса електрона збільшується в магнітному полі на чотири порядки? Твердження типу “електрони стають такими ж важкими, як і атом водню” ([6], с. 4775) ґрунтуються на вільній трактовці співвідношення  $m_{\text{eff}} = 10^4 m$ , а не на фізичній інтерпретації власне  $m_{\text{eff}}$ , і скоріше заплутують ситуацію, аніж прояснюють її.

Варто нагадати, що аналогічні питання стосовно “звичайної” ефективної маси  $m^*$  електронів у твердому тілі виникали в період становлення теорії твердого тіла у 30-і роки ХХ ст., зокрема під час дискусій щодо інтерпретації результатів класичних експериментів Толмена і Стюарта [18] та Барнетта [19]. Відповіді на них було знайдено лише після появи належної інтерпретації  $m^*$ , яка ґрунтується на означенні і властивостях  $m^*$  (див., наприклад, [20]).

Питання щодо інтерпретації запропонованої Пендрі та ін. ефективної маси  $m_{\text{eff}}$  можна було б так само зняти після детального аналізу властивостей  $m_{\text{eff}}$ , які випливають з її означення. Проте такий аналіз, наскільки відомо автору даної роботи, до цього часу ніким не був проведений.

Метою даної роботи є (а) встановлення загальних властивостей ефективної маси  $m_{\text{eff}}$ , які випливають безпосередньо з її означення, (б) формулювання фізичної інтерпретації  $m_{\text{eff}}$ , яка була б сумі-

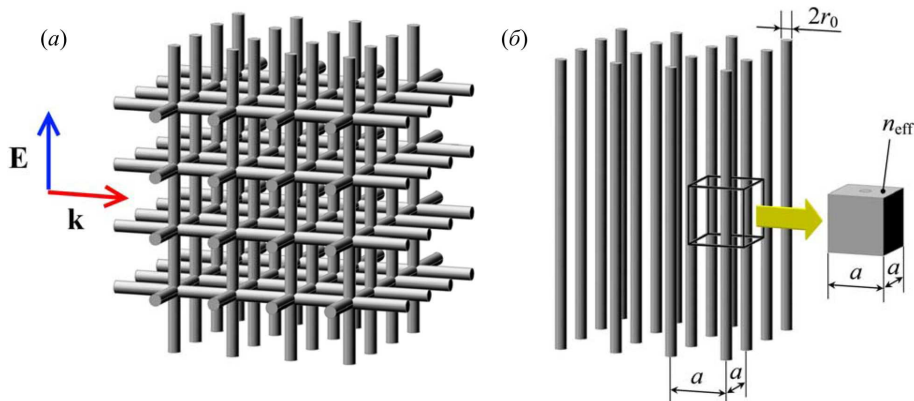


Схема металевої сітки, що збуджується зовнішньою електромагнітною хвилею. Електричні коливання виникають в тих провідниках сітки (їх називають *активними*), які є паралельними до вектора  $\mathbf{E}$  падаючої хвилі. При довільній орієнтації  $\mathbf{E}$  відносно сітки активними будуть, взагалі кажучи, всі провідники (а). Підґратка активних провідників кубічної металевої сітки. При гомогенізації такої підґратки її елементарна комірка, яка охоплює сегмент провідника довільної довжини, розглядається як така, що заповнена однорідною електронною плазмою з концентрацією  $n_{\text{eff}}$  (б)

сна, як мінімум, з підтвердженими результатами роботи [6], і (в) аналіз застосування  $m_{\text{eff}}$  поза проблематикою металевих сіток – у більш широкому колі задач про рух зарядів у зовнішньому магнітному полі, коли має місце закладений в означення  $m_{\text{eff}}$  зв'язок між  $\mathbf{p}$  та  $\mathbf{P}$ .

Статтю організовано наступним чином. В розділі 2 наведено основні результати роботи [6], які стосуються ефективної маси  $m_{\text{eff}}$  електронів в металевих сітках і плазмової частоти  $\omega_p$  цих сіток. Мета цього розділу – не лише продемонструвати спосіб, у який поняття  $m_{\text{eff}}$  використовується для розв'язання конкретної задачі, а й надати читачеві, незнайомому з цим поняттям, деяку початкову інформацію щодо  $m_{\text{eff}}$  (як от порядок величини  $m_{\text{eff}}$  і залежність від параметрів задачі). В розділі 3, виходячи з означення (1), встановлюються загальні властивості  $m_{\text{eff}}$  і пропонується інтерпретація  $m_{\text{eff}}$ . В розділі 4 розглядаються декілька прикладів функціонування поняття  $m_{\text{eff}}$  в різних ситуаціях руху заряджених класичних або квантових частинок у магнітному полі.

