

В.М. ВАСЮТА, В.М. ТКАЧУК

Кафедра теоретичної фізики, Львівський національний університет імені І. Франка
(Вул. Драгоманова, 12, Львів 79005; e-mail: waswasiuta@gmail.com, voltkachuk@gmail.com)

**ОБЕРНЕНО КВАДРАТИЧНИЙ
ПОТЕНЦІАЛ У ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ
НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ**

УДК 530.145

Розглянуто притягальний обернено квадратичний потенціал у просторі зі спіноюю некомутативністю координат. Показано, що для такого потенціалу ефективна потенціална, а отже і повна, енергія обмежена знизу. За допомогою варіаційного методу знайдено верхню границю енергії основного стану, яка для достатньо великих констант зв'язку є від'ємною. Таким чином доведено, що замість падіння на притягальний центр як в комутативному просторі, в обернено квадратичному потенціалі в просторі зі спіноюю некомутативністю утворюються стаціонарні рівні.

Ключові слова: обернено квадратичний потенціал, некомутативність.

1. Вступ

Ідея некомутативних координат активно почала розвиватися після досліджень в теорії струн, де було показано, що координати на D-брані в магнітному полі не комутують [1]. Також, некомутативність координат з'являється і при компактифікації деяких варіантів М-теорії [2]. В даних задачах виникає координатний комутатор вигляду

$$[X_i, X_j] = i\theta_{ij}, \tag{1}$$

де θ_{ij} – антисиметрична матриця постійних.

Цікаво, що за допомогою некомутативності в комутативній теорії можна включити поняття мінімальної довжини, яка виникає при квантовому розгляді гравітаційного поля [3].

Однією з найбільших проблем (1) є її неінваріантність відносно поворотів. Відомо декілька шляхів побудови некомутативних алгебр, які інваріантні відносно поворотів [3–6]. Іншим підходом є алгебри зі спіноюю некомутативністю координат, де просторові координати змішуються зі спіновими операторами.

Так, в [7] запропоновані некомутативні координати, утворені додаванням до комутативних координат операторів спіну $X_i = x_i + \theta s_i$. Відповідна алгебра записується

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= i\theta^2 \varepsilon_{ijk} s^k, & [X_i, P_j] &= i\hbar \delta_{ij}, \\ [X_i, s_j] &= i\theta \varepsilon_{ijk} s^k, & [s_i, s_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} s^k, \\ [P_i, P_j] &= 0, & [P_i, s_j] &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Дану алгебру можна узагальнити на релятивістський випадок, зсуваючи координати на матриці Дірака $X^\mu = x^\mu + i\theta \gamma^\mu$ [8]. Легко бачити, що введені таким чином координати є лоренц-інваріантними.

Інший тип спінової некомутативності можна отримати, додаючи до координат вектор Паулі-Любанського $X^\mu = x^\mu + \theta W^\mu$, де $W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \times S_{\nu\rho} p_\sigma$, $S_{\nu\rho} = \frac{i}{4} [\gamma_\nu, \gamma_\rho]$ [9, 10]. Ця алгебра теж інваріантна відносно поворотів (ренц-інваріантна) і володіє мінімальною довжиною.

Обернено квадратичний потенціал досліджувався в літературі з різних точок зору. Інтерес до нього викликаний, з одного боку, реалізацією такого потенціалу в різних системах, зокрема: ефект Єфімова [11], нейтральні атоми в полі зарядженої не-

тки [12–14], магнітний момент в полі тонкого соленоїда [15], речовина біля горизонту чорної діри [16–19], електрон в полі дипольної молекули [20–23], тощо.

З іншого боку, обернено квадратичний потенціал допускає падіння частинки на притягальний центр [24]. В квантовому випадку, можна показати, що середнє $\langle r^2 \rangle$ еволюціонує за законом

$$\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle_0 + \frac{\langle \mathbf{rp} + \mathbf{pr} \rangle}{m} t + \frac{2\langle H \rangle}{m} t^2, \quad (3)$$

і при $\langle H \rangle < 0$ за деякий скінченний час t_f частинка впаде на центр $\langle r^2 \rangle_{t_f} = 0$ [25].

