

П.П. ШИГОРІН, А.В. СВДЗИНСЬКИЙ, І.О. МАТЕР'ЯН

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
(Просп. Волі, 13, Луцьк 43025; e-mail: pashyh@gmail.com)

РОЗРАХУНОК СТРУМУ ДЖОЗЕФСОНА У ДВОБАР'ЄРНОМУ ТУНЕЛЬНОМУ КОНТАКТІ

УДК 538.945

У роботі аналітично розраховано струм Джозефсона у двобар'єрному тунельному контакті зі структурою SISIS. Обчислення виконано на основі квазікласичного наближення рівнянь мікроскопічної теорії надпровідності. Нами було розраховано функції Гріна для тунельного SISIS-контакту та одержано вираз для струму Джозефсона в моделі точкового контакту. Встановлена залежність тунельного струму від фази параметра впорядкування. Ми також проаналізували залежність величини струму від відстані між бар'єрами та показали наявність резонансних піків джозефсонівського струму.

Ключові слова: ефект Джозефсона, тунельний контакт, критичний струм.

1. Вступ

Серед багатьох важливих і цікавих явищ, відкритих у минулому столітті, надпровідність займає особливе місце.

Надпровідники викликають значний інтерес у науковців. Причин для такого інтересу багато. Однією з них є незвичність з точки зору класичних уявлень ефектів, які виникають у таких системах: бездисипативність електричного струму, виштовхування магнітного поля із об'єму надпровідника, квантування магнітного потоку, тощо [1, 2]. Ще одна важлива обставина, яка визначає актуальність досліджень надпровідників, пов'язана з тим, що такі системи є "вікном у квантовий світ", оскільки квантові ефекти проявляються у них на макроскопічному рівні.

Унікальними для фізики надпровідності є два ефекти Джозефсона, які спостерігаються в системі, що складається із двох надпровідників (S), розділених тонким шаром діелектрика (I) (так званий SIS-контакт). Один із них (стаціонарний) полягає у тому, що якщо через контакт пропускати

струм, величина якого менша за певне критичне значення, то спад напруги на контакті дорівнює нулю, незважаючи на наявність шару діелектрика. Ефекти Джозефсона (стаціонарний та нестаціонарний) відносяться до так званої слабкої надпровідності [3].

В останні роки з'явилися можливості створення багатошарових тунельних контактів із довільною геометрією та набором компонентів: SINIS, SISIS, SIS'IS, тощо [4]. Велике прикладне значення має теоретичний розрахунок ефектів фазово-когерентного переносу заряду в шаруватих системах типу SISIS та SIS'IS, дослідження яких актуальне у зв'язку зі створенням квантових інтерференційних пристроїв (SQUID) [5], а також надпровідних кубітів для квантового комп'ютера [6, 7].

Дослідженню багатошарових надпровідних контактів присвячена низка робіт. Експериментальні закономірності джозефсонівського струму в таких структурах наведені у [4, 8], у роботах Брінкмана та Купріянова зі співробітниками [9, 10] проведено теоретичний аналіз ефекту Джозефсона у SISIS-контакті. Методом температурних функцій Гріна автори одержали вираз для струму Джозефсона в інтегральній формі, який аналізується чисельними методами.

© П.П. ШИГОРІН, А.В. СВДЗИНСЬКИЙ,
І.О. МАТЕР'ЯН, 2017

У даній роботі ми пропонуємо мікроскопічну теорію струму Джозефсона у двобар'єрному тунельному контакті зі структурою SISIS. На відміну від роботи [10], автори якої використовують функції Гріна для рівняння Горькова, ми працюємо із рівняннями теорії надпровідності, що мають понижений порядок як диференціальні — квазікласичними рівняннями. Це дозволило отримати вираз для струму Джозефсона через контакт в аналітичному вигляді. Відзначимо, що за допомогою методу квазікласичних рівнянь, одним із авторів даної роботи, було теоретично описано ефект Джозефсона в надпровідних контактах різного типу композиції — SIS, SNS, SINS [1].

Проведені у даній роботі дослідження виявили певні особливості тунельного струму в двобар'єрному контакті, які не є притаманні струму в SIS-контакті.

Перш за все відзначимо немонотонну залежність критичного струму від відстані між бар'єрами та наявність резонансних максимумів. Можливість резонансного тунелювання у двобар'єрній структурі розглядалася у роботі [11].