## 2. Ефективна маса електрона в металевих сітках

Металеві сітки являють собою, як правило, тривимірні періодичні структури, виготовлені з тонких металевих провідників (рисунок, а). Такі сітки досліджуються вже більш як півстоліття – спочатку як штучні діелектрики, а на сучасному етапі як

фотонні кристали і метаматеріали (короткий історичний екскурс див. у [21]). В галузі метаматеріалів сітки найчастіше називають *сітчастими метаматеріалами* і зазвичай використовують в ролі середовищ з від'ємною ефективною діелектричною проникністю  $\epsilon_{\text{eff}}$ . Оскільки діелектрична функція  $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)$  сіток має, як це було встановлено ще в 60-ті роки, друдівський вигляд, від'ємні значення  $\epsilon_{\text{eff}}$  досягаються на частотах, менших за плазмову частоту  $\omega_p$  сітки.

Плазмова частота  $\omega_p$  залежить від параметрів сітки. Знання явного вигляду цієї залежності є важливим як для проектування сіток, так і для інтерпретації експериментальних даних. Для найпростішої моделі кубічної сітки з нескінченних тонких ідеальних провідників ця залежність має вигляд

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{a^2 \ln(a/r_0)}}, \quad (3)$$

де  $a$  – період сітки,  $r_0$  – радіус провідників ( $r_0 \ll a$ ),  $c$  – швидкість світла у вакуумі. Вираз (3) вперше був виведений в [6] з таких міркувань.

Для суцільних середовищ плазмова частота дається, як відомо, формулою Ленгмюра [22]:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}, \quad (4)$$

де  $n$  – концентрація електронів в середовищі,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг та  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл – маса і заряд електрона,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала. Формула (4) елементарно виводиться з розгляду динаміки електронів при плазмових коливаннях.

Плазмова частота кубічної металевої сітки дорівнює плазмовій частоті підґратки її активних провідників. Останню можна розглядати як деяке суцільне середовище (рисунок, б) з ефективною концентрацією електронів:

$$n_{\text{eff}} = \frac{\pi r_0^2}{a^2} n, \quad (5)$$

де  $n$  – концентрація електронів у матеріалі провідників сітки. Крім цього, в [6] запропоновано врахувати, що на динаміку електронів в сітці впливає магнітне поле струмів  $I$ , що виникають в активних провідниках сітки при плазмових коливаннях. Цей вплив можна ефективно представити як зміну маси електронів  $m \rightarrow m_{\text{eff}}$ , де  $m_{\text{eff}}$  визначається формулами (1) і (2), а в якості  $\mathbf{A}$  в (2) потрібно взяти векторний потенціал магнітного поля індукованих струмів  $I$ .

Для нескінченної сітки векторний потенціал  $\mathbf{A}$  струмів  $I$  є періодичним і всередині кожної елементарної комірки сітки, центрованої на осі провідника, може бути розрахований за формулою [6, 9]:

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(a/r), \quad (6)$$

де  $r$  – відстань від осі провідника ( $r \in [r_0, a/2]$ ),  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна стала. Враховуючи  $I = \pi r_0^2 n e v$  ( $v$  є дрейфова швидкість електронів у провіднику) і те, що в ідеальних провідниках електрони рухаються лише по їх поверхні і тому “відчують” поле  $A(r_0)$ , маємо

$$A(r_0) = \frac{\mu_0 r_0^2 n e v}{2} \ln(a/r_0).$$

При цьому для реальних сітчастих метаматеріалів доданок  $eA(r_0)$  в (2) виявляється набагато більшим за кінематичний імпульс  $mv$  електронів провідності (див. чисельний приклад нижче), тому, нехтуючи кінематичним імпульсом, можна вважати

$$m_{\text{eff}} = \frac{eA(r_0)}{v},$$

або

$$m_{\text{eff}} = \frac{\mu_0 r_0^2 n e^2}{2} \ln(a/r_0). \quad (7)$$

Це і є шуканий вираз для ефективної маси електронів (за Пендрі) у металевих сітках. Формула (3) для плазмової частоти сітки тепер легко отримується з формули Ленгмюра (4) підстановкою (5) і (7) замість  $n$  і  $m$ .

Зробимо декілька зауважень стосовно  $m_{\text{eff}}$ .