У просторі з узагальненим принципом невизначеності і некомутативними координатами потенціал $-\gamma/R^2$ регуляризується і замість падіння виникають стаціонарні рівні [26]. Також зв'язані стани виникають і у просторі з мінімальною довжиною [27].

В даній роботі розглянемо вплив некомутативності (2) на поведінку частинки в обернено квадратичному потенціалі. Така некомутативність ефективно виникає в системах з сильною диполь-дипольною взаємодією (наприклад, бозеконденсат ^{52}Cr) [7]. Крім того, алгебра (2) дозволяє пояснити триплетний куперівський механізм спарювання [28]. Некомутативність (2) спричиняє анізотропію ефекту Ааронова–Бома [29] та знімає виродження рівнів атома водню по орбітальному квантовому числу [30].

Стаття побудована наступним чином. В розділі 2 показано, що досліджувана алгебра дійсно володіє мінімальною довжиною, а також знайдено вираз для гамільтоніана частинки в обернено квадратичному потенціалі в просторі зі спіновою некомутативністю. В розділі 3 показано, що ефективна потенціальна енергія і повна енергія частинки в такому потенціалі обмежені знизу. В розділі 4 за допомогою варіаційного методу знайдено верхню оцінку енергії основного стану. Стаття завершується висновками.

2. Обернено квадратичний потенціал в некомутативному просторі

Розглянемо обернено квадратичний потенціал у некомутативному просторі з алгеброю (2). Покажемо, що в даному просторі існує мінімальна довжина. Справді, знайдемо власні значення

оператора

$$\widehat{R}^2 = r^2 + \hbar\theta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{3}{4}(\hbar\theta)^2. \quad (4)$$

Вони (в залежності від напрямку спіну) рівні

$$R_{\pm}^2 = \left(r \pm \frac{\hbar\theta}{2} \right)^2 + \frac{(\hbar\theta)^2}{2}. \quad (5)$$

Мінімальне власне значення отримуємо при $r = \hbar\theta/2$ і знакові “-”: $\lambda_{\min}^2 = (\hbar\theta)^2/2$.

Оскільки, для довільного стану середнє від оператора не може бути меншим, ніж мінімальне власне значення

$$\langle R^2 \rangle \geq \lambda_{\min}^2 = \frac{(\hbar\theta)^2}{2}, \quad (6)$$

то отримуємо, що неможливо утворити стан з локалізацією в області з лінійними розмірами меншими, ніж $\lambda_{\min} = \hbar\theta/\sqrt{2}$, а сама величина λ_{\min} є мінімальною довжиною в просторі з алгеброю (2).

Інтуїтивно зрозуміло, що падіння на точковий центр в просторі з ненульовою мінімальною довжиною неможливе. Далі покажемо це строго.

Прийmemo як постулат, що задача в некомутативному просторі формулюється заміною в гамільтоніані комутативної задачі $H(x, p)$ комутативних координат x на некомутативні X . Так, для обернено квадратичного потенціалу в просторі з алгеброю (2) маємо

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{R^2} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\widehat{L}^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r^2 + \theta r(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) + 3\theta^2/4}, \quad (7)$$

де $p_r = -\frac{i\hbar}{r}\partial_r r$ – радіальна частина оператора імпульсу, \widehat{L} – момент імпульсу, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Для подальших розрахунків зручно знерозмірити координати $r = \theta x/2$ та гамільтоніан

$$h = \frac{H}{H_0} = -\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x + \frac{\widehat{l}^2}{x^2} - \frac{\widetilde{\gamma}}{x^2 + 2x(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) + 3}, \quad (8)$$

де $\widehat{l}^2 = \widehat{L}^2/\hbar^2$, $\widetilde{\gamma} = \gamma/\frac{\hbar^2}{2m}$, $H_0 = \frac{2\hbar^2}{m\theta^2}$.