Ще однією особливістю ефекту Джозефсона в тунельному SISIS-контакті є несинусоїдальна залежність струму від різниці фаз. Подібна залежність була одержана авторами робіт [12, 13] на основі напівкласичної моделі Охти [14]. Експериментальне спостереження несинусоїдальної залежності струму у двобар'єрному надпровідному контакті описано в роботах [15, 16].

2. Квазікласичні рівняння теорії надпровідності для опису струмових станів

Як відомо, теоретичний опис надпровідників у наближенні середнього поля заснований на рівняннях Боголюбова, які являють собою рівняння на власні значення та власні вектори для коефіцієнтів канонічного перетворення Боголюбова від частинок до квазічастинок $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ та $v_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$:

$$\begin{cases} \hat{\xi}u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \Delta(\mathbf{r})v_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \\ \hat{\xi}v_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r})u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = -\varepsilon_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (1)$$

Тут $\Delta(\mathbf{r})$ — параметр впорядкування (середнє поле), $\hat{\xi} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) - \mu$, $U(\mathbf{r})$ — зовнішнє поле, μ — хімічний потенціал, $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2}$.

Рівняння Боголюбова (1) мають розв'язуватися за умови самоузгодження

$$\Delta(\mathbf{r}) = g \sum_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})v_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) \text{th} \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{2T}.$$

Від системи рівнянь Боголюбова (1) можна перейти до системи рівнянь для мацубарівських функцій Гріна, які називаються рівняннями Горькова:

$$\begin{cases} (i\omega_n - \hat{\xi})G_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Delta(\mathbf{r})F_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ (i\omega_n + \hat{\xi})F_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Delta^*(\mathbf{r})G_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \end{cases}$$

які мають розв'язуватися за умови

$$\Delta^*(\mathbf{r}) = |g|T \sum_{\omega_n} F_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}).$$

У матричному формалізмі Намбу ця система рівнянь записується таким чином:

$$(i\omega_n - \sigma_z \hat{\xi} - \hat{\Delta}(\mathbf{r})) \hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2)$$

де

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Із технічної точки зору система рівнянь теорії надпровідності у формі рівнянь Боголюбова чи еквівалентних їм рівнянь Горькова доволі складна, оскільки шукані величини (коефіцієнти $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ та $v_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ або функції $G_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ та $F_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$) є нелінійними функціоналами функції $|\Delta(\mathbf{r})|$, яка в загальному випадкові є просторово-неоднорідною. Як показують дослідження [1], швидкість руху куперівської пари як цілого v_s значно менша характерної швидкості електронів, що її утворюють — швидкості Фермі v_F . Це означає, що хоча електрони у надпровіднику сильно вироджені, рух куперівських пар є квазікласичним. Урахування цієї обставини дозволяє суттєво спростити рівняння теорії надпровідності, а саме квазікласичні рівняння мають нижчий порядок, ніж вихідні диференціальні рівняння теорії надпровідності (записані в просторових координатах). Зауважимо, що подібне спрощення виникає при переході від рівняння Дірака для релятивістського електрона до рівняння Паулі в нерелятивістській границі. Спрощення рівнянь, пов'язане із квазікласичністю руху куперівських пар, має просторовий аспект, оскільки

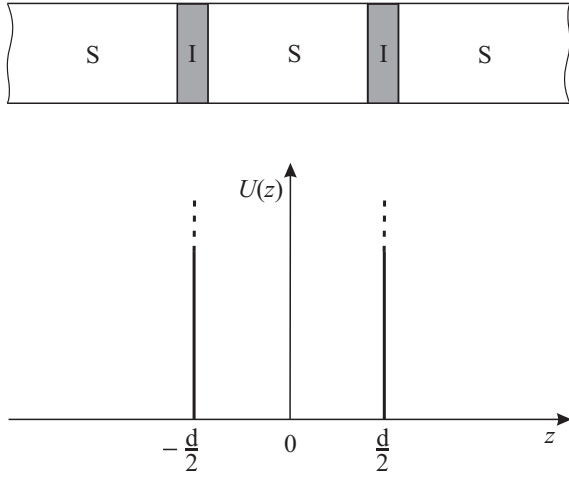


Рис. 1. Модель симетричного тунельного SISIS-контакту та відповідний потенціал

$(v_s)_{\text{crit}}/v_F \sim T_c/T_F \sim a/\xi_0 \ll 1$, де T_c – критична температура, T_F – температура Фермі, a – міжатомна відстань, а ξ_0 – довжина когерентності. Таким чином, квазікласичні рівняння у певному сенсі є заглаженими по атомних довжинах і містять лише великомасштабні просторові зміни параметра впорядкування. Принципи побудови квазікласичних рівнянь теорії надпровідності для тунельних контактів описані в монографії [1].

