

О.М. ЧЕРНЯК

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголобова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03680; e-mail: anchernyak@bitp.kiev.ua)**ДИФУЗІЯ ЧАСТИНОК У ДВОВИМІРНОМУ
ВИПАДКОВОМУ ПОЛІ ШВИДКОСТІ**

УДК 539

На основі детального аналізу порівняно два підходи до опису дифузії частинок у двовимірному випадковому полі швидкості, а саме метод декорельованих траєкторій та наближення моментами. Розглянуто заморожену турбулентність, оскільки вона є найбільш складним тестом для перевірки статистичних теорій. Результати аналітичних наближень порівняно з даними числового моделювання.

Ключові слова: дифузія частинок, випадкове поле, числове моделювання.

1. Вступ

Проблема турбулентного перенесення виникає у широкому колі задач гідродинаміки та теорії плазми і може бути сформульована як задача статистичного опису руху ансамблю частинок у випадковому полі швидкості. Розрізняють два описи, коли рух частинок не впливає на випадкове поле – задача у зовнішніх полях, та навпаки – самоузгоджена задача. Задача у зовнішніх полях є спрощеною у порівнянні з самоузгодженим описом, проте завдяки повному контролю параметрів задачі та прозорому аналізу її результатів вона дає можливість оцінити якість аналітичних наближень.

Еволюція функції розподілу для задачі у зовнішніх випадкових полях визначається нелінійним інтегро-диференціальним рівнянням [1]. Воно встановлює нелокальний зв'язок між часовою похідною функції розподілу частинок та її значеннями в попередні моменти часу. Оскільки не існує методів побудови точного розв'язку такого рівняння, то використовують спрощене локальне у часі параболічне рівняння дифузії з залежним від часу коефіцієнтом дифузії. Коефіцієнт дифузії пов'язаний із кореляційною функцією компонент швидкості вздовж траєкторій руху частинок співвідношенням Тейлора [2, 5]. Такий підхід зводить задачу до встановлення зв'язку між лагранжевими та ейлеровими статистичними величинами. Кореляційні функції компонент швидкості вздовж траєкторій руху називаються лагранжевими і є невідомими для нас. Ейлерові кореляційні функції визначаються у фіксованих точках лабораторної системи

координат і вважаються відомими. Задача полягає у визначенні лагранжєвих кореляційних функцій компонент швидкості за відомими ейлеровими.

Важливість ефектів, пов'язаних із просторовою залежністю траєкторій частинок від випадкового поля, або іншими словами лагранжєвою нелінійністю в задачі, прийнято характеризувати числом Кубо K . Воно є відношенням середньої довжини пробігу частинки за кореляційний час до кореляційної довжини і визначає можливість частинки блукати просторовою структурою поля до моменту його повної зміни.

Малі значення числа Кубо $K < 1$ відповідають слабкій лагранжєвій нелінійності в задачі. При цьому рух частинок можна наближено вважати випадковим, оскільки випадкове поле швидко змінюється у часі. Для таких чисел Кубо є вірною асимптотична оцінка коефіцієнта дифузії $D \sim K^2$, отримана із відомого наближення Корсіна [3, 5]. Проте для сильної лагранжєвої нелінійності $K > 1$ наближення Корсіна та методи, що явно чи неявно на ньому базуються, мають асимптотичну оцінку $D \sim K$ [4]. Це суперечить результатам числового моделювання [6]. Причина розбіжності полягає в тому, що в наближенні Корсіна враховується лише часова, але не просторова, складова загасання кореляцій.

Попри те, що наближення Корсіна непридатне для опису дифузійних процесів у полях з великими кореляційними часами, ми приділимо йому увагу. Це дасть змогу яскравіше проілюструвати різницю між підходами, розглянутими в роботі.

Особливо цікавим для перевірки аналітичних наближень [1] є випадок гранично сильної ла-

гранжевої нелінійності – замороженої турбулентності. В такому разі випадкове поле є статичним, число Кубо нескінченно великим $K \rightarrow \infty$ і рух частинок повністю визначається просторовою структурою поля. Нещодавні числові моделювання для випадку сильної лагранжевої нелінійності $1 < K < \infty$ підтверджують [6] перколяційну асимптотичну оцінку [7] коефіцієнта дифузії $D \sim K^{0,7}$. Показник степеня менший за одиницю відповідає ефекту захоплення частинок випадковим полем. Перколяційний підхід не визначає часову еволюцію дифузійного процесу. Варто підкреслити, що для границі замороженої турбулентності асимптотична оцінка коефіцієнта дифузії є нульовою, а не нескінченністю.

Для опису часової еволюції коефіцієнта дифузії було запропоновано метод декорельованих траєкторій [8, 9] з метою врахувати ефекти захоплення частинок просторовою структурою випадкового поля. Автори роботи [8] зауважують, що метод не може бути отримано із перших принципів, але його застосовність демонструється порівнянням із результатами числового моделювання [6]. Наближення спроможне відтворити перколяційну асимптотичну оцінку коефіцієнта дифузії та якісно правильно відтворити форму часової залежності лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості для випадку як великих $K > 1$, так і малих $K < 1$ значень числа Кубо. Проте, порівняння результатів методу декорельованих траєкторій із прямим числовим моделюванням для гранично сильної лагранжевої нелінійності $K \rightarrow \infty$ не було представлено – наведено лише якісні міркування коректності методу в цьому випадку.

Для випадку замороженої турбулентності нещодавно було запропоновано наближення моментами [10], результати якого якісно узгоджуються із прямим числовим моделюванням. Підкреслимо, що такий підхід не використовує вільних параметрів – лише припущення про замикання рівнянь.

Нашою метою є детальний порівняльний аналіз цих підходів між собою та перевірка їх передбачень результатами прямого числового моделювання для гранично сильної лагранжевої нелінійності $K \rightarrow \infty$. При цьому нас цікавить кращий спосіб наближення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості через відповідні ейлерові кореляційні функції.

Робота організована наступним чином. Базові поняття подано у розділі 2, наближені методи у розділах 3–5, а рівняння числового моделювання описані у розділі 6. Результати та їхнє обговорення наведено у розділах 7–10, висновки у розділі 11.

2. Співвідношення Тейлора

Досліджуючи рух частинок $\chi(\tau)$ у випадковому полі швидкості $\mathbf{v}(\chi(\tau), \tau)$:

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}(\chi(\tau), \tau), \quad (1)$$

Тейлор [2, 5] запропонував статистичний опис для середньоквадратичного відхилення в інтегральній формі

$$\Delta_i(\tau) = \langle \chi_i^2(\tau) \rangle = \int_0^\tau d\tilde{\tau}_1 \int_0^\tau d\tilde{\tau}_2 C_{v_i v_i}^L(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2), \quad (2)$$

де $\langle \dots \rangle$ – усереднення за ансамблем реалізацій, а $C_{v_i v_i}^L(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ – лагранжева кореляційна функція компонент швидкості. Для однорідного та стаціонарного випадку лагранжева кореляційна функція компонент швидкості залежить лише від різниці відповідних моментів часу $\tilde{\tau} = |\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2|$ і має вигляд

$$C_{v_i v_i}^L(\tilde{\tau}) = \langle v_i(\chi(\tau_1 + \tilde{\tau}), \tau_1 + \tilde{\tau}) v_i(\chi(\tau_1), \tau_1) \rangle. \quad (3)$$

При цьому, середньоквадратичне відхилення (2) визначається як

$$\Delta_i(\tau) = \int_0^\tau d\tilde{\tau} (\tau - \tilde{\tau}) C_{v_i v_i}^L(\tilde{\tau}), \quad (4)$$

а залежний від часу коефіцієнт дифузії має вигляд

$$D_i(\tau) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \Delta_i(\tau) = \int_0^\tau d\tilde{\tau} C_{v_i v_i}^L(\tilde{\tau}). \quad (5)$$

Рівняннями (4) та (5) задача статистичного опису руху частинок у випадковому полі швидкості (1) зводиться до визначення невідомої лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості (3).

Одним із можливих підходів до розв'язання цієї задачі є визначення наближеної лагранжевої кореляційної функції через відповідні ейлерові кореляційні функції, які можуть бути розраховані або

знайдені в експерименті. Вони визначаються у фіксованих точках простору і не залежать від траєкторій руху частинок

$$C_{v_i v_i}^E(\chi, \tilde{\tau}) = \langle v_i(\chi_1 + \chi, \tau_1 + \tilde{\tau}) v_i(\chi_1, \tau_1) \rangle. \quad (6)$$

Далі ми розглянемо рівняння (1) для опису двовимірного руху частинок у статичному нестисливому ізотропному гаусовому випадковому полі швидкості $\mathbf{v}(\chi(\tau))$. В такому випадку справедливими є рівняння (3)–(5), а ейлерова кореляційна функція випадкових функцій (6) явно не залежить від часу.

Основним предметом дослідження цієї роботи є порівняльний аналіз різних аналітичних наближень лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості через відповідні ейлерові кореляційні функції у випадку гранично сильної лагранжевої нелінійності $K \rightarrow \infty$. Для такої постановки задачі визначальну роль відіграють ефекти захоплення частинок просторовою структурою випадкового поля швидкості.