Як бачимо некомутативність регуляризує потенціал, тому слід очікувати, що енергія буде обмежена знизу. Справді, оскільки в алгебрі (2) присутня мінімальна довжина (6), то враховуючи, що кінетична енергія додатно визначена, отримуємо

$$\langle h \rangle \geq -\left\langle \frac{\widetilde{\gamma}}{X^2} \right\rangle \geq -\frac{\widetilde{\gamma}}{\lambda_{\min}^2} = -\frac{\widetilde{\gamma}}{2\theta^2}. \quad (9)$$

В наступному розділі покращимо нижню оцінку енергії, враховуючи відцентровий доданок кінетичної енергії.

Крім того покажемо, що гамільтоніан (7) дійсно володіє зв'язаними станами. Для цього достатньо показати, що основний стан даного гамільтоніана має скінченну від'ємну енергію.

3. Нижня оцінка енергії основного стану

Покращимо нижню оцінку (9) енергії основного стану, врахувавши відцентровий доданок кінетичної енергії. Для цього зручно помножити оператор потенціальної енергії на спряжену до знаменника величину і переписати гамільтоніан (8) у вигляді

$$h = -\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x + \frac{\hat{l}^2}{x^2} - \tilde{\gamma} \frac{x^2 + 3 - 2x(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})}{x^4 + 2x^2 + 9}. \quad (10)$$

Для такого гамільтоніана спінові та кутові змінні відокремлюються і спіново-кутове рівняння розв'язується точно у вигляді лінійної комбінації сферичних спінорів $\Omega_{j,l,m}(\theta, \varphi)$ [31]:

$$\psi = R_+ \Omega_{j,j+1/2,m} + R_- \Omega_{j,j+1/2,m} = \begin{pmatrix} R_+ \\ R_- \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Враховуючи те, що сферичні спінори є власними функціями оператора квадрата моменту імпульсу

$$\hat{l}^2 \Omega_{j,l,m} = l(l+1) \Omega_{j,l,m}, \quad (12)$$

та дію оператора $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})$ на сферичні спінори

$$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) \Omega_{j,j\pm 1/2,m} = \mp i \Omega_{j,j\mp 1/2,m}, \quad (13)$$

знайдемо ефективну потенціальну енергію $\tilde{U}(x)$ для радіального рівняння Шредінгера в представленні сферичних спінорів у вигляді матриці

$$\tilde{U}(x) = \begin{pmatrix} I_{j+1/2} - V_1 & -iV_2 \\ iV_2 & I_{j-1/2} - V_1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

де $V_1 = -\tilde{\gamma} \frac{x^2+3}{x^4+2x^2+9}$, $V_2 = -\tilde{\gamma} \frac{2x}{x^4+2x^2+9}$, $I_l = l(l+1)/x^2$.

Оскільки оператор кінетичної енергії є додатно визначеним, то очевидно, що

$$\varepsilon \geq \langle \psi | \tilde{U} | \psi \rangle \geq U_0, \quad (15)$$

де U_0 – мінімальне власне значення оператора ефективної потенціальної енергії (14).

Знайдемо мінімальне власне значення $U(x)$ матриці (14). Воно досягається при $j = 1/2$ і рівне

$$U(x) = V_1 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^4} + V_2^2}. \quad (16)$$

Далі мінімізуючи (16) як функцію x знаходимо $U_0 = \min U(x)$, яке згідно з (15) і буде нижньою оцінкою енергії частинки

$$\varepsilon_{\text{low}}(\tilde{\gamma}) = U_0. \quad (17)$$

Розрахунки дають такі значення для нижньої оцінки енергії частинки: $\varepsilon_{\text{low}}(\tilde{\gamma} = 1) = -0,3482\dots$, $\varepsilon_{\text{low}}(\tilde{\gamma} = 10) = -4,3475\dots$, $\varepsilon_{\text{low}}(\tilde{\gamma} = 100) = -49,0618\dots$. Залежність $\varepsilon_{\text{low}}(\tilde{\gamma})$ наведена на рисунку.