У даній роботі побудуємо квазікласичні рівняння для тунельного контакту типу SISIS. Геометрія контакту зображена на рис. 1. Ізолятор моделюється δ -функційним потенціальним бар'єром:

$$U(z) = \alpha \left[\delta \left(z - \frac{d}{2} \right) + \delta \left(z + \frac{d}{2} \right) \right]. \quad (3)$$

Виконаємо розклад мацубарівської функції Гріна (2) за власними станами одночастинкового гамільтоніана з потенціалом (3):

$$\hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{i,k} \int d\mathbf{p} \int d\mathbf{p}' \hat{G}_{\omega_n}^{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \chi_{\mathbf{p}}^{(i)}(\mathbf{r}) \chi_{\mathbf{p}'}^{(k)}(\mathbf{r}'), \quad (4)$$

де

$$\chi_{\mathbf{p}}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}} \Psi_{p_z}^{(1)}, \quad \chi_{\mathbf{p}}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}} \Psi_{p_z}^{(2)}.$$

Тут p_\perp та p_z – перпендикулярна та поздовжня складові імпульсу, а функції $\Psi_{p_z}^{(1)}$ та $\Psi_{p_z}^{(2)}$ – розв'язки одновимірного рівняння Шредінгера з потенціалом (3). Маємо для хвилі, що падає зліва

$$\Psi_{p_z}^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\{e^{ip_z z} + C_1 e^{-ip_z z}\} \theta \left(-z - \frac{d}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \{C_2 e^{ip_z z} + C_3 e^{-ip_z z}\} \theta \left(z + \frac{d}{2} \right) \theta \left(-z + \frac{d}{2} \right) + C_4 e^{ip_z z} \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) \right] \quad (5)$$

і для хвилі, що падає справа

$$\Psi_{p_z}^{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[C_4 e^{-ip_z z} \theta \left(-z - \frac{d}{2} \right) + \{C_2 e^{-ip_z z} + C_3 e^{ip_z z}\} \theta \left(-z + \frac{d}{2} \right) \theta \left(z + \frac{d}{2} \right) + \{C_1 e^{ip_z z} + e^{-ip_z z}\} \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

Константи C_1, C_2, C_3, C_4 визначаються з умов неперервності хвильової функції на бар'єрах та заданого стрибка її першої похідної.

Коефіцієнт проходження електронів через бар'єр визначається співвідношенням

$$D = \frac{8\kappa^4}{(8\kappa^4 + 4\kappa^2 + 1) + (4\kappa^2 - 1) \cos(2p_z d) + 4\kappa \sin(2p_z d)},$$

де

$$\kappa = \frac{p_z}{2m\alpha} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{2m\alpha}}.$$

На основі рівняння Горькова (2) одержуємо інтегральне рівняння для коефіцієнтів розкладу функції Гріна (4):

$$(i\omega_n - \sigma_z \xi) \hat{G}_{\omega_n}^{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_j \int d\mathbf{p}'' \langle i, \mathbf{p} | \hat{\Delta}(z) | j, \mathbf{p}'' \rangle \times \\ \times \hat{G}_{\omega_n}^{jk}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}') = \delta_{ik} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

Візьмемо до уваги, що просторова однорідність порушена лише в напрямку осі oz , параметр порядку Δ залежить лише від координати z , тому матричні елементи $\langle i, \mathbf{p} | \hat{\Delta}(z) | j, \mathbf{p}'' \rangle$ діагональні за поперечними імпульсами, тобто містять δ -функцію $\delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp)$. Це стосується також функції Гріна, яка має вигляд

$$\hat{G}_{\omega_n}^{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \hat{G}_{\omega_n}^{ik}(\mathbf{p}_\perp, p_z, p'_z) \delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp).$$

Вказана симетрія задачі дозволяє перетворити рівняння для коефіцієнтів розкладу функції Гріна до такого вигляду:

$$(i\omega_n - \sigma_z \xi) \hat{G}_{\omega_n}^{ik}(\mathbf{p}_\perp, p_z, p'_z) - \sum_j \int d p''_z \langle i, p_z | \hat{\Delta}(z) | j, p''_z \rangle \times \\ \times \hat{G}_{\omega_n}^{jk}(\mathbf{p}_\perp, p''_z, p'_z) = \delta_{ik} \delta(p - p'_z). \quad (7)$$