3. Наближення Корсіна

Одним із перших наближень, яке широко використовується у фізиці плазми, є наближення Корсіна [3, 5]. В його основу покладено точне рівняння

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) = \int [\mathcal{D}\chi(\tau)] C_{v_i v_i}^{Ec}[\chi(\tau)] P[\chi(\tau); \tau] \quad (7)$$

з ейлеровою кореляційною функцією компонент швидкості $C_{v_i v_i}^{Ec}$ та ймовірністю реалізації $P(\chi, \tau)$ траєкторії $\chi(\tau)$ в точці χ в момент часу τ . Наведена ейлерова кореляційна функція розраховується у лабораторній системі координат, проте залежить від траєкторій частинок як лагранжева кореляційна функція. Для загального випадку неможливо математично строго визначити ейлерову кореляційну функцію $C_{v_i v_i}^{Ec}$ та ймовірність реалізації траєкторії $P(\chi, \tau)$, тому використовуються їхні наближення. Наближення Корсіна припускає статистичну незалежність траєкторій частинок $\chi(\tau)$ від випадкового поля швидкості $\mathbf{v}(\chi)$ та гаусовий розподіл за зміщеннями $\Delta_i(\tau)$ траєкторій частинок. Ці припущення дозволяють у рівнянні (7) замінити умовну ейлерову кореляційну функцію $C_{v_i v_i}^{Ec}$ на звичайну ейлерову кореляційну функцію $C_{v_i v_i}^E$, а невідому ймовірність реалізації траєкторії $P(\chi, \tau)$ на гаусову.

Розглянемо означення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості (3) в інтегральній формі

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) = \langle v_i(\chi(\tau_2)) v_i(\chi(\tau_1)) \rangle = \int d\chi_2 d\chi_1 \times \langle v_i(\chi_2) v_i(\chi_1) \delta(\chi_2 - \chi(\tau_2)) \delta(\chi_1 - \chi(\tau_1)) \rangle. \quad (8)$$

Перше припущення наближення Корсіна дозволяє представити підінтегральне усереднення як добуток двох незалежних усереднень. Оскільки $\chi(\tau)$ траєкторії частинок вважаються статистично незалежними від випадкового поля швидкості $\mathbf{v}(\chi)$, отримаємо

$$\langle v_i(\chi_2) v_i(\chi_1) \delta(\chi_2 - \chi(\tau_2)) \delta(\chi_1 - \chi(\tau_1)) \rangle \approx \langle \delta(\chi_2 - \chi(\tau_2)) \delta(\chi_1 - \chi(\tau_1)) \rangle \times \langle v_i(\chi_2) v_i(\chi_1) \rangle. \quad (9)$$

Для статичного випадкового поля швидкості ейлерова кореляційна функція компонент швидкості означена як

$$\langle v_i(\chi_2) v_i(\chi_1) \rangle = C_{v_i v_i}^E(\chi_2 - \chi_1). \quad (10)$$

Після введення нових змінних $\chi = \chi_2 - \chi_1$, $\tilde{\chi} = \chi_2 + \chi_1$ та підстановки рівнянь (9), (10) у (8), лагранжева кореляційна функція набуває вигляду

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) \approx \int d\chi C_{v_i v_i}^E(\chi) \times \int \frac{d\tilde{\chi}}{2} \langle \delta(\frac{\chi + \tilde{\chi}}{2} - \chi(\tau_2)) \delta(\frac{\tilde{\chi} - \chi}{2} - \chi(\tau_1)) \rangle = \int d\chi C_{v_i v_i}^E(\chi) \langle \delta(\chi - \chi(\tau)) \rangle, \quad (11)$$

де введено позначення для зміщення вздовж траєкторії $\chi(\tau) = \chi(\tau_2) - \chi(\tau_1)$ за час $\tau = \tau_2 - \tau_1$. Друге припущення має вигляд

$$\langle \delta(\chi - \chi(\tau)) \rangle \approx \prod_{i=x,y} \frac{\exp(-\frac{\chi_i^2}{2\Delta_i(\tau)})}{\sqrt{2\pi\Delta_i(\tau)}} = P^{CA}(\chi, \tau). \quad (12)$$

Підстановка виразу (12) в (11) дає лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості у наближенні Корсіна:

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) \approx \int d\chi C_{v_i v_i}^E(\chi) P^{CA}(\chi, \tau). \quad (13)$$

У роботі [4] показано, що для випадку сильної лагранжевої нелінійності $K > 1$ наближений коефіцієнт дифузії має асимптотичну оцінку $D \sim K$. Проте, для діапазону значень $1 < K < \infty$ у числовому моделюванні [6] було отримано асимптотичну оцінку коефіцієнта дифузії $D \sim K^\gamma$ з $\gamma < 1$. Крім того, для рівняння (13) у випадку статичного випадкового поля швидкості $K \rightarrow \infty$ асимптотична оцінка коефіцієнта дифузії виявляється нескінченною, а не нульовою, як це має бути.

У роботі [8] зауважено, що для певних випадків гаусових зміщень існує можливість точно розрахувати $C_{v_i v_i}^{E_c}$ з рівняння (7). Коефіцієнт дифузії, отриманий з використанням такої ейлерової кореляційної функції та ймовірності реалізації траєкторій (12), також має асимптотичну оцінку $D \sim K$ для $K > 1$. Така поведінка розбігається з результатами числового моделювання [6] та теорії перколяції [7], що вказує на помилковість припущення (12) для великих чисел Кубо.

Крім того, з числового моделювання [6] випливає, що розподіл зміщень $P(\chi, \tau)$ має максимум в $\chi = 0$ та довгі степеневі хвости, спричинені процесами захоплення частинок просторовою структурою випадкового поля – частинки рухаються вздовж еквіпотенціальної кривої. Частинки, що перебувають на еквіпотенціальних поверхнях із великою абсолютною величиною потенціалу, рухаються замкненими траєкторіями в досить обмеженій області координатного простору, в той час, як частинки на поверхнях із малим значенням потенціалу можуть зміщуватись на значні відстані.

Це також свідчить про помилковість гаусового розподілу траєкторій за зміщеннями (12) принаймні для випадку $K \rightarrow \infty$. Тому виникає потреба сформулювати підхід, що не ґрунтується на другому припущенні наближення Корсіна.

4. Метод декорельованих траєкторій

Для врахування руху частинок, захоплених випадковим полем, було запропоновано метод декорельованих траєкторій [8, 9]. Для наближення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості без використання припущення про гаусове розбігання траєкторій (12) використовується набір детермінованих траєкторій, які називаються траєкторіями просторової декореляції, або декорельованими траєкторіями. Кожна така траєкторія ви-

значається умовними ейлеровими кореляційними функціями випадкових полів з умовою рівності випадкових полів заданим величинам у початковій точці траєкторій частинок. При цьому спосіб поділу ансамблю реалізацій на підансамблі в методі декорельованих траєкторій не є однозначним: залишається свобода вибору, за якими саме величинами розбивати ансамбль реалізацій на підансамблі. У роботі [8] вибрано спосіб розбиття на підансамблі за найкращим відтворенням результатів числового моделювання з роботи [6]. В цьому методі лагранжева кореляційна функція компонент швидкості наближається як добуток швидкості в початковий момент на середню швидкість в підансамблі вздовж відповідної декорельованої траєкторії, усереднений за всіма підансамблями.

Таким чином, метод декорельованих траєкторій спирається на два припущення: існує набір підансамблів за початковими значеннями випадкових полів в ансамблі реалізацій та існує характерна динаміка частинок для кожного підансамблю, яка описується відповідною декорельованою траєкторією.

Наближення лагранжевої кореляційної функції, запропоноване у роботі [8], формулюється, як повна зважена ейлерова кореляційна функція для ансамблю реалізацій випадкових полів, визначена на декорельованих траєкторіях для всіх підансамблів. Таке формулювання наближення не відображає усіх припущень, використаних у методі декорельованих траєкторій. Тому в цій роботі ми наведемо побудову наближення виходячи з інтегрального представлення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості. Для цього розглянемо ансамбль реалізацій випадкових полів, розбитий на підансамблі за їх початковими значеннями, як запропоновано у роботі [8]:

$$\sigma_0 = \sigma(\mathbf{0}), \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{0}). \quad (14)$$

Аналогічно рівнянню (8) представимо лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості у вигляді інтеграла:

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) = \int d\sigma_0 d\mathbf{v}_0 d\mathbf{v} v_{0i} v_i \times \langle \delta(\sigma_0 - \sigma(\mathbf{0})) \delta(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(\mathbf{0})) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(\chi(\tau))) \rangle. \quad (15)$$

Це співвідношення враховує умови на початкові значення випадкових швидкості та потенціалу.