1. Уявлення про величину ефективної маси електронів у металевих сітках можна одержати з наступного чисельного прикладу [6]. Для сітки з параметрами  $a = 5$  мм,  $r_0 = 1$  мкм (так що  $a/r_0 = 5000 \gg 1$ ), виготовленої з алюмінієвих ( $n = 1,81 \cdot 10^{29}$  м<sup>-3</sup>) провідників, маємо

$$m_{\text{eff}}/m \approx 2,7 \cdot 10^4.$$

Величезна величина цього відношення ( $m_{\text{eff}}/m \gg 1$ ) означає, між іншим, що виконується співвідношення  $eA \gg mv$ , яке було використано при виведенні виразу (7) для  $m_{\text{eff}}$ .

Коефіцієнт розбавлення електронів для розглядуваної сітки дорівнює

$$n_{\text{eff}}/n = a^2 / (\pi r_0^2) \approx 8,0 \cdot 10^6,$$

а плазмова частота сітки виявляється на п'ять порядків меншою за плазмову частоту  $\omega_p(\text{Al})$  об'ємного алюмінію:

$$\frac{\omega_p(\text{Al})}{\omega_p} = \sqrt{\frac{n}{n_{\text{eff}}} \frac{m_{\text{eff}}}{m}} \approx 4,6 \cdot 10^5. \quad (8)$$

Оцінка (8) підтверджується експериментальними даними.

2. Як видно з наведеного прикладу, збільшення маси електронів  $m \rightarrow m_{\text{eff}}$  відіграє суттєву роль у формуванні величини  $\omega_p$ . Врахування одного лише ефекту розбавлення носіїв заряду  $n \rightarrow n_{\text{eff}}$  (який є інтуїтивно зрозумілим) не дозволило б одержати правильні чисельні значення  $\omega_p$ .

3. Згідно з (7), ефективна маса електронів залежить від геометричних параметрів ( $a, r_0$ ) сітки у такий спосіб, що, збільшуючи період  $a$  сітки (тобто переходячи, в граничному випадку, до ізольованого провідника), “можна було б легко одержати електрони з ефективною масою, скажімо, 1 кг” [12].

4. Фізичною причиною збільшення маси електронів у сітках автори [6] вважають взаємну індуктивність  $L$  провідників сітки. Проте при виведенні формул для  $m_{\text{eff}}$  та  $\omega_p$  величина  $L$  ніде не фігурує.

### 3. Властивості та інтерпретація $m_{\text{eff}}$

#### 3.1. Загальні властивості $m_{\text{eff}}$

Одна з властивостей ефективної маси  $m_{\text{eff}}$ , що впливає безпосередньо з її означення – а саме її невизначеність внаслідок калібровочної інваріантності векторного потенціалу  $\mathbf{A}$ , який входить в означення  $m_{\text{eff}}$  – вже була відзначена в [11]. Розглянемо інші властивості  $m_{\text{eff}}$ , які є наслідком означення

$$m_{\text{eff}}\mathbf{v} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \quad (9)$$

і не були ніким відзначені до цього часу.

1. Ефективна маса  $m_{\text{eff}}$  є, взагалі, *тензорною* величиною. Дійсно, при непаралельних  $\mathbf{v}$  і  $\mathbf{A}$  маємо також  $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{P}$ . Непаралельність  $\mathbf{v}$  та  $\mathbf{P}$  означає, що у виразі  $m_{\text{eff}}\mathbf{v} = \mathbf{P}$  величина  $m_{\text{eff}}$  є тензором, а не скаляром. Скалярність  $m_{\text{eff}}$  має місце лише у випадку  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{A}$ .

Аналітичний вираз для тензора  $m_{\text{eff}}$  можна одержати з (9), представляючи вектор  $\mathbf{A}$  як результат дії на  $\mathbf{v}$  деякого оператора  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{v}.$$

Дія  $\mathbf{T}$  зводиться до розтягнення вектора  $\mathbf{v}$  у  $A/v$  разів і повороту його до суміщення з  $\mathbf{A}$ . Виходячи з цього, подамо  $\mathbf{T}$  у вигляді

$$\mathbf{T} = \frac{A}{v}\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi),$$

де  $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$  є оператор повороту на кут  $\varphi$  навколо осі з ортом  $\mathbf{n}$ , причому

$$\varphi = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{A}), \quad n = \frac{v \times \mathbf{A}}{|v \times \mathbf{A}|}.$$

Таким чином, з (9) одержимо

$$m_{\text{eff}} = m \cdot \mathbf{1} + \frac{qA}{v}\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi),$$

або в координатній формі

$$(m_{\text{eff}})_{ij} = m\delta_{ij} + \frac{qA}{v}R_{ij}(\mathbf{n}, \varphi),$$

де  $\mathbf{1} \equiv \{\delta_{ij}\}$  є одиничний оператор ( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера), а елементи  $R_{ij}$  матриці оператора  $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$  мають, як відомо, вигляд (див., наприклад, [23])

$$R_{ij}(\mathbf{n}, \varphi) = \delta_{ij} \cos \varphi - \epsilon_{ijk}n_k \sin \varphi + n_i n_j (1 - \cos \varphi),$$

$\epsilon_{ijk}$  є символ Леві-Чивіті.