Зауважимо, що для реальних експериментів з реалізацією потенціалу $-\gamma/r^2$ значення $\tilde{\gamma}$ є порядку 100 [14].

4. Верхня оцінка енергії основного стану

Обмеженість потенціальної енергії знизу ще не гарантує наявності зв'язаних станів, оскільки потенціальна яма може виявитися занадто мілкою чи вузькою для утворення зв'язаних рівнів. Щоб продемонструвати їхню наявність скористаємося варіаційним методом і покажемо, що енергія основного стану дійсно є від'ємною.

Виберемо пробну хвильову функцію у вигляді

$$\psi(x, \theta, \varphi) = C e^{-\alpha x/2} \left(x \Omega_{1/2,1,0} + i \frac{\beta}{\alpha} \Omega_{1/2,0,0} \right), \quad (18)$$

де α, β – безрозмірні варіаційні параметри, C – стала нормування. Лінійна комбінація сферичних спінорів в (18) вибрана у відповідності до точного розв'язку кутового рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (10). Експонентний фактор в (18) забезпечує правильну асимптотику радіальної хвильової функції на безмежності, а відповідна степінь x правильну асимптотику в центрі.

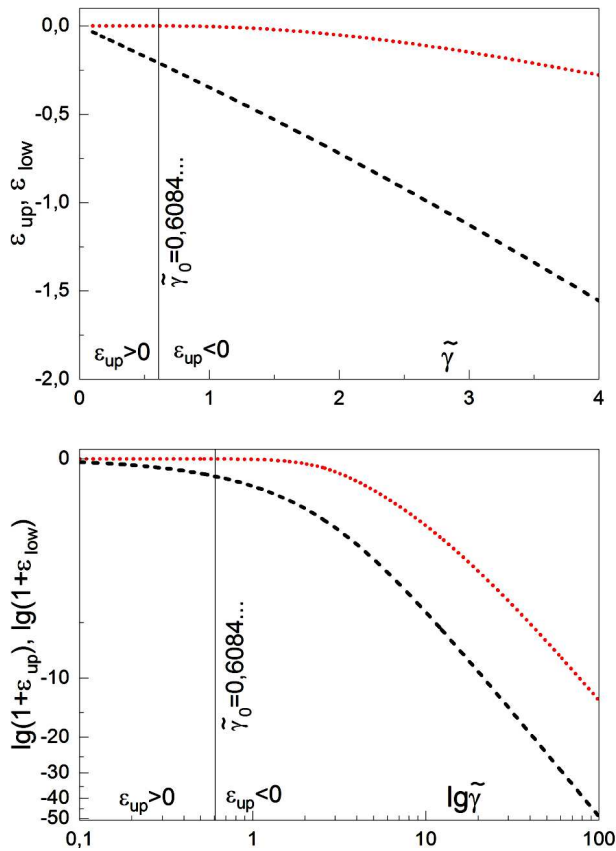
З умови нормування

$$\int_0^\infty dx \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi x^2 \sin \theta |\psi|^2 = 1,$$

та враховуючи ортогональність сферичних спінорів

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta \Omega_{jlm}^\dagger \Omega_{j'l'm'} = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

отримуємо сталу нормування $|C|^2 = \alpha^5 / (24 + 2\beta^2)$.