Оскільки значення σ_0 , \mathbf{v}_0 та \mathbf{v} є числами, незалежними від усереднення, середнє від добутку δ -функцій має вигляд

$$\begin{aligned} & \langle \delta(\sigma_0 - \sigma(\mathbf{0})) \delta(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(\mathbf{0})) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(\chi(\tau))) \rangle = \\ & = \int \frac{d\kappa_{\sigma_0} d\kappa_{\mathbf{v}_0} d\kappa_{\mathbf{v}}}{(2\pi)^5} \exp(-i\kappa_{\sigma_0}\sigma_0 - i\kappa_{\mathbf{v}_0}\mathbf{v}_0 - \kappa_{\mathbf{v}}\mathbf{v}) \times \\ & \times \langle \exp(i\kappa_{\sigma_0}\sigma(0) + i\kappa_{\mathbf{v}_0}\mathbf{v}(0) + i\kappa_{\mathbf{v}}\mathbf{v}(\chi(\tau))) \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

При розрахунку середнього від експоненти врахуємо співвідношення між кореляційними функціями в однакові та різні моменти часу. Усереднення одномоментних компонент випадкової швидкості в силу однорідності, стаціонарності та статистичної незалежності повністю описується другим незвідним моментом:

$$\begin{aligned} & \langle v_i(\chi(\tau)) v_j(\chi(\tau)) \rangle = \langle v_i(\mathbf{0}) v_j(\mathbf{0}) \rangle = \\ & = \delta_{ij} C_{v_i v_j}^L(0) = \delta_{ij} C_{v_i v_j}^E(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким чином, лагранжеві кореляційні функції в початковий момент часу відповідають ейлеровим кореляційним функціям в початковій точці траєкторій руху частинок і є відомими. Усереднення випадкових функцій $\sigma(0)$, $\mathbf{v}(0)$ та $\mathbf{v}(\chi(\tau))$ у різні моменти часу в загальному випадку вимагає врахування вищих моментів, але для простоти ми обмежимося розглядом лише других незвідних моментів

$$\langle v_i(\chi(\tau)) v_j(\mathbf{0}) \rangle = C_{v_i v_j}^L(\tau) \quad (18)$$

та

$$\langle v_i(\chi(\tau)) \sigma(\mathbf{0}) \rangle = C_{v_i \sigma}^L(\tau). \quad (19)$$

Вони є лагранжевими кореляційними функціями в довільний ненульовий момент часу та залишаються невідомими. Отже, враховуючи лише другі незвідні моменти, маємо

$$\begin{aligned} & \langle \exp(i\kappa_{\sigma_0}\sigma(0) + i\kappa_{\mathbf{v}_0}\mathbf{v}(0) + i\kappa_{\mathbf{v}}\mathbf{v}(\chi(\tau))) \rangle \approx \\ & \approx \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\kappa_{\sigma_0}^2 C_{\sigma\sigma}^L(0) + \sum_{i=x,y} \kappa_{v_{0i}}^2 C_{v_i v_i}^L(0)\right)\right) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=x,y} \kappa_{v_i}^2 C_{v_i v_i}^L(0)\right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left(-\sum_{i=x,y} \kappa_{v_i} \kappa_{\sigma_0} C_{v_i \sigma}^L(\chi(\tau))\right) \times \\ & \times \exp\left(-\sum_{i \neq j=x,y} \kappa_{v_i} \kappa_{v_j} C_{v_i v_j}^L(\chi(\tau))\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Праву частину співвідношення (16) можна представити у вигляді добутку

$$\begin{aligned} & \langle \delta(\sigma_0 - \sigma(\mathbf{0})) \delta(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(\mathbf{0})) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(\chi(\tau))) \rangle \approx \\ & \approx P_0(\sigma_0, \mathbf{v}_0) P(\mathbf{v}(\tau), \chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0), \end{aligned} \quad (21)$$

де ймовірність реалізації підансамблю за початковими значеннями випадкових полів має вигляд

$$\begin{aligned} & P_0(\sigma_0, \mathbf{v}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 C_{v_x v_x}^E(\mathbf{0}) C_{v_y v_y}^E(\mathbf{0}) C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{0})}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{v_{0x}^2}{2C_{v_x v_x}^E(\mathbf{0})} - \frac{v_{0y}^2}{2C_{v_y v_y}^E(\mathbf{0})} - \frac{\sigma_0^2}{2C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{0})}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Ймовірність реалізації швидкості \mathbf{v} в точці $\chi(\tau)$ для відповідного підансамблю записується як

$$\begin{aligned} & P(\mathbf{v}(\tau), \chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0) \approx \prod_{i=x,y} \frac{1}{\sqrt{2\pi \Sigma_i(\chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0)}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{(v_i - \Upsilon_i(\chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0))^2}{2\Sigma_i(\chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0)}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Величина

$$\begin{aligned} & \Upsilon_i(\chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0) = \sigma_0 \frac{C_{v_i \sigma}^L(\chi(\tau))}{C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{0})} + \\ & + \sum_{j=x,y} v_{0j} \frac{C_{v_i v_j}^L(\chi(\tau))}{C_{v_j v_j}^E(\mathbf{0})}, \end{aligned} \quad (24)$$

яка визначається через невідомі лагранжеві кореляційні функції (18) та (19), формально відповідає найбільш ймовірній швидкості в підансамблі з дисперсією:

$$\Sigma_i(\chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0) = C_{v_i v_i}^E(\mathbf{0}) - \sum_{\rho=\sigma, v_{x,y}} \frac{(C_{v_i \rho}^E(\chi(\tau)))^2}{C_{\rho\rho}^E(\mathbf{0})}. \quad (25)$$

Підстановка рівнянь (20)–(25) у зважену лагранжеву кореляційну функцію (15) приводить до співвідношення

$$\begin{aligned} & C_{v_i v_i}^L(\tau) \approx \int d\sigma_0 d\mathbf{v}_0 P_0(\sigma_0, \mathbf{v}_0) \times \\ & \times C_{v_i v_i}^L(\chi(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0), \end{aligned} \quad (26)$$

де введено парціальну лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості для підансамблю:

$$C_{v_i v_i}^{L_c}(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0) = v_{0i} \int d\mathbf{v} v_i P(\mathbf{v}(\tau), \boldsymbol{\chi}(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0) = v_{0i} \Upsilon_i(\boldsymbol{\chi}(\tau); \sigma_0, \mathbf{v}_0). \quad (27)$$

Рівняння (26) є наслідком першого припущення методу декорельованих траєкторій: існування підансамблів за початковими значеннями випадкових полів. Воно описує залежність зваженої лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості від параметрів підансамблю.

Важливо підкреслити, що рівняння (26) узгоджується із рівнянням (3) за умови незалежності лагранжевих кореляційних функцій з рівняння (24) від параметрів підансамблю. Таке припущення є наслідком нехтування вищими моментами в усередненні (20).

Нарешті, треба зауважити, що отримана найбільш ймовірна швидкість (24) у підансамблі залежить від невідомих траєкторій частинок. Для їх наближення ми не можемо використовувати припущення про гаусове розбігання траєкторій (12), оскільки воно призводить до асимптотично нескінченного коефіцієнта дифузії для випадку статичного поля. Разом з тим, за оцінками авторів [8], припущення статистичної незалежності траєкторій частинок від випадкового поля (9) не є причиною помилкової асимптотичної оцінки коефіцієнта дифузії. Тому використаємо це припущення та виконаємо інтегрування у рівнянні (11) до того, як буде здійснено усереднення за траєкторіями частинок:

$$C_{v_i v_j}^L(\bar{\tau}) = \left\langle \int d\boldsymbol{\chi} C_{v_i v_i}^E(\boldsymbol{\chi}) \delta(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}(\tau)) \right\rangle \approx \langle C_{v_i v_j}^E(\boldsymbol{\chi}(\tau)) \rangle. \quad (28)$$

Оскільки невідомі кореляційні функції (18) та (19) входять у визначення парціальної лагранжевої кореляційної функції (21), ми вважаємо, що для всіх траєкторій в підансамблі виконується умова (14). Згідно з другим припущенням методу декорельованих траєкторій кожний підансамбль можна охарактеризувати відповідною детермінованою траєкторією. Тоді ми наблизимо усереднену за траєкторіями частинок ейлерову кореляційну функцію випадкових полів, як ейлерову кореляційну функцію вздовж характерної траєкторії частинок:

$$C_{v_i v_j}^L(\bar{\tau}) \approx C_{v_i v_j}^E(\langle \boldsymbol{\chi}(\tau) \rangle). \quad (29)$$

Для визначення такої траєкторії розглянемо умову для підансамблів (14). Вона сформульована лише для однієї точки випадкового поля та означає існування нескінченної кількості полів, які її задовольняють. Опис статистичної поведінки нескінченної кількості скорельованих частинок відповідно до рівнянь (26) та (27) визначається через найбільш ймовірну швидкість в підансамблі (24), яка, в свою чергу, залежить від невідомої характерної траєкторії частинок $\langle \boldsymbol{\chi}(\tau) \rangle$. Математично строго знайти таку траєкторію неможливо. Відповідно до другого припущення методу декорельованих траєкторій її природно наблизити як траєкторію вздовж найбільш ймовірної швидкості:

$$\langle \boldsymbol{\chi}(\tau; \sigma(\mathbf{0}) = \sigma_0, \mathbf{v}(\mathbf{0}) = \mathbf{v}_0) \rangle \approx X_i(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0). \quad (30)$$

Така траєкторія називається траєкторією просторової декореляції, або декорельованою траєкторією, та визначається рівнянням

$$\frac{d}{d\tau} X_i(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0) = \Upsilon_i(\mathbf{X}(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0); \sigma_0, \mathbf{v}_0), \quad (31)$$

яке замикає систему рівнянь в методі декорельованих траєкторій. Інтерпретація декорельованих траєкторій (31) впливає з означень коефіцієнта дифузії (5) та парціальної лагранжевої кореляційної функції (27):

$$D_i(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0) = \int_0^\tau d\bar{\tau} C_{v_i v_i}^{L_c}(\bar{\tau}; \sigma_0, \mathbf{v}_0) = v_{0i} X_i(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0), \quad (32)$$

і являє собою парціальний коефіцієнт дифузії.