2. У випадку, коли ефективна маса  $m_{\text{eff}}$  є скаляром, вона може бути як більшою, так і меншою за масу частинки  $m$ . Більше того,  $m_{\text{eff}}$  може набувати нульового або навіть від'ємні значення.

3. В будь-якому випадку величина та знак  $m_{\text{eff}}$  визначаються взаємним напрямом  $\mathbf{v}$  та  $\mathbf{A}$  і, крім того, співвідношенням між абсолютними величинами доданків  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  і  $q\mathbf{A}$ , що визначають  $m_{\text{eff}}$ . Наприклад, для позитивно зарядженої частинки ( $q > 0$ ) матимемо  $m_{\text{eff}} \leq 0$ , якщо  $\mathbf{v} \uparrow \downarrow \mathbf{A}$  (частинка рухається проти поля  $\mathbf{A}$ ) і  $v \leq qA/m$ .

4. Ефективна маса залежить, взагалі, від часу:  $m_{\text{eff}} = m_{\text{eff}}(t)$ . Це зумовлено тим, що заряджена частинка в своєму русі проходить крізь різні точки простору, де може бути різним як поле  $\mathbf{A}$  (за рахунок його просторової неоднорідності або часової залежності), так і швидкість частинки.

#### 3.2. Аналогія між $m_{\text{eff}}$ та $m^*$

Деякі з зазначених властивостей ефективної маси за Пендрі  $m_{\text{eff}}$  є аналогічними до властивостей ефективної маси  $m^*$  електронів провідності у твердому тілі. Наприклад, в загальному випадку існує анізотропія властивостей як  $m_{\text{eff}}$ , так і  $m^*$ , так що вони описуються відповідними тензорами<sup>1</sup>. Крім цього, для  $m_{\text{eff}}$ , як і для  $m^*$ , можливими є від'ємні значення. Ці властивості, зокрема, відрізняють обидві ефективні маси  $m_{\text{eff}}$  та  $m^*$  від звичайної маси спокою частинок  $m$ , котра завжди є невід'ємною скалярною величиною.

#### 3.3. Інтерпретація $m_{\text{eff}}$

Який фізичний зміст має маса  $m_{\text{eff}}$ ? Чи є вона “реальною”? Чи означають гігантські значення  $m_{\text{eff}}$  для електронів у металевих сітках (і не лише у них, див. далі), що насправді гігантськи збільшується маса електрона  $m$ , так що він стає надзвичайно важким?

<sup>1</sup> Строго кажучи, тензорні властивості має, як було зазначено у Вступі, не сама маса  $m^*$ , а обернена до неї величина  $1/m^*$ .

Припущення про збільшення маси  $m$  електронів у магнітному полі виглядає нефізичним, оскільки ми не можемо вказати ніякий реальний механізм, який міг би відповідати за колосальне збільшення маси електронів за тих фізичних умов, які є в сітках. Проте таке припущення дозволяє отримати правильні кількісні результати стосовно плазмової частоти металевих сіток. Колізію між нефізичністю і практичністю цього припущення можна усунути шляхом належної інтерпретації  $m_{\text{eff}}$ .

Як було зазначено у Вступі, питання щодо фізичного змісту  $m_{\text{eff}}$  є подібними до тих, які свого часу виникали стосовно  $m^*$ . Враховуючи це, а також певну схожість ефективних мас  $m_{\text{eff}}$  та  $m^*$  (не лише термінологічну, див. попередній пункт), можна спробувати інтерпретувати  $m_{\text{eff}}$  в дусі  $m^*$ . А саме, можна вважати, що *реальна заряджена частинка масою  $m$  рухається в магнітному полі з потенціалом  $\mathbf{A}$  під дією електромагнітних сил так, як деяка частинка з таким же зарядом і масою  $m_{\text{eff}}$  рухалася б під дією тих же сил, але за відсутності магнітного поля*. При цьому, як і при інтерпретації ефективної маси  $m^*$  в теорії твердого тіла [5], ключовим є те, що  $m_{\text{eff}}$  дозволяє обчислити прискорення частинки (в даному разі – в магнітному полі) під дією лише електромагнітних сил. Прискорення тієї ж частинки внаслідок дії сил будь-якої іншої природи – наприклад, гравітаційних – залежить від величини її маси спокою  $m$ , яка в магнітному полі залишається такою ж, як і за відсутності поля.