Одержана форма рівняння для горьковських функцій Гріна (7) є зручною для побудови квазікласичного наближення. Врахуємо, що характерні імпульси, які дають внесок у значення фізичних величин, близькі до фермі-імпульсу p_F . Відповідно до цього можемо покласти $p = p_F + \xi/v_F$, де ξ порядку T_c . Для різниці проєкцій імпульсу одержимо

$$p_z - p'_z \cong \frac{\xi - \xi'}{v_F x}, \quad x \equiv \cos \theta,$$

де θ – кут падіння електрона на бар'єр.

Таким чином, маємо наближені співвідношення

$$\delta(p_z - p'_z) \cong v_F x \delta(\xi - \xi'), \quad \int_0^\infty dp_z \dots \cong \frac{1}{v_F x} \int_{-\infty}^\infty d\xi.$$

Враховуючи одержані співвідношення та після переходу від змінної ξ до фур'є-спряженої змінної t (розмірності зворотної температури) за допомогою формул

$$\langle \xi | t \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_F x}} e^{-i\xi t}, \quad \langle t | \xi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_F x}} e^{i\xi t},$$

одержимо рівняння для функцій Гріна (7), що має понижений порядок як диференціальне

$$\begin{aligned} & \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} \right) \langle t, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle - \\ & - \sum_j \int dt'' \langle t, i | \hat{\Delta}(z) | j, t'' \rangle \langle t'', j | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle = \\ & = \delta_{ik} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (8)$$

Як показує розрахунок, матричні елементи параметра порядку є діагональними за змінними $t - t'$, тобто виконується співвідношення

$$\langle t, i | \hat{\Delta}(z) | j, t' \rangle = \delta(t - t') \langle t, i | \hat{\Delta}(z) | j, t \rangle.$$

Кінцева форма рівнянь Горькова для тунельного контакту в квазікласичному наближенні має вигляд

$$\begin{aligned} & \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \hat{\Delta}^{ik} \right) \hat{G}_{\omega_n}^{ik}(t, t') - \hat{\Delta}^{12} \hat{G}_{\omega_n}^{21}(t, t') = \\ & = \delta(t - t'), \\ & \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \hat{\Delta}^{22} \right) \hat{G}_{\omega_n}^{21}(t, t') - \hat{\Delta}^{21} \hat{G}_{\omega_n}^{11}(t, t') = 0, \\ & \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \hat{\Delta}^{22} \right) \hat{G}_{\omega_n}^{22}(t, t') - \hat{\Delta}^{21} \hat{G}_{\omega_n}^{12}(t, t') = \\ & = \delta(t - t'), \\ & \left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \hat{\Delta}^{11} \right) \hat{G}_{\omega_n}^{12}(t, t') - \hat{\Delta}^{12} \hat{G}_{\omega_n}^{22}(t, t') = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Одержану систему рівнянь слід доповнити виразом для густини струму через контакт

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{ie}{m} T \sum_{\omega_n} \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} (\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}}) G_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Після переходу до t -представлення, одержуємо

$$\begin{aligned} j(z) &= \frac{1}{2} \frac{e}{m} N(0) T \sum_{\omega_n} \sum_{i,k} \int_0^1 dx \int dt dt' \times \\ & \times \langle t, i | \hat{G}_{\omega_n} | k, t' \rangle J^{ki}(x, t, t', z), \end{aligned} \quad (10)$$

де у виразі

$$\begin{aligned} J^{ki}(x, t, t', z) &= \int d\xi d\xi' e^{-i\xi t + i\xi' t'} \times \\ & \times \left(\Psi_{p'_z}^{*(k)}(z) \hat{p}_z \Psi_{p_z}^{(i)}(z) - \Psi_{p_z}^{(i)}(z) \hat{p}_z \Psi_{p'_z}^{*(k)}(z) \right) \end{aligned}$$

ми повільно змінні множники (коефіцієнти проходження та відбиття) беремо на поверхні Фермі, а добутки експонент, які містять суму $p_z + p'_z \cong 2p_F x$ і осцилюють на атомних довжинах, відкидаємо, залишаючи лише ті, які містять різницю $p_z - p'_z = \frac{\xi - \xi'}{v_F x}$ і осцилюють на довжинах порядку довжини когерентності $\xi_0 \gg a$. Тим самим ми загладжуємо струм по атомних довжинах і описуємо лише великомасштабні просторові зміни. Описана процедура загладжування по атомних довжинах також використовується при обчисленні матричних елементів параметра впорядкування $\langle t, i | \hat{\Delta}(z) | j, t \rangle$.