У роботі [8] розглянуто різні способи розбиття на підансамблі, наприклад, лише за початковими значеннями випадкового потенціалу, та різні способи замикання, наприклад, з врахуванням загасання лагранжевої кореляційної функції в часі – так звані траєкторії часо-просторової декореляції. Всі вони дають близькі передбачення, але найкраще відтворює результати числового моделювання з роботи [6] розглянутий метод декорельованих траєкторій з підансамблями за початковими величинами випадкових потенціалу та швидкості (14) з траєкторіями просторової декореляції (31). Автори роботи [8] наголошують, що декорельовані траєкторії

не є буквально усередненими траєкторіями частинок. Згідно з нашою інтерпретацією, вони представляють парціальні коефіцієнти дифузії (32) для відповідних підансамблів.

Для змінного в часі випадкового потенціалу у роботі [8] методом декорельованих траєкторій було отримано часову залежність лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості для чисел Кубо $K = 4$ та $K = 160$. Вона якісно, але не кількісно, відтворює результати числового моделювання [6]. Отримана оцінка асимптотичного коефіцієнта дифузії виявилася коректною у широкому діапазоні чисел Кубо: метод узгоджується із квазілінійною оцінкою для випадку малих значень чисел Кубо $K < 1$, а для великих чисел Кубо $K > 1$ відтворює перколяційну оцінку із достатньою точністю.

У роботі [8] дифузія в статичному випадковому полі не порівнювалася із числовим моделюванням. Проте, оскільки траєкторії просторової декореляції є обмеженими замкненими кривими для $\sigma_0 \neq 0$, а коефіцієнт дифузії визначається як інтеграл за всіма траєкторіями ансамблю, автори цієї роботи припускають можливість відтворення субдифузного часозалежного та нульового асимптотичного коефіцієнтів дифузії в рамках запропонованого методу.

Як наголошено у роботі [8], головним припущенням методу є можливість опису характерної еволюції частинок у підансамблі в термінах траєкторії просторової декореляції (31). Згідно з наведеною інтерпретацією, такі детерміновані траєкторії є парціальними коефіцієнтами дифузії (32). Таким чином, метод декорельованих траєкторій замикає рівняння на коефіцієнт дифузії, а не на середньоквадратичне відхилення, як запропоновано у наближенні Корсіна.

Декорельовані траєкторії $X_i(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0)$ (31) залежать від трьох параметрів підансамблю σ_0, \mathbf{v}_0 , за якими в подальшому виконується усереднення (26) як за неперервними величинами. В числовому розрахунку така кореляційна функція з неперервним усередненням наближається дискретною сумою зі скінченною кількістю підансамблів. Оцінка асимптотичного коефіцієнта дифузії для випадкового потенціалу може залежати від кількості декорельованих траєкторій. Тому важливо дослідити залежність декорельованих траєкторій від параметрів підансамблю, а також перевірити коректність

замикання на коефіцієнт дифузії через порівняння з даними прямого числового моделювання.

5. Наближення моментами

Нещодавно, у роботі [10] було запропоновано інше наближення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості для випадку ізотропної замороженої турбулентності. У наближенні моментами ми використовували перше припущення Корсіна (9), але замикали рівняння в інший спосіб. Для ізотропної турбулентності середнє зміщення лагранжевих частинок прямує до нуля і важливою характеристикою, що описує розбігання траєкторій, є другий незвідний момент.

Розглянемо інтегральне представлення лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості (8) із першим припущенням наближення Корсіна (9) у вигляді рівняння (28):

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) = \langle C_{v_i v_i}^E(\boldsymbol{\chi}(\tau)) \rangle. \quad (33)$$

Для ізотропного випадку, означимо ейлерову кореляційну функцію вздовж напрямків швидкості:

$$C_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^E(\boldsymbol{\chi}) = \sum_{i=x,y} C_{v_i v_i}^E(\boldsymbol{\chi}) = C_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^E(|\boldsymbol{\chi}|). \quad (34)$$

Така кореляційна функція залежить лише від абсолютної величини різниці значень просторової змінної траєкторії частинки для двох послідовних моментів часу. В наближенні моментами припускається, що для ізотропної замороженої турбулентності лагранжева кореляційна функція компонент швидкості у нульовому наближенні визначається як відповідна ейлерова кореляційна функція, що залежить від середньоквадратичного відхилення. Разом із припущенням (29) маємо

$$\begin{aligned} C_{v_i v_i}^L(\tau) &\approx \langle C_{v_i v_i}^E(|\boldsymbol{\chi}(\tau)|) \rangle \approx C_{v_i v_i}^E(\langle |\boldsymbol{\chi}(\tau)| \rangle) \approx \\ &\approx C_{v_i v_i}^E(\sqrt{\Delta(\tau)}). \end{aligned} \quad (35)$$

У роботі [10] отримано часову залежність лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості, коефіцієнта дифузії та середньоквадратичного відхилення, які певною мірою кількісно узгоджуються із результатами прямого числового моделювання. Зауважимо, що це наближення, на відміну від методу декорельованих траєкторій, не містить вільних параметрів.

6. Числове моделювання

Ми досліджуємо рух тестових замагнічених частинок у замороженому випадковому електростатичному полі у площині, перпендикулярній до постійного магнітного поля. Траєкторії частинок задовольняють рівняння дрейфового руху:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{[\mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{e}_B]}{\Omega_B}, \quad (36)$$

де $\Omega_B = \frac{eB}{mc}$, а поле визначається як суперпозиція N гармонійних хвиль із гаусовою вагою та амплітудою потенціала ϕ_0

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) = -A\phi_0 \times \\ &\times \sum_{s=1}^N \mathbf{k}_s \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{k}_s}{\Delta k}\right)^2\right) \sin(-\mathbf{k}_s \mathbf{x} + \alpha_s). \end{aligned} \quad (37)$$

Набір хвильових векторів задається різними N_κ абсолютними значеннями з інтервалу $(0, k_{\max})$ у різних N_θ напрямках з дисперсією Δk :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_s &= k_l \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{e}_m = (\cos(\theta_m), \sin(\theta_m)); \\ k_l &= l \delta k = l \frac{k_{\max}}{N_\kappa}, \quad l = 1, N_\kappa; \\ \theta_m &= m \frac{2\pi}{N_\theta}, \quad m = 1, N_\theta; \\ N &= N_\kappa \times N_\theta. \end{aligned} \quad (38)$$

Параметр нормування

$$A = \sqrt{\frac{4k_{\max}}{\Delta k \sqrt{\pi N_\kappa N_\theta}}} \quad (39)$$

визначається з умови $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle = 1$. Кожна реалізація випадкового поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ визначена набором випадкових фаз $\{\alpha_i\}$.

Для зручності числового моделювання використовуємо безрозмірні просторову $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x} \Delta k / (2\pi)$ та часову $\tau = t \sigma \Omega_B / (2\pi)$ змінні, де для амплітуди безрозмірного поля введено позначення $\sigma = e\phi_0 \Delta k^2 / (m\Omega_B^2)$. Підстановка у рівняння (36) дає безрозмірне рівняння дрейфового руху:

$$v_i = \frac{d\chi_i}{d\tau} = \epsilon_{ik} \frac{\partial}{\partial \chi_k} \sigma(\boldsymbol{\chi}), \quad (40)$$

де ϵ_{ik} описує антисиметричний тензор другого рангу з $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = 1$. Ізотропний безрозмірний потенціал $\sigma(\boldsymbol{\chi})$ має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{\chi}) &= \sqrt{\frac{4k_{\max}}{\sqrt{\pi} N_\kappa N_\theta}} \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \sum_{s=1}^N \exp(-\kappa_s^2/2) \cos(\alpha_s - 2\pi \boldsymbol{\kappa}_s \boldsymbol{\chi}), \end{aligned} \quad (41)$$

де $\boldsymbol{\kappa}_s = \mathbf{k}_s / \Delta k$ представляють набір безрозмірних хвильових векторів.