Легко бачити, що запропонована інтерпретація принаймні узгоджується з описаними в розділі 2 результатами для металевих сіток. Чи не буде вона протирічити іншим відомим результатам? Розглянемо декілька прикладів.

#### 4. Ефективна маса $m_{\text{eff}}$ з різних сторін

В даному розділі ми аналізуємо ефективну масу за Пендрі  $m_{\text{eff}}$  у різних ситуаціях руху зарядів у магнітному полі, ігноруючи при цьому проблему неоднозначності вибору потенціалу  $\mathbf{A}$  поля і, відповідно, неоднозначності маси  $m_{\text{eff}}$ . Як і в [6–9], передбачається, що наведені нижче результати є справедливими для деякої калібровки потенціалу  $\mathbf{A}$ , вибір якої не конкретизується і залишається “поза кадром”.

#### 4.1. Електрон в магнітному полі провідника зі струмом

У розділі 2 було показано, що в металевих сітках при належному виборі їх параметрів легко досягти великих (порядку  $10^4 m$ ) значень ефективної маси  $m_{\text{eff}}$  електронів. Оцінимо тепер ефективну масу електрона, який рухається в магнітному полі нескінченно довгого провідника зі струмом. Для поодинокого прямого нескінченного провідника радіусом  $r_0$ , по якому протікає струм силою  $I$ , вектор-потенціал  $\mathbf{A}$  створюваного ним магнітного поля напрямлений паралельно провіднику і має вигляд [24]

$$A(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{r_0} + C \right), \quad (10)$$

де  $r$  – відстань від осі провідника,  $C$  – довільна стала. При виборі  $C = \mu_0 I / (4\pi)$  потенціал (10) має “мінімальну форму”:

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (11)$$

Цей вираз майже збігається з виразом (6) для потенціалу магнітного поля струмів, що індукуються в сітках, відрізняючись від останнього лише заміною  $a \rightarrow r_0$ .

Розглянемо електрон, який рухається зі швидкістю  $v = 1$  мм/с (це є типовий порядок величини дрейфової швидкості електронів у металах при густині струму  $1$  А/мм<sup>2</sup>) на відстані  $r = 1$  м від осі провідника радіусом  $r_0 = 1$  мм, по якому протікає струм  $I = 1$  А. Згідно з (11), потенціал магнітного поля струму в місці знаходження електрона дорівнює  $A \approx 10^{-6}$  Тл·м. При цьому внесок  $eA$  в канонічний імпульс (2) електрона є величиною порядку  $10^{-25}$  кг·м/с, в той час як кінематичний імпульс електрона  $p = mv$  за цих умов є величиною порядку  $10^{-33}$  кг·м/с. Оскільки  $eA/p \approx 10^8$ , то в даному випадку  $m_{\text{eff}} \approx 10^8 m$ .

Звернімо увагу на такі моменти.

1. Для досягнення колосальних значень  $m_{\text{eff}} \approx 10^8 m$  зовсім не потрібно використовувати надсильні магнітні поля або створювати якісь екзотичні фізичні умови. Такі значення зовсім легко реалізувати в звичайних лабораторних умовах.

2. Чи означають великі значення  $m_{\text{eff}}$ , що електрони насправді стають надзвичайно важкими? Якби це було так, то, наприклад, під час пуску

електродвигунів маса обмотки їх роторів (а з нею – і маса двигунів в цілому) збільшувалася б на декілька порядків. Таке, зрозуміло, ніколи не спостерігалось. Запропонована в п. 3.3 інтерпретація дозволяє уникнути помилкової інтерпретації великих значень  $m_{\text{eff}}$  як ефекту збільшення маси  $m$  електронів.

#### 4.2. Електрон в магнітному полі Землі

В більшості електротехнічних задач магнітне поле Землі не береться до уваги, оскільки спричинені ним ефекти є малими. Втім, ефективна маса  $m_{\text{eff}}$  електрона в цьому полі виявляється навіть більшою, аніж в щойно розглянутому прикладі магнітного поля струму.