Залежність нижньої $\epsilon_{low}(\tilde{\gamma})$ (пунктиром) та верхньої $\epsilon_{up}(\tilde{\gamma})$ (точками) оцінки енергії основного стану від константи зв'язку $\tilde{\gamma}$. Вертикальна лінія $\tilde{\gamma}_0 = 0,6084\dots$ відповідає граничному значенню константи зв'язку: при $\tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}_0$ верхня оцінка енергії основного стану більша нуля, а при $\tilde{\gamma} > \tilde{\gamma}_0$ – менша. Значення енергії основного стану знаходиться між верхньою і нижньою лініями

Середнє від кінетичної енергії на хвильовій функції (18), враховуючи (12), рахується просто і рівне

$$\left\langle -\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x + \frac{\hat{l}^2}{x^2} \right\rangle = \frac{\alpha^2}{4}. \quad (19)$$

Обчислення середнього від потенціальної енергії провести аналітично складно. Тому здійснимо деякі перетворення потенціалу. Для цього помножимо чисельник і знаменник дроби на спряжену до знаменника величину

$$-\frac{\tilde{\gamma}}{x^2 + 2x(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) + 3} = -\tilde{\gamma} \frac{x^2 + 3 - 2x(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})}{(x^2 + 3)^2 - 4x^2}. \quad (20)$$

Оскільки нас цікавить верхня оцінка енергії основного стану, то можемо замінити потенціал системи на потенціал, який більший за даний в кожній точці x :

$$-\tilde{\gamma} \frac{x^2 + 3 - 2x(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})}{(x^2 + 3)^2 - 4x^2} \leq -\tilde{\gamma} \frac{x^2 + 3 - 2x(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})}{(x^2 + 3)^2}. \quad (21)$$

Інтеграл, які виникають при обчисленні $\langle U \rangle$ можна знайти аналітично

$$\int_0^\infty dx \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(x^2 + b)^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+n}}{m!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{d^m}{db^m} \int_0^\infty dx \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 + b}.$$

Інтеграл в правій частині рівний [32]:

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 + b} = \frac{1}{\sqrt{b}} f(\sqrt{b}\alpha), \quad (22)$$

де $f(x) = \text{ci } x \sin x - \text{si } x \cos x$, $\text{ci } x$, $\text{si } x$ – інтегральний косинус та синус відповідно.

Таким чином, враховуючи (13) та рівність

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} f(\sqrt{b}\alpha) = \frac{\sqrt{b}}{\alpha} - b f(\sqrt{b}\alpha), \quad (23)$$

знайдемо верхню оцінку для середнього від потенціальної енергії

$$\langle U \rangle \leq -\frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{12 + \beta^2}, \quad (24)$$

де $a = 1 - \sqrt{3}\alpha f$, $b = 4a - 4\sqrt{3}\alpha^2 f - 6a^3 f'$, $c = 2 - 3\alpha + 3\sqrt{3}\alpha^3 f$, $f = f(\sqrt{3}\alpha)$, $f' = d/d\alpha f(\sqrt{3}\alpha)$. Для середнього від гамільтоніана (8) отримуємо

$$\langle h \rangle \leq E(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{12 + \beta^2}. \quad (25)$$

Мінімізація $E(\alpha, \beta)$ по β дає

$$\beta = \frac{12a - c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{12a - c}{b}\right)^2 + 12}. \quad (26)$$

Для мінімізації (25) по α необхідно розв'язати складне трансцендентне рівняння, що аналітично здійснити неможливо. Чисельні розрахунки дають наступні оцінки для енергії основного стану: $\epsilon_{up}(\tilde{\gamma} = 1) = -0,0037\dots$, $\epsilon_{up}(\tilde{\gamma} = 10) = -1,0753\dots$, $\epsilon_{up}(\tilde{\gamma} = 100) = -13,0336\dots$. Залежність $\epsilon_{up}(\tilde{\gamma})$ зображена на рисунку. Істинні значення енергії

основного стану на графіку знаходиться між верхньою і нижньою лініями.

Існує граничне значення $\tilde{\gamma}_0 = 0,6084\dots$, нижче якого варіаційний метод дає оцінку енергії основного стану, більшу нуля, а отже стверджувати наявність зв'язаних станів не можна. Однак для $\tilde{\gamma} > \tilde{\gamma}_0$ верхня оцінка енергії основного стану від'ємна, що доводить наявність зв'язаних станів для обернено квадратичного потенціалу в просторі зі спіною некомутовативністю.