3. Розрахунок джозефсонівського струму в тунельному SISIS-контакті

Застосуємо одержані у попередньому розділі квазікласичні рівняння (9) до опису ефекту Джозефсона в тунельному SISIS-контакті. У теорії надпровідних контактів є широковживаною модель, у якій нехтують зміною величини параметра впорядкування під впливом скінченної прозорості чи струму і приймають, що модуль параметра $\Delta(z)$ є величиною сталою в межах кожного з надпровідників. У випадку, коли параметр $\Delta(z)$ міняється в мірілі довжини когерентності ξ_0 , використання такої моделі не спричиняється до якісної похибки, оскільки ігнорування зміни $\Delta(z)$ приводить до непевності у числових множниках порядку одиниці у виразі для струму. Оскільки в системі можливі струмові стани, фаза параметра впорядкування

залежить від координати, а її градієнт визначає надплинну швидкість v_s , яка являє собою швидкість руху конденсату. У діелектричному прошарку (I) густина надплинної компоненти різко зменшується, тому надплинна швидкість повинна різко зростати щоби забезпечити неперервність струму. Як наслідок, при переході через бар'єр фаза параметра впорядкування може змінюватись дуже швидко, на довжинах порядку товщини бар'єра.

Нехай $\Phi(z)$ – фаза параметра впорядкування, тоді $\Delta(z) = |\Delta(z)|e^{i\Phi(z)}$. Покладемо $\Phi(z) = \tilde{\Phi}(z) + \Lambda(z)$, де $\tilde{\Phi}(z)$ – неперервна компонента фази, з якою пов'язана надплинна швидкість $v_s = \text{grad} \times \tilde{\Phi}(z)$; $\Lambda(z)$ – компонента фази, яка відповідає за стрибки на бар'єрах.

У даній роботі ми обмежуємося розрахунком струму на бар'єрах, тому надалі будемо враховувати лише стрибкоподібну складову фази параметра впорядкування

$$\Lambda(z) = \frac{\varphi}{2} \left\{ \theta \left(z - \frac{d}{2} \right) - \theta \left(-z - \frac{d}{2} \right) \right\}, \quad \varphi = \text{const.}$$

Таким чином, будемо розглядати таку модель параметра впорядкування:

$$\Delta(z) = \Delta \begin{cases} e^{-i\varphi/2}, & z < -d/2, \\ 1, & |z| < d/2, \\ e^{i\varphi/2}, & z > d/2, \end{cases} \quad \Delta = \text{const.} \quad (11)$$

На основі формул (5), (6) та (11), із урахуванням процедури загладження по атомних довжинах, знаходимо матричні елементи параметра впорядкування:

$$\hat{\Delta}^{11} = \begin{cases} \hat{\Delta}_{\varphi/2} - 2i\Delta R \sigma_x \sin \varphi/2, & z > d/2, \\ i\Delta (|C_2|^2 + |C_3|^2) \sigma_y, & |z| < d/2, \\ \hat{\Delta}_{-\varphi/2}, & z < -d/2, \end{cases}$$

$$\hat{\Delta}^{12} = \begin{cases} 2\Delta \sqrt{DR} \sin \varphi/2 \sigma_x, & z > d/2, \\ i\Delta (C_2 C_3^* + C_2^* C_3) \sigma_y, & |z| < d/2, \\ 0, & z < -d/2, \end{cases}$$

$$\hat{\Delta}^{21} = \begin{cases} 2\Delta \sqrt{DR} \sin \varphi/2 \sigma_x, & z > d/2, \\ i\Delta (C_2 C_3^* + C_2^* C_3) \sigma_y, & |z| < d/2, \\ 0, & z < -d/2, \end{cases}$$

$$\hat{\Delta}^{2,2} = \begin{cases} \hat{\Delta}_{-\varphi/2} + 2i\Delta R \sigma_x \sin \varphi/2, & z > d/2, \\ i\Delta (|C_2|^2 + |C_3|^2) \sigma_y, & |z| < d/2, \\ \hat{\Delta}_{\varphi/2}, & z < -d/2. \end{cases}$$