Дійсно, індукція магнітного поля прямолінійного струму на відстані 1 м дорівнює  $B = \mu_0 I / (2\pi r) = 0,2$  мкТл. Магнітне поле Землі поблизу її поверхні дорівнює, як відомо, приблизно 50 мкТл [25], тобто є на два порядки сильнішим. З лінійності зв'язку між  $\mathbf{B}$  та  $\mathbf{A}$  (який є наслідком співвідношення  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ ) впливає, що відповідно на два порядки відрізняються також і потенціали  $A$  цих полів. Враховуючи результати попереднього прикладу, доходимо висновку, що ефективна маса електрона, який рухається з тією ж швидкістю  $v = 1$  мм/с поблизу земної поверхні, відрізняється від маси спокою електрона не на 8, а на 10 (!) порядків.

#### 4.3. Вільні заряди в електричному та магнітному полях

Аналіз руху вільних зарядів в електричних та магнітних полях різноманітних конфігурацій – однорідних або неоднорідних, паралельних або схрещених, стаціонарних або змінних – становить інтерес для кількох розділів фізики (напр., фізики прискорювачів та фізики плазми). Результати цього аналізу є добре відомими (див., напр., [26, 27]) і передбачають, що для правильного опису руху зарядів необхідно враховувати в явному вигляді обидві складові діючої на них сили Лоренца – як електричну складову  $q\mathbf{E}$ , так і магнітну  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . На відміну від цього, в рамках концепції ефективної маси можна виключити магнітне поле і розглядати рух частинки масою  $m_{\text{eff}}$  в одному лише електричному полі (див. п. 3.3). Зрозуміло, що при такому розгляді відтворити вже відомі результати не вда-

ється. Наприклад, замість відомого  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа частинок у схрещених полях  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$ , який являє собою складний рух в площині, перпендикулярній до  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  ([27], с. 587), в рамках концепції ефективної маси отримаємо просто рівноприскорений рух частинки масою  $m_{\text{eff}}$  в напрямі  $\mathbf{E}$ .

#### 4.4. Вплив $m_{\text{eff}}$ на електропровідність

Автори роботи [13] звернули увагу на те, що гігантські значення ефективної маси електронів у металевих сітках мають призводити не лише до зменшення плазмової частоти сіток порівняно з плазмовою частотою матеріала їх провідників, а й до відповідного гігантського зменшення провідності сіток і збільшення джоулевих втрат у них. Це можна пояснити існуванням зв'язку між провідністю  $\sigma$  середовища і масою носіїв заряду у ньому. У випадку електронної провідності [2]

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (12)$$

де  $\tau$  – час релаксації електронів. Для кристалічних твердих тіл  $m$  замінюють на ефективну масу  $m^*$ , яка характеризує динамічні властивості електронів всередині кристала. Для сіток необхідно в (12) виконати заміну  $m \rightarrow m_{\text{eff}}$ , що, враховуючи чисельні оцінки для  $m_{\text{eff}}$ , має наслідком зменшення провідності  $\sigma$  на декілька порядків і, відповідно, збільшення джоулевих втрат. Як відомо, жоден з цих ефектів у сітках не спостерігається.

Враховуючи результати, викладені у п. 4.1 і 4.2, можна стверджувати, що вплив  $m_{\text{eff}}$  на електропровідність мав би бути значним не лише в сітках, а і в суцільних металевих зразках. Наприклад, з результатів п. 4.2 впливає, що в умовах наземної лабораторії провідність і опір звичайного металевого провідника можуть на 10 порядків відрізнятися від значень, які ми отримали б за відсутності магнітного поля Землі. Зрозуміло, що таке передбачення суперечить всій сукупності накопичених експериментальних даних.

#### 4.5. Електрони в твердому тілі

Покажемо тепер, що поняття ефективної маси  $m_{\text{eff}}$  не працюватиме і в квантовій теорії твердого тіла.

Згадаємо спочатку, що ефективна маса  $m^*$  електронів провідності, що використовується в теорії твердого тіла, неявно враховує ефект взаємодії

електронів з періодичним полем  $U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r} + \mathbf{a})$  кристалічної ґратки і дозволяє виключити це поле з рівняння Шредінґера. При цьому гамільтоніан вихідного рівняння Шредінґера

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 + U + V,$$

який описує реальний електрон масою  $m$ , що рухається в періодичному полі  $U$ , зовнішньому магнітному полі з векторним потенціалом  $\mathbf{A}$  та полі  $V$  усіх інших зовнішніх сил (наприклад, електричних і гравітаційних), зводиться до більш простої форми<sup>2</sup>:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 + V, \quad (13)$$

яка відповідає вільній частинці масою  $m^*$  в полях  $\mathbf{A}$  та  $V$  [3].