Для неперервної границі $N \rightarrow \infty$ Ейлерова кореляційна функція для потенціалу має вигляд

$$\begin{aligned} C_{\sigma\sigma}^E(\boldsymbol{\chi}) &= \langle \sigma(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_2) \sigma(\boldsymbol{\chi}_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 \boldsymbol{\chi}^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\pi^2 \boldsymbol{\chi}^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (42)$$

і залежить лише від $\boldsymbol{\chi}^2$, тобто є ізотропною. Ейлерові кореляційні функції компоненти швидкості і потенціалу та компонент швидкості визначаються як похідні від кореляційної функції для потенціалу (42)

$$C_{v_i \sigma}^E(\boldsymbol{\chi}) = -\epsilon_{ik} \frac{\partial}{\partial \chi_k} C_{\sigma\sigma}^E(\boldsymbol{\chi}), \quad (43)$$

$$C_{v_i v_j}^E(\boldsymbol{\chi}) = -\epsilon_{ik} \epsilon_{jm} \frac{\partial^2}{\partial \chi_k \partial \chi_m} C_{\sigma\sigma}^E(\boldsymbol{\chi}). \quad (44)$$

Інтегрування рівнянь (40) дає нам лагранжеві траєкторії частинок. Подальше їх усереднення за N_r реалізаціями випадкових полів дає середнє зміщення

$$\langle \boldsymbol{\chi} \rangle(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N_r} \boldsymbol{\chi}_{\{\alpha\}_i}(\tau)$$

та середньоквадратичне відхилення

$$\langle \boldsymbol{\chi}^2 \rangle(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N_r} (\boldsymbol{\chi}_{\{\alpha\}_i}(\tau) - \langle \boldsymbol{\chi} \rangle(\tau))^2.$$

Аналогічно можна визначити і вищі незвідні моменти, які будуть відображати міру відхилення функції розподілу від гаусової.

Ми вибрали $N = 1440$ парціальних хвиль ($N_\kappa = 20$, $N_\theta = 72$) у числовому моделюванні з міркувань, щоб автокореляційна функція потенціалу

$C_{\sigma\sigma}^E(\mathbf{x})$ мала достатньо гладку поведінку. Максимальне абсолютне значення безрозмірного хвильового вектора у числовому моделюванні обмежене значенням $\kappa_{\max} = 2$. Для кожної реалізації електростатичного поля генерується $N = 1440$ випадкових значень фаз хвилі. Число реалізацій N_r в числовому моделюванні зазначено в підписах до рисунків.

7. Аналітичні моделі

Ключовою величиною в обраній постановці статистичного опису руху частинок у двовимірному нестисливому випадковому статичному полі швидкості є лагранжева кореляційна функція компонент швидкості – вона визначає часову та асимптотичну поведінку коефіцієнтів перенесення. Із загальних міркувань випливає, що для випадку гранично сильної лагранжевої нелінійності $K \rightarrow \infty$ асимптотичне значення коефіцієнта дифузії є нульовим. Оскільки лагранжева кореляційна функція компонент швидкості на малих часах є додатною, то на великих часах вона з необхідністю має довгі області від’ємних значень, щоб інтеграл від неї за часом був нульовим. Така поведінка лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості відображає захоплення частинок полем. Частинки рухаються замкненими траєкторіями, які визначаються виключно просторовою структурою випадкового поля. Аналітичні наближення мають коректно відтворювати таку поведінку кореляційної функції.

Рівняння еволюції середньоквадратичного відхилення для наближень Корсіна та моментами отримуємо зі співвідношення Тейлора (4), підставивши в його праву частину наближені лагранжеві кореляційні функції (13). Для наближення Корсіна маємо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{[1 + 2\pi^2 \Delta]^{3/2}}. \quad (45)$$

Для наближення моментами з урахуванням (35), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta &= \frac{\sigma^2}{2} \exp\left(-\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \left(I_0\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) (1 - \pi^2 \Delta) + \right. \\ &\left. + I_1\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \pi^2 \Delta \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Ці рівняння замкнено на середньоквадратичне відхилення Δ , але в різний спосіб. На відміну від

них, рівняння в методі декорельованих траєкторій замикаються на парціальний коефіцієнт дифузії $X_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} X_i &= \exp\left(-\frac{(\pi X)^2}{2}\right) I_1\left(\frac{(\pi X)^2}{2}\right) \left[\pi^2 \sigma_0 \epsilon_{ij} X_j + \right. \\ &+ v_{0j} \left(2\pi^2 X_j X_i + \frac{2X_j X_i}{X^2} - 1 \right) + \\ &+ v_{0i} \left(2\pi^2 X_j^2 + \frac{2X_j^2}{X^2} - 1 \right) \left. \right] + \\ &+ \exp\left(-\frac{(\pi X)^2}{2}\right) I_0\left(\frac{(\pi X)^2}{2}\right) \left[v_{0i} (1 - 2\pi^2 X_j^2) - \right. \\ &\left. - \pi^2 \sigma_0 \epsilon_{ij} X_j + v_{0j} 2\pi^2 X_i X_j \right], X^2 = \sum_{i=x,y} X_i^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Повний коефіцієнт дифузії отримуємо усередненням за підансамблями всіх парціальних коефіцієнтів дифузії з відповідною ймовірністю реалізації підансамблів:

$$\begin{aligned} D_i &= \int d\sigma_0 dv_0 \frac{v_{0i} X_i}{\sqrt{(2\pi)^3 C_{\sigma\sigma}^E(0) C_{v_x v_x}^E(0) C_{v_y v_y}^E(0)}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2C_{\sigma\sigma}^E(0)} - \sum_{j=x,y} \frac{v_{0j}^2}{2C_{v_j v_j}^E(0)}\right). \end{aligned} \quad (48)$$

Метод декорельованих траєкторій та наближення моментами не використовують другого припущення наближення Корсіна (12) про гаусове розбігання траєкторій частинок. Натомість, вони наближено описують поведінку частинок через усереднені величини, а саме: парціальні коефіцієнти дифузії або середньоквадратичне відхилення. Метод декорельованих траєкторій у своїй побудові спирається на ідею врахувати відомі початкові величини для опису руху частинок. При цьому, функціональна залежність лагранжевих кореляційних функцій випадкових полів не залежить від підансамблів, а рівняння на парціальний коефіцієнт дифузії для різних підансамблів відрізняється лише величинами σ_0, v_0 .

У числових розрахунках декорельованих траєкторій ми маємо перейти в рівнянні (48) від інтегралу до дискретної суми за підансамблями. Природно очікувати, що наближення буде точнішим

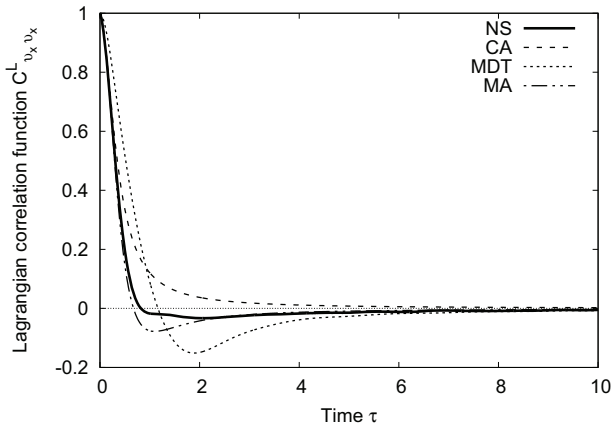


Рис. 1. Лагранжева кореляційна функція компонент швидкості, отримана з числового моделювання (NS), наближення Корсіна (CA), методу декорельованих траєкторій (MDT) (число підансамблів $N_s = 1728 \cdot 10^3$) та наближення моментами (МА) (число реалізацій $N_r = 2 \cdot 10^6$). Область від’ємних значень кореляційної функції описує ефект захоплення частинок

із зростанням кількості підансамблів. Розглянемо уважніше праві частини рівнянь (45)–(47). Права частина рівняння (45) для всіх значень є додатною, в той час, як для рівнянь (46) та (47) може бути також і від’ємною. Звідси одразу можна зробити висновок, що наближення Корсіна (45) не спроможне відтворити нульове асимптотичне значення коефіцієнта дифузії та субдифузну поведінку. Причиною цього є припущення про гаусове розбігання траєкторій, яке не використовується у методі декорельованих траєкторій та наближенні моментами.

Покажемо, що в наближенні моментами лагранжева кореляційна функція компонент швидкості (35) прямує до нуля з області від’ємних значень при прямуванні середньоквадратичного відхилення до нескінченності $\tau \rightarrow \infty$, $\Delta(\tau) \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{v_i v_i}^L(\tau) &= \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \times \\ &\times \left(I_0\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) (1 - \pi^2 \Delta) + I_1\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \pi^2 \Delta \right) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{-1}{4\pi^3 \Delta \sqrt{\pi \Delta}} = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

де використано асимптотику модифікованої функції Бесселя для $|\arg z| < \pi/2$, $|z| \rightarrow \infty$, $\mu = 4\nu^2$:

$$I_\nu(z) \sim \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{\mu - 1}{8z} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{2! (8z)^2} - \dots \right).$$

Крім того, отриманий з такої кореляційної функції коефіцієнт дифузії також асимптотично прямує до нуля при $\tau \rightarrow \infty$, $\Delta(\tau) \rightarrow \infty$. З першого інтеграла маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} D(\tau) &= \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left[\Delta \exp\left(-\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[I_0\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) - I_1\left(\frac{\pi^2 \Delta}{2}\right) \right]^{1/2} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi^7 \Delta)^{1/4}} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

де використано записану вище асимптотику модифікованої функції Бесселя. З наведеної асимптотичної оцінки коефіцієнта дифузії маємо, що на великих часах середньоквадратичне відхилення у наближенні моментами матиме оцінку $\Delta(\tau) \sim \tau^{4/5}$.