5. Висновки

В даній роботі розглянуто притягальний обернено квадратичний потенціал $-\gamma/R^2$ в просторі зі спіною некомутовативністю координат (2). Пораховано значення мінімальної довжини для даної алгебри $\lambda_{\min} = \hbar\theta/\sqrt{2}$. Знайдено ефективну потенціальну енергію (14) радіального руху основного стану частинки в обернено квадратичному потенціалі. Ефективна потенціальна енергія виявилася обмеженою знизу, що свідчить про те, що енергія основного стану теж обмежена знизу. Використовуючи варіаційний метод показано, що для константи зв'язку $\gamma/\frac{\hbar^2}{2m} > 0,6084\dots$ варіаційна оцінка енергії менша нуля. Таким чином доведено, що в некомутовативному просторі при достатньо великих значеннях константи зв'язку мінімальна енергія частинки в обернено квадратичному потенціалі є скінченною від'ємною величиною, а отже утворюються зв'язані стани, на протилежному до комутовативного випадку, де відбувається падіння частинки на центр.

1. N. Seiberg, E. Witten. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.* **9909**, 032 (1999) [DOI: 10.1088/1126-6708/1999/09/032].
2. A. Connes, M. Douglas, A. Schwarz. Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori. *J. High Energy Phys.* **9802**, 003 (1998) [DOI: 10.1088/1126-6708/1998/02/003].
3. S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.* **172**, 187 (1995) [DOI: 10.1007/BF02104515].
4. H.S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.* **71**, 38 (1947) [DOI: 10.1103/PhysRev.71.38].
5. K.P. Gnatenko, V.M. Tkachuk. Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space. *Phys. Lett. A* **378**, 3509 (2014) [DOI: 10.1016/j.physleta.2014.10.021].
6. K. Gnatenko, Y. Krynytskyi, V. Tkachuk. Perturbation of the ns levels of the hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space. *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1550033 (2015) [DOI: 10.1142/S0217732315500339].
7. H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, F. Mendez, P.A.G. Pisani. Magnetic-dipole spin effects in noncommutative quantum mechanics. *Phys. Lett. B* **680**, 384 (2009) [DOI: 10.1016/j.physletb.2009.09.007].
8. V.M. Vasyuta, V.M. Tkachuk. Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates. *Phys. Lett. B* **761**, 462 (2016) [DOI: 10.1016/j.physletb.2016.09.001].
9. M. Gomes, V.G. Kupriyanov, A.J. da Silva. Noncommutativity due to spin. *Phys. Rev. D* **81**, 085024 (2010) [DOI: 10.1103/PhysRevD.81.085024].
10. V.M. Vasyuta. Exact solution of harmonical oscillator in space with spin noncommutativity. *J. Phys. Stud.* **17**, 3001 (2013).
11. V. Efimov. Low-energy Properties of Three Resonantly Interacting Particles (In Russian). *Sov. J. Nucl. Phys.* **29**, 546 (1979).
12. L.V. Hau, M.M. Burns, J.A. Golovchenko. Bound states of guided matter waves: An atom and a charged wire. *Phys. Rev. A* **45**, 6468 (1992) [DOI: 10.1103/PhysRevA.45.6468].
13. J. Denschlag, J. Schmiedmayer. Scattering a neutral atom from a charged wire. *Europhys. Lett.* **38**, 405 (1997) [DOI: 10.1209/epl/i1997-00259-y].
14. J. Denschlag, G. Umshaus, J. Schmiedmayer. Probing a singular potential with cold atoms: A neutral atom and a charged wire. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 737 (1998) [DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.737].
15. V.M. Tkachuk. Binding of neutral atoms to ferromagnetic wire. *Phys. Rev. A* **60**, 4715 (1999) [DOI: 10.1103/PhysRevA.60.4715].
16. T.R. Govindarajan, V. Suneeta, S. Vaidya. Horizon states for AdS black holes. *Nucl. Phys. B* **583**, 291 (2000) [DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00336-9].
17. D. Birmingham, K.S. Gupta, S. Sen. Near-horizon conformal structure of black holes. *Phys. Lett. B* **505**, 191 (2001) [DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00354-9].
18. K.S. Gupta, S. Sen. Further evidence for the conformal structure of a Schwarzschild black hole in an algebraic approach. *Phys. Lett. B* **526**, 121 (2002) [DOI: 10.1016/S0370-2693(01)01501-5].
19. S.K. Chakrabarti, K.S. Gupta, S. Sen. Universal near-horizon conformal structure and black hole entropy. *Int. J. Mod. Phys. A* **23**, 2547 (2008) [DOI: 10.1142/S0217751X08040482].
20. M. Bawin. Electron-bound states in the field of dipolar molecules. *Phys. Rev. A* **70**, 022505 (2004) [DOI: 10.1103/PhysRevA.70.022505].
21. M. Bawin, S. A. Coon, B.R. Holstein. Anions and anomalies. *Int. J. Mod. Phys. A* **22**, 4901 (2007) [DOI: 10.1142/S0217751X07038268].
22. A. Alhaidari. Charged particle in the field of an electric quadrupole in two dimensions. *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 14843 (2007) [DOI: 10.1088/1751-8113/40/49/016].