Чи можна ще більш спростити гамільтоніан електрона в твердому тілі, використовуючи надалі поняття залежної від магнітного поля ефективної маси електрона  $m_{\text{eff}}$ ? Згідно з інтерпретацією  $m_{\text{eff}}$ , гамільтоніан (13) можна було б спростити, виключаючи з нього  $\mathbf{A}$  з одночасною заміною  $m^* \rightarrow m_{\text{eff}}$  (при цьому  $m_{\text{eff}}$  слід розраховувати з (1) та (2), попередньо замінивши в них  $m \rightarrow m^*$ ). В результаті отримаємо гамільтоніан вільної частинки масою  $m_{\text{eff}}$ , що рухається в полі  $V$ :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_{\text{eff}}}\hat{\mathbf{p}}^2 + V.$$

Чи будуть розв'язки рівняння Шредінґера з таким гамільтоніаном збігатися з розв'язками, які відповідають гамільтоніану (13)? Зрозуміло, що ні. (Це є найбільш очевидним у випадку  $V = 0$ .) Вся практика розгляду різноманітних явищ у фізиці твердого тіла, в яких суттєву роль відіграє магнітне поле (наприклад, циклотронного резонансу і ефекту Холла), свідчить про те, що для правильного опису цих явищ слід явним чином враховувати залежність  $\hat{H}$  від  $\mathbf{A}$ . Отже, в рамках концепції ефективної маси  $m_{\text{eff}}$  неможливо відтворити вже відомі результати теорії твердого тіла.

<sup>2</sup> Тут для спрощення розглядаємо найпростіший випадок ізотропного квадратичного закону дисперсії, для якого ефективна маса є скаляром.

## 5. Висновки

Поняття ефективної маси електрона в магнітному полі було введено в [6] при розв'язанні задачі про плазмову частоту металевих сіток. Спосіб введення маси  $m_{\text{eff}}$  суттєво використовує поняття канонічного імпульсу  $\mathbf{P} \equiv \partial L / \partial \mathbf{v}$  зарядженої частинки в зовнішньому електромагнітному полі, а також зв'язок між кінематичним  $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$  і канонічним імпульсами частинки. Поняття канонічного імпульсу є важливим елементом лагранжевого та гамільтонового формалізмів класичної механіки і використовується також і у квантовій механіці. Універсальність цього поняття та зв'язку між  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{p}$  дозволяє сподіватися, що концепція ефективної маси  $m_{\text{eff}}$  може використовуватися не лише в тій конкретній задачі, де її було запроваджено, а й у інших задачах (як класичних, так і квантово-механічних) про рух зарядів у магнітному полі.

Проведений в даній статті аналіз ефективної маси  $m_{\text{eff}}$  показує, що її властивості є досить незвичними – наприклад,  $m_{\text{eff}}$  виявляється, взагалі, тензорною величиною, а в частинних випадках може набувати нульові або навіть від'ємні значення. Існування певної аналогії між  $m_{\text{eff}}$  і відомою в теорії твердого тіла ефективною масою  $m^*$  дозволяє інтерпретувати  $m_{\text{eff}}$  в дусі  $m^*$ , таким чином знімаючи, до певної міри, проблему нефізичності  $m_{\text{eff}}$ , яку різні автори відзначали раніше. Крім того, така інтерпретація  $m_{\text{eff}}$  не протирічить експериментально підтвердженим результатам роботи [6].

Незважаючи на універсальність закладених в означення  $m_{\text{eff}}$  співвідношень, застосування поняття  $m_{\text{eff}}$  поза межами проблематики діелектричного відгуку металевих сіток не дозволяє одержати правдоподібні (або відтворити вже відомі) результати. Наприклад, концепція залежності ефективної маси електронів від магнітного поля веде до висновку про колосальне збільшення опору металів навіть у слабких магнітних полях. Враховуючи це, таку концепцію слід визнати гіпотезою *ad hoc*, яка дозволяє отримати правильні результати лише для однієї конкретної задачі про частоту плазмових коливань у тонких металевих сітках.

1. C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, New York, 2005).
2. Н.У. Ашкрофт, Н.Д. Мермін, *Фізика твердого тіла* (Мир, Москва, 1975), т. 1.