Властивості рівняння на декорельовані траєкторії детально розглянуто у розділі 9.

8. Результати моделювання

Наведемо результати числового моделювання для лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості та середньоквадратичного відхилення. На рис. 1 подано лагранжеву кореляційну функцію компонент швидкості, отриману з прямого числового моделювання в порівнянні з трьома наближеними методами на малих часах. Наближення Корсіна не відтворює область від’ємних значень лагранжевої кореляційної функції. Тоді як наближення моментами та метод декорельованих траєкторій на початковому часовому інтервалі якісно описують таку поведінку, але наближення моментами дає кращий результат.

Поведінка кореляційної функції, знайденої з числового моделювання, характеризується флуктуаціями, що зумовлені скінченним числом реалізацій випадкового поля та набору хвиль і зменшуються із зростанням числа реалізацій в числовому моделюванні, що наведено на рис. 2. Важливими характеристиками дифузійного процесу є також коефіцієнт дифузії та середньоквадратичне відхилення. Вони виражаються через інтеграли від кореляційної функції, а значить вплив флуктуацій на їхню поведінку є меншим.

На рис. 3 наведено часові залежності середньоквадратичного відхилення, які дають можливість оцінити кількісні розбіжності аналітичних

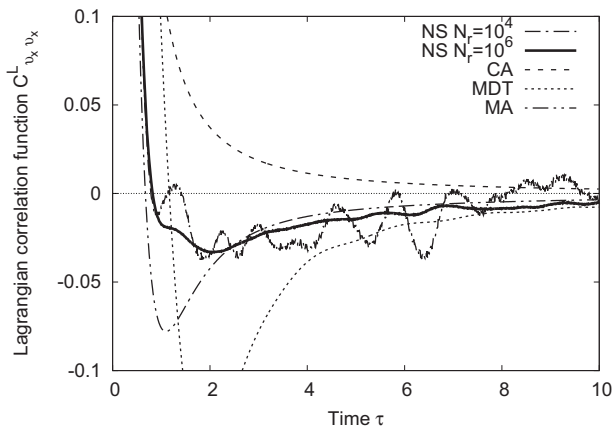


Рис. 2. Збільшений фрагмент графіка лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості. Показано, що необхідно суттєво збільшити число реалізацій в числовому моделюванні (від 10^4 до 10^6) для того, щоб поведінка хвоста кореляційної функції в області від'ємних значень виглядала виразніше

наближень з числовим моделюванням на більших часах. Наближення Корсіна дає помилкову поведінку – середньоквадратичне відхилення на великих часах зростає швидше, ніж лінійно із часом. Наближення моментами якісно відтворює результати числового моделювання – спостерігається субдифузна поведінка середньоквадратичного відхилення.

Метод декорельованих траєкторій дає осциляції середньоквадратичного відхилення, причиною яких є скінченна кількість підансамблів. На рис. 4 наведена поведінка середньоквадратичного відхилення з методу декорельованих траєкторій для трьох різних значень кількості підансамблів N_s . Така залежність від кількості підансамблів може слабше проявлятися у випадку незамороженої турбулентності [8] через пов'язане з нею додаткове експоненційно швидке загасання кореляцій.

Наведена залежність результатів методу декорельованих траєкторій від нефізичного параметра кількості підансамблів вимагає детальнішого аналізу причин такої поведінки. Доречно сформулювати умову на підансамблі для числового моделювання, перевірити розподіли ймовірностей реалізацій підансамблів та припущення про унікальність динаміки у різних підансамблях шляхом числового моделювання. Далі ми проаналізує-

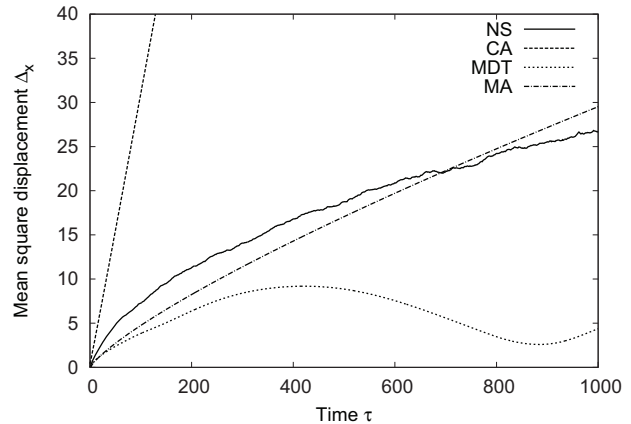


Рис. 3. Середньоквадратичне відхилення для числового моделювання (NS), наближення Корсіна (CA), методу декорельованих траєкторій (MDT) (число підансамблів $N_s = 1728 \cdot 10^3$) та наближення моментами (MA) (число реалізацій $N_r = 2 \cdot 10^4$)

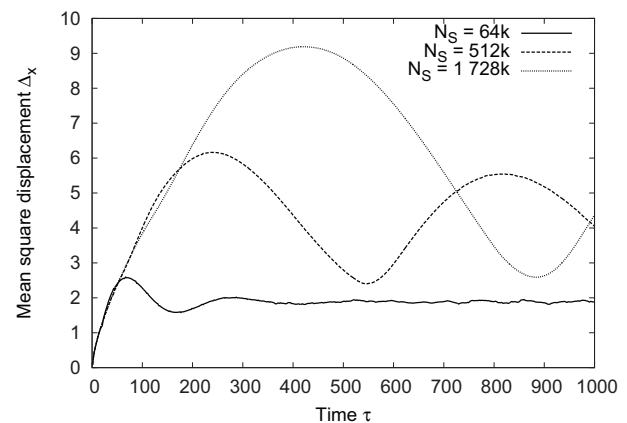


Рис. 4. Середньоквадратичне відхилення, отримане з методу декорельованих траєкторій для різної кількості підансамблів $N_s = 64 \cdot 10^3, 512 \cdot 10^3, 1728 \cdot 10^3$

мо властивості декорельованих траєкторій, їхню залежність від параметрів підансамбля та способу усереднення.

9. Підансамблі

Метод декорельованих траєкторій базується на припущенні про можливість поділу ансамблю реалізацій на підансамблі за набором початкових значень випадкових полів (14). При цьому ймовірність їх реалізації є гаусовою (22). За припущенням методу декорельованих траєкторій кожний підансамбль описує процес загасання кореляцій у відпо-

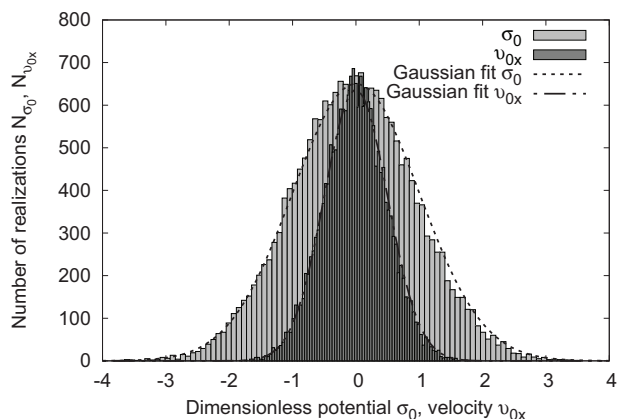


Рис. 5. Розподіл за початковими значеннями потенціалу σ_0 та швидкості v_{0x} з рівнянь (41) та (40) для $N_r = 2 \cdot 10^4$ реалізацій: він є близьким до гаусового

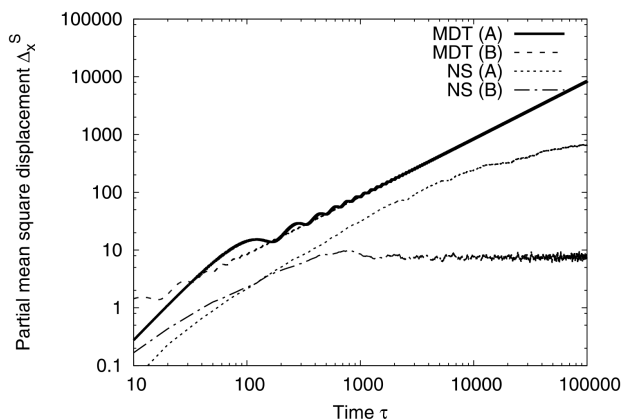


Рис. 6. Середньоквадратичне відхилення в підансамблях $\{\sigma_0, v_{0x}, v_{0y}\}$: (A) $\{0,0032, 0,01, 0,01\}$ та (B) $\{0,032, 0,1, 0,1\}$ з числового моделювання (NS) (число реалізацій $N_r = 10^3$) та методу декорельованих траєкторій (MDT) на великих часах

відній групі частинок (14) в термінах парціального коефіцієнта дифузії.