520

Тут D та R – коефіцієнти проходження та відбиття електронів для моделі подвійного δ -функційного бар'єра:

$$\hat{\Delta}_{\varphi} = \Delta \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ -e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Підстановка даних матричних елементів у квазі-класичні рівняння (9) дає можливість розрахувати горьковські функції Гріна для тунельного SISIS-контакту. У даній роботі нами було аналітично розраховано повну систему функцій Гріна для вказаного контакту. Відповідні вирази мають громіздкий вигляд, тому наведемо тут лише формулу для $\hat{G}_{\omega_n}^{11}(t, t')$ в області $z \geq d/2$:

$$\hat{G}_{\omega_n}^{11}(t, t') = \frac{1}{2i\tilde{\omega}_n} e^{-\tilde{\omega}_n |t-t'|} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_n \text{sign}(t-t') + \omega_n & i\Delta e^{i\frac{\varphi}{2}} + 2\Delta R \sin \frac{\varphi}{2} \\ -i\Delta e^{-i\frac{\varphi}{2}} + 2\Delta R \sin \frac{\varphi}{2} & \tilde{\omega}_n \text{sign}(t-t') - \omega_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & \frac{\tilde{\omega}_n + \omega_n}{i\Delta} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \frac{\tilde{\omega}_n - \omega_n}{i\Delta} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & -1 \end{pmatrix} e^{-\tilde{\omega}_n(t+t')} +$$

$$+ \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{\tilde{\omega}_n + \omega_n}{i\Delta} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \frac{\tilde{\omega}_n - \omega_n}{i\Delta} e^{i\frac{\varphi}{2}} & -1 \end{pmatrix} e^{-\tilde{\omega}_n(t+t')},$$

де $\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}$, α_1 та α_2 – константи інтегрування, які знаходяться з умов зшивки функцій Гріна на бар'єрах.

На основі виразів для функцій Гріна та формули (10) можемо обчислити струм через контакт. Розрахунок дає таке співвідношення для струму Джозефсона через тунельний SISIS-контакт при $z = \pm d/2$:

$$j = \frac{\pi}{4} e v_F N_F \frac{\Delta D \sin \varphi}{\sqrt{1 - D \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \text{th} \frac{\Delta \sqrt{1 - D \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{2T}. \quad (12)$$

Тут $N_F = \frac{3}{4} \frac{n}{E_F}$ – густина станів на поверхні Фермі.

Співвідношення (12) визначає залежність густини джозефсонівського струму на берегах тунельного SISIS-контакту від когерентної різниці фаз φ та параметрів бар'єра, а також від температури.

У випадку, коли $D = 1$, формула (12) набуває вигляду:

$$j = \frac{\pi}{2} e v_F N_F \Delta \sin \varphi/2 \text{th} \frac{\Delta \cos \varphi/2}{2T}.$$

Це співвідношення узгоджується із відомою формулою для SIS-контакту, одержаною у роботі Кулика та Омелянчука [17].

Значення критичного струму j_{\max} знаходиться із умови екстремуму виразу (12) за різницею фаз. Різниця фаз, за якої струм набуває максимуму, залежить від прозорості бар'єра, а також параметрів контакту і температури. Відповідне значення знаходиться зі співвідношення

$$\varphi_{\max} = \arccos \left[1 - \frac{2}{D} (1 - x^2) \right],$$

де параметр x – розв'язок трансцендентного рівняння

$$\operatorname{sh} \left(\frac{\Delta}{T} x \right) = \frac{\Delta x^2 (1 - x^2) (1 - D - x^2)}{1 - D - x^4}.$$

Обчислимо значення критичного струму при температурі $T = 2,5$ К для тунельного контакту на основі ніобію (Nb), у якого щілина $\Delta \simeq 3$ меВ, а критична температура $T_c \simeq 9,5$ К. У цьому випадкові $\Delta/T \simeq 14,2$.

При $D = 1$ значення параметра $x \simeq 0,23$, тоді $\varphi_{\max} = 2,67$, а відповідне значення критичного струму

$$j_{\max} \simeq 1,94 \frac{\pi}{2} e v_F N_F \Delta.$$

При $D = 0,5$ значення параметра $x \simeq 0,84$, тоді $\varphi_{\max} = 1,75$, а відповідне значення критичного струму

$$j_{\max} \simeq 0,59 \frac{\pi}{2} e v_F N_F \Delta.$$

Побудуємо графіки залежності густини струму (12) від характерних параметрів (усі графіки побудовані для безрозмірних величин).