23. P.R. Giri, K.S. Gupta, S. Meljanac, A. Samsarov. Electron capture and scaling anomaly in polar molecules. *Phys. Lett. A* **372**, 2967 (2008) [DOI: 10.1016/j.physleta.2008.01.008].
24. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика* (Наука, 1989), Vol. 3.
25. V.M. Vasyuta, V.M. Tkachuk. Falling of a quantum particle in an inverse square attractive potential. *Europ. Phys. J. D* **70**, 267 (2016) [DOI: 10.1140/epjd/e2016-70463-3].
26. D. Bouaziz, M. Bawin. Regularization of the singular inverse square potential in quantum mechanics with a minimal length. *Phys. Rev. A* **76**, 032112 (2007) [DOI: 10.1103/PhysRevA.76.032112].
27. T.V. Fityo, I.O. Vakarchuk, V.M. Tkachuk. WKB approximation in deformed space with minimal length. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 379 (2005) [DOI: 10.1088/0305-4470/39/2/008].
28. A. Das, J. Gamboa, F. Méndez, F. Torres. Generalization of the Cooper pairing mechanism for spin-triplet in superconductors. *Phys. Lett. A* **375**, 1756 (2011) [DOI: 10.1016/j.physleta.2011.02.063].
29. A. Das, H. Falomir, M. Nieto, J. Gamboa, F. Méndez. Aharonov–Bohm effect in a class of noncommutative theories. *Phys. Rev. D* **84**, 045002 (2011) [DOI: 10.1103/PhysRevD.84.045002].
30. V.M. Vasyuta. Corrections to the energy levels of hydrogen atom in space with spin noncommutativity of coordinates. *J. Phys. Stud.* **18**, 4001 (2014).
31. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая электродинамика* (Наука, 1989), Vol. 4.
32. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов сумм рядов и приведений* (Наука, 1971).
Одержано 19.01.17

V.M. Vasyuta, V.M. Tkachuk

INVERSE SQUARE POTENTIAL IN A SPACE
WITH SPIN NONCOMMUTATIVITY OF COORDINATES

S u m m a r y

An attractive inverse square potential has been considered in a space with the spin noncommutativity of coordinates. The corresponding effective potential energy, as well as the total energy, was shown to be confined from below. Using the variational method, the upper limit of the ground state energy was found, which turned out to be negative for a sufficiently large coupling constant. As a result, it was proved that the inverse square potential creates stationary levels in the space concerned, unlike the case of commutative space where a particle falls to the center.