Розглянемо розподіл початкових значень потенціалу та компоненти швидкості у числовому моделюванні, результати якого наведені у попередньому розділі та подані на рис. 5. Такий розподіл не є тотожним неперервному гаусовому розподілу в методі декорельованих траєкторій. Проте можна вважати, що в граничному випадку нескінченної кількості частинок наведеного на рисунку розподіл прямуватиме до гаусового.

Важливо перевірити чи спостерігається у числовому моделюванні відмінність у динаміці груп ча-

стинок з різних підансамблів, як це припускають у методі декорельованих траєкторій. Розрахуємо парціальні коефіцієнти дифузії та середньоквадратичні відхилення для різних підансамблів та порівняємо їх між собою. Відмінність у динаміці частинок, яка описується і визначається початковими значеннями випадкових полів, для методу декорельованих траєкторій може бути суттєвою. Відповідно до означення парціального коефіцієнта дифузії (31) маємо

$$\frac{\Delta_x(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0)}{\Delta_x(\tau; \alpha\sigma_0, \alpha\mathbf{v}_0)} = \frac{\Delta_x(\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0)}{\Delta_x(\alpha\tau; \sigma_0, \mathbf{v}_0)}. \quad (51)$$

На рис. 6 наведено результати числового моделювання для середньоквадратичного відхилення для двох різних підансамблів $\{\sigma_0, v_{0x}, v_{0y}\}$: (A) $\{0,0032, 0,01, 0,01\}$ та (B) $\{0,032, 0,1, 0,1\}$. Рівняння (31) та (32) дають зростаючу осцилюючи часову залежність середньоквадратичного відхилення для підансамблів. З рисунка видно, що середньоквадратичне відхилення з методу декорельованих траєкторій необмежено зростає та для різних підансамблів має однаковий нахил. Часові залежності відрізняються лише періодом та амплітудою осциляцій. Натомість середньоквадратичне відхилення для різних підансамблів з числового моделювання зростає помітно повільніше, осциляції відсутні. Крім того, часова залежність середньоквадратичного відхилення для різних підансамблів відрізняється суттєво: підансамбль (B) $\{0,032, 0,1, 0,1\}$ виходить на стає значення з певними флуктуаціями при $\tau = 1000$, а підансамбль (A) $\{0,0032, 0,01, 0,01\}$ продовжує зростати протягом всього часу моделювання.

З наведених результатів числового моделювання випливає, що середньоквадратичне відхилення у різних підансамблях є дійсно різним. Проте часова залежність середньоквадратичного відхилення у методі декорельованих траєкторій не узгоджується з розрахунками числового моделювання.

Отже, підансамблі з різною динамікою частинок дійсно існують, але опис такої динаміки в термінах декорельованих траєкторій виявляється недостатнім. Причини можуть полягати як у врахуванні лише других незвідних моментів в усередненні (21), так і в замиканні рівнянь на парціальний коефіцієнт дифузії (31). Далі переходимо до перевірки процедури замикання декорельованих траєкторій.

10. Декорельовані траєкторії

Для того щоб розглянути метод замикання, спочатку детальніше проаналізуємо залежність парціальних коефіцієнтів дифузії від параметрів підансамблю. Зокрема, з аналізу рівняння (47) випливає, що ми маємо три різні класи траєкторій в залежності від параметрів підансамблю: 1) періодичні: $\{\sigma_0 \neq 0, v_{0x,y} \neq 0\}$, з густиною у підансамблі ~ 1 ; 2) відрізок: $\{\sigma_0 = 0, v_{0x,y} \neq 0\}$, з густиною $\sim N_s^{-1/3}$; 3) нульові: $\{\sigma_0 \neq 0, v_{0x,y} = 0\}$, з густиною $\sim N_s^{-2/3}$. Перший клас дає основний внесок у коефіцієнт дифузії – періодичні траєкторії з різною швидкістю обертання, і надалі ми будемо розуміти саме цей клас траєкторій як декорельовані.

На рис. 7 наведено чотири декорельовані траєкторії для різних параметрів σ_0, \mathbf{v}_0 підансамблю. При зміні знаку початкової швидкості $v_{0x,y}$ декорельована траєкторія відбивається відносно відповідної осі, при цьому форма траєкторії не змінюється. Таким чином, можна вважати, що декорельована траєкторія є непарною функцією відносно початкових значень швидкості. Аналогічно, зміна знаку початкового потенціалу призводить до інверсії траєкторії. При масштабуванні параметрів підансамблю σ_0, \mathbf{v}_0 , траєкторія не змінює своєї форми, але змінюється швидкість її обходу, яка визначається початковим потенціалом σ_0 . Саме таким чином пов'язані парціальні дисперсії подані на рис. 5. Зауважимо, що розмір замкненої області визначається відношенням початкової швидкості до значення початкового потенціалу.

Оскільки декорельовані траєкторії є замкнутими, а їхній розмір визначається відношенням \mathbf{v}_0/σ_0 , ми можемо наблизити праву частину рівняння для декорельованих траєкторій (31), розклавши її до першого порядку за $X_{x,y}$. Наближене рівняння легко інтегрується і отримуємо декорельовану траєкторію у першому порядку за $X_{x,y}$:

$$X_i = \frac{v_{0i}}{\pi^2 \sigma_0} \sin(\pi^2 \sigma_0 t) + \epsilon_{ij} \frac{v_{0j}}{\pi^2 \sigma_0} (1 - \cos(\pi^2 \sigma_0 t)). \quad (52)$$

Аналогічно можна отримати наближену декорельовану траєкторію у другому порядку за $X_{x,y}$. На рис. 8 та рис. 9 показано точні та наближені декорельовані траєкторії для двох підансамблів. Для $|\mathbf{X}| \sim 0,01$ ми маємо узгодження наближених та точного розв'язків із відносною похибкою $\epsilon_{0,01} \approx 0,06\%$, для $|\mathbf{X}| \sim 0,1$ маємо відносну по-

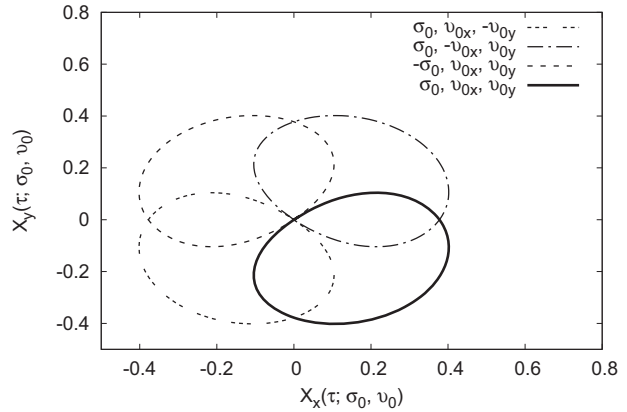


Рис. 7. Симетрії декорельованих траєкторій відповідно до зміни знаку параметрів підансамблю $\{\sigma_0, v_{0x}, v_{0y}\}$

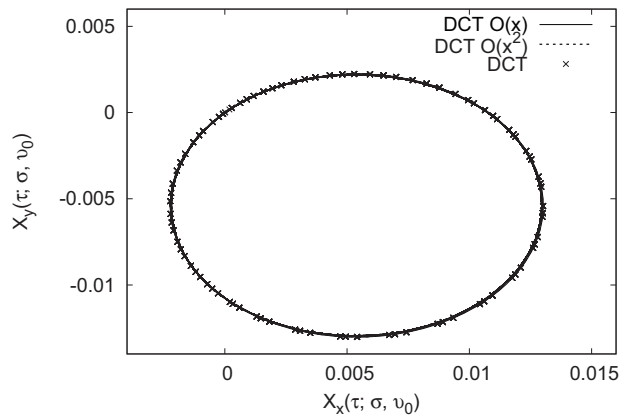


Рис. 8. Точні (DCT) та наближені (DCT $O(X)$), (DCT $O(X^2)$) розв'язки рівняння для декорельованих траєкторій для випадку малих абсолютних значень $|\mathbf{X}| \sim 0,01$

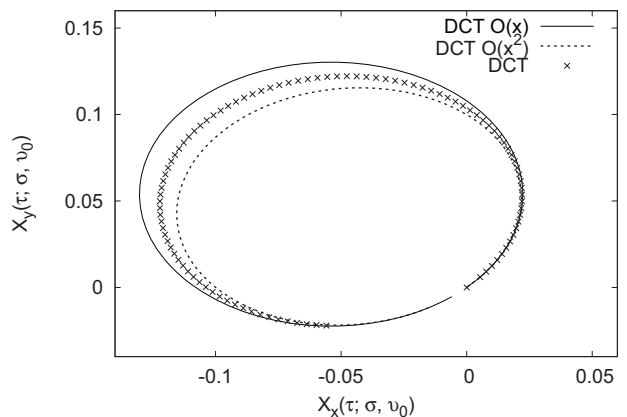


Рис. 9. Точні (DCT) та наближені (DCT $O(X)$), (DCT $O(X^2)$) розв'язки рівняння для декорельованих траєкторій для випадку малих абсолютних значень $|\mathbf{X}| \sim 0,1$