На рис. 2 зображена залежність густини тунельного струму від різниці фаз параметра впорядкування на берегах контакту. Ця залежність має пилкоподібний тип при значенні коефіцієнта проходження, близькому до одиниці. При зменшенні D густина струму набуває вигляду синусоїди [13]. Відзначимо також, що при зменшенні коефіцієнта тунелювання амплітуда густини струму також зменшується.

На рис. 3 зображена залежність густини струму від товщини внутрішнього прошарку, яка має різкий резонансний пік, що збігається з максимумом

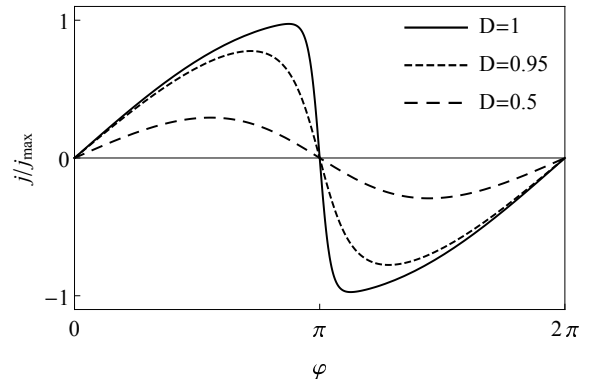


Рис. 2. Залежність густини струму від різниці фаз для різних значень коефіцієнта проходження

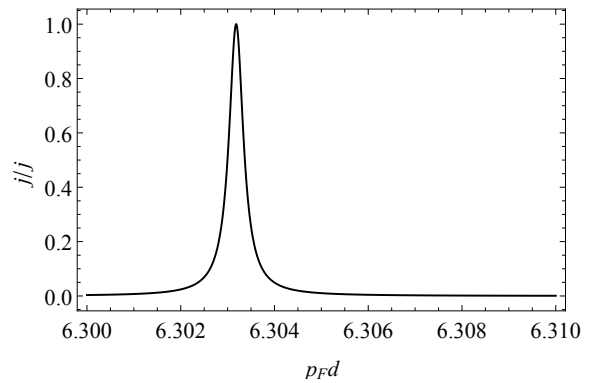


Рис. 3. Залежність густини струму від відстані між бар'єрами при $\kappa = 0,01$

коефіцієнта проходження електронів через подвійний δ -функційний бар'єр. При значеннях товщини бар'єра

$$p_F d_{\max} = \frac{1}{2} \left(-\operatorname{arctg} \frac{4\kappa}{4\kappa^2 - 1} + 2\pi n \right), \quad n \in N,$$

струм досягає максимального значення. Мінімальне значення струм набуває за умови

$$p_F d_{\min} = \frac{1}{2} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{4\kappa}{4\kappa^2 - 1} + 2\pi n \right), \quad n \in N.$$

Типові ізолятори, що використовуються у тунельних контактах (наприклад, Al_2O_3), мають товщину порядку 10–20 нм. Висота потенціального бар'єра таких ізоляторів є у межах 1–5 еВ. Таким чином, коефіцієнт α у потенціалі (3) має порядок $(1-10) \cdot 10^{-8}$ еВ · м. Оскільки енергія Фермі для металів є порядку 2–10 еВ, то параметр κ набуває значень в інтервалі $(5-30) \cdot 10^{-3}$. Для значення параметра $\kappa = 0,01$ максимального значення струм

набуває за умов $p_F d \simeq 0,01999$, $p_F d \simeq 3,16158$, $p_F d \simeq 6,30318$, $p_F d \simeq 9,44477$ і т.д.

4. Висновки

У роботі побудована мікроскопічна теорія стаціонарного ефекту Джозефсона в тунельному SISIS-контакті. В основу теорії покладено квазікласичні рівняння теорії надпровідності, які являють собою заглажені по атомних довжинах рівняння Горькова для мацубарівських функцій Гріна надпровідника.

На основі квазікласичних рівнянь аналітичними методами було одержано формулу для густини джозефсонівського струму через контакт. Він залежить від когерентної різниці фаз надпровідників, параметрів бар'єра, а також від температури. При значеннях коефіцієнта проходження, близьких до одиниці, струм виявляє пілкоподібну залежність від різниці фаз, яка поступово набуває вигляду синусоїди при зменшенні коефіцієнта проходження.

Нами також було одержано формулу для знаходження критичного струму, який залежить від значення коефіцієнта проходження. Максимальної величини критичний струм набуває при значенні $D = 1$.