3. А.С. Давыдов, *Теория твердого тела* (Наука, Москва, 1976).
4. *Таблицы физических величин*, под ред. И.К. Кикоина (Атомиздат, Москва, 1976).
5. И.М. Цидильковский, *Электроны и дырки в полупроводниках* (Наука, Москва, 1972).
6. J.B. Pendry *et al.* Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).
7. S.A. Ramakrishna and T.M. Grzegorzczuk, *Physics and Applications of Negative Refractive Index Materials* (CRC Press, Bellingham, 2009).
8. W. Cai and V. Shalaev, *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications* (Springer, New York, 2010).
9. J.B. Pendry *et al.*, J. Phys.: Condens. Matter **10**, 4785 (1998).
10. V.V. Gozhenko *et al.*, Metamaterials **6**, 37 (2012).
11. R.M. Walser, A.P. Valanju, and P.M. Valanju, Phys. Rev. Lett. **87**, 119701 (2001).
12. S.A. Mikhailov, Phys. Rev. Lett. **78**, 4135 (1997).
13. L. Solymar and E. Shamonina, *Waves in Metamaterials* (Oxford University Press, New York, 2009).
14. A.K. Sarychev and V.M. Shalaev, e-print arXiv:condmat/0103145 (2001).
15. S.I. Maslovski, S.A. Tretyakov, and P.A. Belov, Microw. Opt. Tech. Lett. **35**, 47 (2002).
16. R. Marqués, F. Martin, and M. Sorolla, *Metamaterials with Negative Parameters* (Wiley, New York, 2008), Chap. 2.
17. I.S. Nefedov and A.J. Viitanen, in *Theory and Phenomena of Metamaterials*, edited by F. Capolino (CRC Press, New York, 2009), Chap. 15.
18. R.C. Tolman and T.D. Stewart, Phys. Rev. **8**, 97 (1916).
19. S.J. Barnett, Phil. Mag. **42**, 349 (1931).
20. И.М. Цидильковский, УФН **115**, 321 (1975).
21. C.R. Simovski and S.A. Tretyakov, in *Theory and Phenomena of Metamaterials*, edited by F. Capolino (CRC Press, New York, 2009), Chap. 1.
22. L. Tonks and I. Langmuir, Phys. Rev. **33**, 195 (1929).
23. Л. Биденхарн, Дж. Лаук, *Угловой момент в квантовой физике* (Мир, Москва, 1984), т. 1.
24. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике* (Регулярная и хаотическая динамика, Москва, 2002).
25. *Физический энциклопедический словарь*, под ред. А.М. Прохорова (Советская энциклопедия, Москва, 1990), т. 2, с. 81.
26. P.A. Sturrock, *Plasma Physics* (Cambridge University Press, New York, 1994).
27. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999).

Одержано 10.02.14

В.В. Гоженко

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЕ  
ЭЛЕКТРОНА ПО ПЕНДРИ

Резюме

В 1996 г. английский физик-теоретик Дж. Пендри для объяснения диэлектрического отклика металлических сеток выдвинул идею о зависимости эффективной массы электрона от магнитного поля. В основе этой идеи лежит известное соотношение между кинематическим и каноническим импульсами заряда, движущегося в магнитном поле. В данной статье, исходя из универсальности указанного соотношения, исследуется применимость понятия эффективной массы электрона по Пендри  $m_{\text{eff}}$  не только к электронам в металлических сетках, но и к более широкому кругу задач о движении зарядов в магнитном поле. Установлены общие свойства эффективной массы  $m_{\text{eff}}$ , вытекающие непосредственно из ее определения. Выявлена аналогия между  $m_{\text{eff}}$  и эффективной массой электронов  $m^*$ , рассматриваемой в теории твердого тела. Предложена физическая интерпретация  $m_{\text{eff}}$ . На нескольких примерах показано, что, несмотря на универсальность заложенного в определении  $m_{\text{eff}}$  соотношения между кинематическим и каноническим импульсами, использование понятия  $m_{\text{eff}}$  за пределами проблематики диэлектрического отклика металлических сеток не позволяет получить правильные результаты.

V. V. Gozhenko

## ON PENDRY'S EFFECTIVE ELECTRON MASS

Summary

In 1996, J. Pendry, an English theoretical physicist put forward an idea about the dependence of the effective electron mass on the magnetic field, while interpreting the dielectric response of metal wire mesh structures. The idea was based on the well-known relation between the kinematic and canonical momenta of a charged particle moving in the magnetic field. In this paper, proceeding from the universal character of that relation, the applicability of Pendry's effective electron mass  $m_{\text{eff}}$  to the problem of electrons in metal mesh structures, as well as to a wide class of problems for charges moving in the magnetic field, has been examined. The general properties of  $m_{\text{eff}}$  following directly from its definition were found, and an analogy between the effective electron mass  $m_{\text{eff}}$  and  $m^*$  known in the solid-state theory was established. A physical interpretation of  $m_{\text{eff}}$  was proposed. It was demonstrated in several examples that, despite the generality of the defining relation for the effective mass  $m_{\text{eff}}$ , the use of  $m_{\text{eff}}$  beyond the problem of the dielectric response of metal wire mesh structures leads to incorrect results.