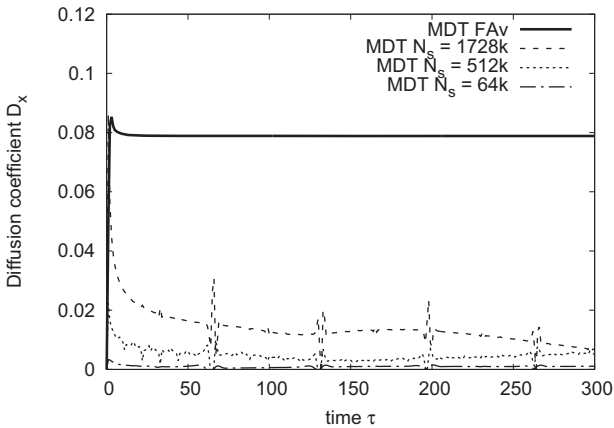


Рис. 10. Коефіцієнт дифузії для методу декорельованих траєкторій із повним проміжним усередненням (MDT FAv) та методу декорельованих траєкторій (MDT N_s) із різною кількістю підансамблів

хибку $\epsilon_{0,1} \approx 7,6\%$. Розбіжність між наближеними та точними траєкторіями зростає швидше, ніж лінійна функція від $|X|$. Важливо відзначити, що при цьому наближення першого порядку дає траєкторію, яка охоплює точну декорельовану траєкторію, а наближення другого порядку охоплюється точною декорельованою траєкторією. Отримані наближення відбивають основні властивості точного рівняння для декорельованої траєкторії, а саме: залежність розміру траєкторії від відношення початкової швидкості до початкового потенціалу v_0/σ_0 та залежність швидкості обходу траєкторії лише від початкового потенціалу σ_0 і, що є важливим, непарну залежність від параметрів підансамблю σ_0, v_0 .

Сказане наводить на думку, що не всі доданки у рівнянні (31) є суттєвими – частина з них буде компенсуватися при усередненні за підансамблями (48). Виконати неперервне усереднення за підансамблями у рівнянні (48) та отримати часову залежність коефіцієнта дифузії для границі нескінченної кількості підансамблів $N_s \rightarrow \infty$ ми не можемо, оскільки не маємо аналітичного розв'язку рівняння для декорельованої траєкторії (31). Тому для усунення залежності середньоквадратичного відхилення від кількості підансамблів в методі декорельованих траєкторій виконаємо усереднення за підансамблями рівняння (48) до того, як буде здійснено процедуру замикавання на коефіцієнт дифузії. При цьому будемо вважати, що симетрія де-

корельованих орбіт, яку ми спостерігали на рис. 7, буде зберігатися для всіх траєкторій. Враховуючи припущення про незалежність усереднених у підансамблі траєкторій від початкових значень потенціалу σ_0 та швидкості v_0 будемо мати

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) = \langle v_i(0)v_i(\tau) \rangle. \quad (53)$$

Аналогічно до рівнянь (28)–(31) отримаємо наближену лагранжеву кореляційну функцію у вигляді

$$C_{v_i v_i}^L(\tau) \approx C_{v_i v_i}^E(\tilde{X}(\tau)), \quad (54)$$

і виконаємо замикавання рівнянь вже на повний коефіцієнт дифузії

$$\tilde{X}_i = \frac{D_i}{\sqrt{C_{v_i v_i}^L(0)}}. \quad (55)$$

Характерною величиною для нормування коефіцієнта дифузії в цьому випадку виберемо лагранжеву кореляційну функцію у початковий момент. В такому наближенні кінцеве рівняння для коефіцієнта дифузії має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} D_i &= \exp\left(-\frac{(\pi D)^2}{2}\right) I_0\left(\frac{(\pi D)^2}{2}\right) (1 - 2\pi^2 D_j^2) + \\ &+ \exp\left(-\frac{(\pi D)^2}{2}\right) I_1\left(\frac{(\pi D)^2}{2}\right) \left(2\pi^2 D_j^2 + \frac{2D_j^2}{D^2} - 1\right), \\ D^2 &= \sum_{i=x,y} D_i^2. \end{aligned} \quad (56)$$

На рис. 10 наведено повний коефіцієнт дифузії, отриманий методом декорельованих траєкторій для різної кількості підансамблів, а також коефіцієнт дифузії, розрахований на основі рівняння (56). В рамках зроблених припущень коефіцієнт дифузії з рівняння (56) є граничним значенням для методу декорельованих траєкторій при $N_s \rightarrow \infty$. Розв'язок рівняння (56) показує, що коефіцієнт дифузії асимптотично не прямує до нуля. Це свідчить про недосконалість способу замикавання рівнянь на парціальний (31) чи повний (55) коефіцієнти дифузії для опису його асимптотики у випадку замороженої турбулентності. Не зовсім очікуваним є той результат, що використання скінченної кількості підансамблів дає дещо кращий результат, коли коефіцієнт дифузії на великих часах осцилює навколо нульового значення.

На скінченних часах метод декорельованих траєкторій дає можливість задовільно відтворювати поведінку середньоквадратичного відхилення за достатньої кількості підансамблів. Тому для випадку незамороженої турбулентності, коли асимптотика не є важливою, він може давати задовільну оцінку.

11. Обговорення та висновки

В роботі порівняно три методи: Корсіна, декорельованих траєкторій та моментів для опису дифузії замагнічених частинок в полі замороженої електростатичної турбулентності, які перевірялися за допомогою прямого числового моделювання. На відміну від наближення Корсіна, метод декорельованих траєкторій дає задовільну оцінку на початковому етапі, але в асимптотиці він не працює. Наближення моментами краще відтворює поведінку лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості та середньоквадратичного відхилення, знайдену в числовому моделюванні, на значно довшому часовому інтервалі.

З числового моделювання випливає, що ідея підансамблів за початковими значеннями випадкових полів має підґрунтя. Але опис поведінки частинок в методі декорельованих траєкторій не відповідає результатам числового моделювання, а повний коефіцієнт дифузії залежить від кількості підансамблів.

З метою проаналізувати обґрунтованість способу замикання в методі декорельованих траєкторій окремо від припущення про підансамблі було приділено увагу типам і вигляду декорельованих траєкторій. Показано, що частина доданків в рівнянні (47) є неважливою і через симетрію траєкторій зникає при усередненні. Врахувавши це, метод декорельованих траєкторій було переформульовано для нескінченної кількості підансамблів. Він враховує лише ключові величини і дозволяє виокремити вплив способу замикання. В результаті було встановлено, що замикання на коефіцієнт дифузії у методі декорельованих траєкторій не дає тієї часової залежності для лагранжевої кореляційної функції компонент швидкості, що спостерігалась в числовому експерименті. Крім того, отриманий в такий спосіб асимптотичний коефіцієнт дифузії виявляється не нульовим.

Таким чином, порівняння двох підходів з результатами числового моделювання показало, що за-

микання в методі моментів на середньоквадратичне відхилення є більш вдалим, ніж замикання на коефіцієнт дифузії в методі декорельованих траєкторій. Крім того, наближення моментів не містить вільних параметрів на відміну від методу декорельованих траєкторій.

Автор дякує В.І. Засенку за обговорення роботи та корисні поради. Робота виконана в рамках проекту УНТЦ № 6060.

1. R.H. Kraichnan, Phys. Fluids **13**, 22 (1970).
2. G.I. Taylor, Proc London Math. Soc. **20**, 196 (1921).
3. S. Corrsin, in *Atmospheric Diffusion and Air Pollution*, edited by H.E. Landsberg and J. van Mieghem (Academic Press, New York, 1959), p. 441.
4. J.V. Taylor and B. McNamara, Phys. Fluids **14**, 1492 (1971).
5. А.С. Монин, А.М. Яглом, Статистическая гидромеханика (Наука, Москва, 1965).
6. J. D. Reuss and J. H. Misguich, Phys. Rev. **E 54**, 1857 (1996).
7. A.V. Gruzinov, M.B. Isichenko, and Ya.L. Kalda, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **97**, 476 (1990); Sov. Phys. JETP **70**, 263 (1990).
8. M. Vlad, F. Spineanu, J.H. Misguich, and R. Balescu, Phys. Rev. **E 58**, 7359 (1998).
9. R. Balescu, *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (Institute of Physics Publishing, PA, 2005).
10. V.I. Zasenko, A.G. Zagorodny, O.M. Chernyak, Ukr. J. Phys. **56**, 1007 (2011); **53**, 517 (2008).

Одержано 01.04.15

А.Н. Черняк

ДИФУЗИЯ ЧАСТИЦ

В ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Резюме

На основе детального анализа сравниваются два подхода к описанию диффузии частиц в двухмерном случайном поле скоростей, а именно метод декоррелированных траекторий и приближение моментами. Рассмотрена замороженная турбулентность, которая является наиболее сложным тестом для проверки статистических теорий. Результаты аналитических приближений сопоставляются с данными численного моделирования.

О.М. Черняк

PARTICLE'S DIFFUSION

IN A TWO-DIMENSIONAL RANDOM VELOCITY FIELD

Summary

The two approaches to describe the diffusion process of test particles in a two-dimensional random velocity field are compared to each other: the method of decorrelation trajectories and the moment approximation. The frozen turbulence case is considered, because it is the most complicated test for statistical theories. The results of considered analytical approaches are verified by direct numerical simulation.