Досліджуючи залежність значення струму від товщини внутрішнього прошарку контакту, нами було виявлено наявність у густині струму резонансних піків, що збігаються з максимумами коефіцієнта проходження електронів через подвійний δ -функційний бар'єр. Одержано аналітичне співвідношення для розрахунку товщини прошарку, за якої струм набуває максимального значення.

Зауважимо, що розроблена теорія може бути легко перенесена на випадок контактів іншої геометрії, наприклад, $S_1IS_2IS_3$, SINIS, тощо.

1. А.В. Свідзинський. *Мікроскопічна теорія надпровідності* (Вежа, 2001), Ч. 1.
2. В.М. Локтев. *Лекції з фізики надпровідності* (Інститут теоретичної фізики, 2008) [ISBN: 978-966-02-4459-7].
3. V.V. Schmidt, P. Müller, A.V. Ustinov. *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications* (Springer, 1997) [ISBN: 978-3540612438].
4. P. Seidel. *Applied Superconductivity: Handbook on Devices and Applications* (Wiley-VCH, 2015) [ISBN: 978-3-527-41209-9].
5. E. Bartolomé, A. Brinkman, J. Flokstra, A.A. Golubov, H. Rogalla. Double-barrier junction based dc SQUID. *Physica C* **340**, 93 (2000).

6. S.E. Shafranjuk. Two-qubit gate based on a multiterminal double-barrier Josephson junction. *Phys. Rev. B* **74**, 024521 (2006).
7. J. Braumüller. Concentric transmon qubit featuring fast tunability and an anisotropic magnetic dipole moment. *Appl. Phys. Lett.* **108**, 032601 (2016).
8. I.P. Nevirkovets, J.E. Evetts, M.G. Blamire. Transition from single junction to double junction behaviour in SISIS-type Nb-based devices. *Phys. Lett. A* **187**, 119 (1994).
9. M.Yu. Kupriyanov, A. Brinkman, A.A. Golubov, M. Siegel, H. Rogalla. Double-barrier Josephson structures as the novel elements for superconducting large-scale integrated circuits. *Physica C* **326**, 16 (1999).
10. A. Brinkman, A.A. Golubov. Coherence effects in double-barrier Josephson junctions. *Phys. Rev. B* **61**, 11297 (2000).
11. A. Morpurgo, F. Beltram. Tunneling through a superconducting double barrier and the resonant suppression of Andreev reflection. *Phys. Rev. B* **50**, 1325 (1994).
12. R. De Luca, F. Romeo. Sawtooth current-phase relation of a superconducting trilayer system described using Ohta's formalism. *Phys. Rev. B* **79**, 094516 (2009).
13. R. De Luca. Current-phase relation of double-barrier Josephson junctions with a two-gap superconductor as intermediate electrode. *Eur. Phys. J. B* **86**, 294 (2013).
14. H. Ohta. *Superconducting Quantum Interference Devices and Their Applications*, edited by H.D. Hahlbonm, H. Liibbing (De Gruyter, 1977).
15. I.P. Nevirkovets, J.E. Evetts, M.G. Blamire, Z.H. Barber, E. Goldobin. Investigation of the coupling between the outer electrodes in the superconducting double-barrier devices. *Phys. Lett. A* **232**, 299 (1997).
16. G. de Lange, B. van Heck, A. Brunol, D. van Woerkom, A. Geresdil, S.R. Plissard, E. Bakkers, A.R. Akhmerov, L. DiCarlo. Realization of microwave quantum circuits using hybrid superconducting-semiconducting nanowire Josephson elements. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 127002 (2015).
17. И.О. Кулик, А.Н. Омелянчук. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих мостиках: микроскопическая теория. *ФHT* **4**, 296 (1978).

Одержано 15.09.16

P.P. Shygorin, A.V. Svidzynskiy, I.O. Materian

CALCULATION OF JOSEPHSON CURRENT IN A TWO-BARRIER TUNNEL JUNCTION

S u m m a r y

The Josephson current through a two-barrier SISIS tunnel junction has been calculated analytically in the quasiclassical approximation for the microscopic theory of superconductivity. Green's functions for a SISIS tunnel junction and an expression for the Josephson current through a point contact are obtained. The dependence of the tunnel current on the order parameter phase is determined, and the current dependence on the distance between the barriers is analyzed. The presence of resonance peaks in the Josephson current is demonstrated.